अनुप्रयुक्त सामान्य सांख्यिकी

APPLIED GENERAL STATISTICS

फ्रेडरिक ई० क्रॉक्स्टन

डडले जे० काउडन

सिडनी क्लेन

अनुवादक

डॉ० पी० सी० जैन

रीडर, अर्थशास्त्र विभाग,

कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र



हरियाणा हिन्दी ग्रंथ अकादमी, चण्डीगढ़

यह पुस्तक प्रेन्टिस-हॉल, इन्कॉर्पोरेटिड, एंगलवुड क्लिफ्स द्वारा प्रकाशित फ्रेडरिक ई० क्रॉक्स्टन, डडले जे० काउडन, तथा सिडनी क्लेन कृत *एप्लाइड जनरल स्टैटिस्टिक्स* (तृतीय संस्करण—1967—भारत में पुनर्मुद्रित—1969) का हिन्दी अनुवाद है। इसके अनुवाद अधिकार वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग द्वारा प्राप्त किए गए थे। इसे शिक्षा तथा समाज कल्याण मन्त्रालय, भारत सरकार की विश्वविद्यालय स्तरीय पुस्तक रचना योजना के अन्तर्गत प्रकाशित किया जा रहा है।

प्रथम संस्करण	1975
मुद्रित प्रतियाँ	1100
मूल्य	: उनतीस रुपये (Rs 29 00)

This book has been published with a subsidy under the Indo American Text-Book Programme operated by National Book Trust India

Subsidy Code No 54—120 1975

आर० के० प्रिन्टर्स, 80-डी, कमला नगर, दिल्ली-110007 में मुद्रित

प्रस्तावना

सांख्यिकी का महत्व दिन प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है। अर्थशास्त्र में सांख्यिकी के अध्ययन का महत्व यों तो पर्याप्त समय से रहा है परन्तु द्वितीय विश्वयुद्ध के उपरान्त विशेष कर इस शताब्दी के छठे और सातवें दशकों में सांख्यिकी अर्थशास्त्र का एक अनिवार्य एवं अभिन्न अंग बन गई है। आर्थिक क्षेत्र में अनुसंधान एवं शोध कार्य की तो सांख्यिकी के आधार के बिना कल्पना करना भी कठिन हो गया है। अर्थशास्त्र ही क्या, अन्य सामाजिक एवं वैज्ञानिक अध्ययनों में भी सांख्यिकी का प्रयोग बढ़ता जा रहा है।

राष्ट्र भाषा हिन्दी को शिक्षा के माध्यम के रूप में विश्वविद्यालय स्तर पर अपनाने के मार्ग में एक बड़ी कठिनाई जो विद्यार्थियों और शिक्षाशास्त्रियों के सामने आती है वह उच्च कोटि के प्रामाणिक ग्रन्थ इस भाषा में उपलब्ध न होना है। निःसंदेह, *अनुप्रयुक्त सामान्य सांख्यिकी* विश्वविद्यालयीन विद्यार्थी वर्ग के लिए एक अति उपयोगी सरल और सुस्पष्ट ग्रन्थ है। हिन्दी भाषा में इस प्रकार के उपयोगी ग्रन्थों का अनुवाद हिन्दी के माध्यम से अपने को व्यक्त करने वाले विद्यार्थियों के लिए एक बहुत बड़ा सम्बल हो सकता है। जैसे-जैसे इस माध्यम के परीक्षार्थियों की संख्या बढ़ रही है वैसे वैसे मूल अंग्रेजी ग्रन्थों के प्रामाणिक अनुवाद भी महत्त्वपूर्ण होते जा रहे हैं। प्रस्तुत पुस्तक न केवल सांख्यिकी का अध्ययन प्रारंभ करने वाले विद्यार्थियों के लिए अतीव उपयोगी है बल्कि उन विद्यार्थियों के लिए भी मूल्यवान है जो विषय की गहराई में जाना चाहते हैं।

पुस्तक में वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग, भारत सरकार द्वारा तैयार की गई पारिभाषिक शब्दावली का प्रयोग किया गया है ताकि समूचे भारत में पारिभाषिक शब्दों में एकरूपता बनाए रखी जा सके।

आशा है विषय के विद्यार्थी एवं प्राध्यापक पुस्तक को उपयोगी पाएंगे।

शिक्षा मन्त्री, हरियाणा,
एवं अध्यक्ष
हरियाणा हिन्दी ग्रन्थ अकादमी,
चण्डीगढ़

निदेशक,
हरियाणा हिन्दी ग्रन्थ अकादमी
चण्डीगढ़

प्राक्कथन

अनुप्रयुक्त सामान्य सांख्यिकी (*Applied General Statistics*) के इस तृतीय संस्करण में प्राथमिक उद्देश्य वही है जो पहले के संस्करणों का था : यथासंभव संक्षेप में तथापि स्पष्टता से सामान्यतः अधिक प्रयुक्त होने वाली सांख्यिकीय विधियों का वर्णन तथा बहुत से क्षेत्रों में उनके प्रयोग का निदर्शन।

विषय क्षेत्र अधिकांशतः वही है जो पूर्व संस्करण का था, यद्यपि पुस्तक लगभग 100 पृष्ठ कम कर दी गई है। वे सभी निदर्शक उदाहरण जिनकी स्थिति में ऐसा अपेक्षित था या तो बदल दिए गए हैं या नवीनतम बना दिए गए हैं तथा पहले की भांति वास्तविक न कि परिकल्पनात्मक आंकड़ों पर आधारित हैं परन्तु न तो प्रकरणों का क्रम बदला गया है और न ही संकेत। इस संस्करण में संकेतों की सूचियां जो पहले सकेत प्रयोग करने वाले प्रत्येक अध्याय में पूर्व दी गई थीं अब परिशिष्ट के में इकट्ठी दी गई हैं। *अनुप्रयुक्त सामान्य सांख्यिकी की कार्यपुस्तक* का आगामी पाँचवाँ संस्करण प्रकरणों के क्रम तथा संकेत दोनों की दृष्टि से इस संस्करण के अनुरूप होगा।

अनुप्रयुक्त सामान्य सांख्यिकी का यह तृतीय संस्करण सिडनी क्लेन ने तैयार किया।

मैं कैम्ब्रिज के प्रोफ़ेसर सर रोनाल्ड ए० फिशर, रोथमस्टेड के डा० फ्रैंक यैट्स तथा एडिनबरा के मैसर्स ऑलिवर एण्ड बॉयड लिमिटेड द्वारा अपनी पुस्तक *स्टैटिस्टिकल टेबल्स फॉर बायोलॉजिकल, एग्रीकल्चरल एण्ड मेडिकल रिसर्च* में से तीसरी और चौथी सारणियों के अंशों के पुनर्मुद्रण की अनुमति प्रदान करने के लिए उनका आभारी हूँ। मैं प्रोफ़ेसर इगन एस० पियर्सन तथा बायोमीट्रिका ट्रस्टीज का भी *बायोमीट्रिका* तथा ई० एस० पियर्सन और एच० ओ० हार्टले की *बायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स* भाग 1 में से सारणियों अथवा सारणी अंशों, जो यहाँ परिशिष्ट में ... तथा ... तथा चार्ट 25.6 एवं 25.7 में दिखाए गए हैं, के पुनर्मुद्रण की अनुमति प्रदान करने के लिए आभारी हूँ। अन्य व्यक्तियों और संस्थाओं को जिन्होंने आंकड़े प्रदान किए अथवा सामग्री के पुनर्मुद्रण की अनुमति दी, यथास्थान अभिस्वीकृत किया गया है।

इस संशोधित संस्करण के प्रकाशन में बहुत से व्यक्तियों तथा संगठनों ने प्रत्यक्ष अथवा परोक्ष रूप में सहायता की है; दुर्भाग्यवश प्रत्येक वैयक्तिक अंशदान के लिए आभार प्रदर्शन स्थानाभाव के कारण संभव नहीं है। रूगस स्टेट विश्वविद्यालय के प्रशासन संकाय एवं/अथवा कर्मचारिवर्ग, कोलम्बिया विश्वविद्यालय, लॉस एंजलेस में कैलिफोर्निया विश्वविद्यालय, राष्ट्रीय चेंगची विश्वविद्यालय, तैपी, तैवान, चीन गणतंत्र, अन्तर्राष्ट्रीय आर्थिक सहयोग एवं विकास परिषद, चीन गणतंत्र, हांग कांग विश्वविद्यालय और एशिया फाउंडेशन, संयुक्त राज्य अमरीका ने मुझे आवश्यकतानुसार जब मैं उनके तत्वावधान में पढ़ाता था अथवा CIECD के अर्थशास्त्र प्रशिक्षण कार्यक्रम में अध्ययन निदेशक के रूप में

सेवा करता था, पर्याप्त नैतिक सहायता तथा उत्तम सुविधाएँ प्रदान की। मैं प्रेन्टिस-हॉल, इन्कॉर्पोरेटिड के प्रवर सम्पादक राबर्ट सी० वाल्टर्स का विशेष धन्यवादी हूँ, जिनका सावधान एवं सहयोगपूर्ण प्रकाशन-सम्पादकीय निरीक्षण, संयुक्त राज्य अमरीका से लेखक की अनुपस्थिति में अत्यधिक सहायक तथा अत्यंत आवश्यक रहा।

पाण्डुलिपि के विभिन्न भागों में सेटन हाल विश्वविद्यालय के प्रोफेसर अल्फ्रेड जे० काना के अंशदानों का आभास होता है। श्रीमती हेलन चानिन तथा कुमारी रूबी यिंग चू ने पाण्डुलिपि के कुछ भागों को टाइप करके बहुत सहायता की है। स्पेन्सर आर० क्लेन ने लिपिक-कार्य में बहुत सहायता की। अन्त में, परन्तु किसी भी प्रकार से न्यूनतम नहीं, मैं अपनी पत्नी इलीनर क्लेन, जिन्होंने टाइप किया, चार्ट बनाए और आवश्यकतानुसार सम्पादन किया के प्रति आभार स्वीकार करना चाहता हूँ।

सिडनी क्लेन

हांग कांग विश्वविद्यालय
हांग कांग बी० सी० सी०

विषय-सूची

(सांख्यिकीय विधियां व अन्य पाठ्यक्रम के लिए इस विषय-सूची में तारांकित अध्याय या परिच्छेद विवेचन प्रवाह को भंग किए बिना छोड़े जा सकते हैं।)

विषय सूची

अध्याय पृष्ठ

परिशिष्ट

1

परिचय

सांख्यिकीय आंकड़े एवं सांख्यिकीय विधियाँ

अंग्रेजी भाषा के *स्टैटिस्टिक्स* शब्द (जिसका हिन्दी पर्याय *सांख्यिकी है*) का प्रयोग दो अर्थों मे होता है। सामान्य बोलचाल की भाषा मे प्रायः आंकड़े शब्द के पर्यायवाची के रूप मे इसका प्रयोग होता है। इस प्रकार कोई कह सकता है कि मैंने "संयुक्त राज्य अमरीका मे औद्योगिक दुर्घटनाओ के स्टैटिस्टिक्स" (आंकडे) देखे है। अर्थ की दृष्टि से यह अधिक स्पष्ट होगा यदि इस अर्थ मे हम *स्टैटिस्टिक्स* शब्द का प्रयोग न करते वरन "संयुक्त राज्य अमरीका मे औद्योगिक दुर्घटनाओ का डैटा (अथवा फिगर)" कहते।

"स्टैटिस्टिक्स" (सांख्यिकी) *का संकेत उन सांख्यिकीय सिद्धातो और विधियो की* ओर भी है जो सख्यात्मक आंकडो के प्रयोग के लिए विकसित किए गए है और जो इस पुस्तक की विषय सामग्री है। नितान्त प्रारम्भिक वर्णनात्मक युक्तियो से लेकर, जिन्हे कोई भी समझ सकता है, अत्यन्त जटिल गणितीय क्रिया-विधियो तक जिन्हे केवल बहुत प्रवीण *सिद्धातज्ञ ही समझ पाते है, सभी सांख्यिकीय विधियो या सांख्यिकी की सीमा में आती है।* इस ग्रन्थ का उद्देश्य विषय के अत्यन्त गणितीय और सैद्धांतिक पक्षो मे न पडकर उसके नितान्त प्राथमिक और प्रायश प्रयोग मे आने वाले पक्षो का विवेचन करना है।

सांख्यिकी की परिभाषा *सख्यात्मक आंकडो के संग्रह, प्रस्तुति, विश्लेषण, और व्याख्या* के रूप मे की जा सकती है। जिन तथ्यो पर विचार किया जाता है वे सख्यात्मक अभिव्यक्ति मे समर्थ होने चाहिएँ। हमारे लिए इस जानकारी का कि घर ईंट, पत्थर, लकडी, और अन्य पदार्थो के बने हैं, सांख्यिकीय दृष्टि से प्रयोग नगण्य होगा। परन्तु यदि हम यह *जान लें कि घर प्रत्येक प्रकार के पदार्थ से कितने या किस अनुपात मे बने है, तो हमारे पास* सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए उपयोगी सख्यात्मक आंकडे हो जाते हैं।

सांख्यिकी को भौतिकी, रसायन, अर्थशास्त्र, और समाजशास्त्र से सहसम्बन्धित विषय नही *समझना* चाहिए। सांख्यिकी कोई विज्ञान नही है, यह एक वैज्ञानिक विधि है। वे विधियाँ और प्रक्रियाएँ, जिनकी हम परीक्षा करेंगे, एक अनुसधानकर्ता के लिए उपयोगी और प्राय अपरिहार्य साधन हैं। सांख्यिकी की पर्याप्त समझ के बिना सामाजिक विज्ञानो के अन्वेषक प्रायः उस अधे व्यक्ति के समान हो सकते है, जो अधेरे कक्ष मे, एक काली बिल्ली के लिए, जो वहाँ नही है, हाथ मार रहा है। सांख्यिकी की विधियाँ मानव-क्रियाओ की निरन्तर विस्तारशील सीमा के अन्तर्गत विचार के किसी भी क्षेत्र मे जहाँ सख्यात्मक आंकडे प्राप्त किए जा सकते हैं, उपयोगी है।

"सांख्यिकी" शब्द के अंग्रेज़ी पर्याय "स्टैटिस्टिक्स" की व्युत्पत्ति से उसके मूल उद्गम का संकेत प्राप्त होता है। राज्य-प्रशासनो को युद्ध और वित्त के प्रयोजनो के लिए

जनसंख्या और धन के आँकडो के संग्रह और विश्लेषण की आवश्यकता पडी। धीरे-धीरे सरकार के सामान्य प्रयोग के लिए अधिक विविध प्रकार के आँकडे प्राप्त किए जाने लगे। संयोग-प्रधान खेलो के विद्यार्थियो द्वारा सांख्यिकी के कुछ पक्षो का विकास किया गया। सांख्यिकीय विधियो के अनुप्रयोग और विकास के लिए बीमा और जीव-विज्ञान तथा अन्य प्राकृतिक विज्ञान उपजाऊ क्षेत्र थे। आज उद्यम का कदाचित् ही कोई ऐसा पक्ष हो जिसमें सांख्यिकीय साधन कम से कम यदा-कदा उपयोगी सिद्ध न होते हो। अर्थशास्त्र, समाज-शास्त्र, मानवविज्ञान, व्यवसाय, कृषि, मनोविज्ञान, तथा शिक्षा—सभी सांख्यिकी पर अत्यधिक आश्रित है। भेषज-अनुसधान-कर्ता को अपने निष्कर्षों के महत्त्व-निर्धारण के लिए बहुधा सांख्यिकी पर आश्रित रहना पडता है। वकील के लिए सांख्यिकीय साधन प्राय निश्चित प्रयोग के हो सकते है, विशेषत यदि वह निगम की वकालत करता हो। हाँ, इतना अवश्य कह देना चाहिए कि सगीतज्ञ, कलाकार, अभिनेता, और कथाकार को सांख्यिकी के प्रयोग का अवसर विरले ही प्राप्त होगा, परन्तु यहाँ भी विक्रय के कतिपय आँकडो, टिकट-घर की आय और लोक-रुचि की प्रवृत्तियो का विश्लेषण उपयोगी सिद्ध हो सकता है।

सांख्यिकी की परिभाषा देते समय इस ओर सकेत किया गया था कि *सख्यात्मक आँकडो का सग्रह, प्रस्तुति, विश्लेषण, और व्याख्या की जाती है।* आइए, अब हम इन चारो प्रक्रियाओ मे से प्रत्येक की सक्षेप मे परीक्षा करें।

संग्रह—सांख्यिकीय आँकडे वर्तमान प्रकाशित या अप्रकाशित स्रोतो, जैसे सरकारी माध्यमो, व्यापार सस्थाओ, अनुसधान विभागो, पत्रिकाओ, समाचार-पत्रो, अलग-अलग अन्वेषको से तथा अन्यत्र से प्राप्त किये जा सकते हैं। दूसरी ओर, अन्वेषक आँकडे प्राप्त करने के लिए सभवत घर-घर अथवा दुकान-दुकान जाकर भी अपनी सूचनाएँ एकत्र कर सकता है। सांख्यिकीय आँकडो का स्वय सग्रह करना सांख्यिकी-विद् के लिए सबसे अधिक कठिन और महत्त्वपूर्ण आवश्यक कार्यों मे से एक है। उसकी प्रक्रिया की समागता उसके द्वारा प्राप्त आँकडो की उपयोगिता को बहुत अधिक मात्रा मे निर्धारित करती है।

अगले अध्याय मे आँकडे प्राप्त करने की इन दो विधियो का वर्णन किया गया है। परन्तु यह भली-भाँति समझ लेना चाहिए कि यदि प्रारम्भिक आँकडो का सग्रह जरूरी है तो अनुभवी और उत्तम सहज बुद्धि वाले अन्वेषक को स्पष्ट लाभ रहता है। सांख्यिकी के इस पक्ष पर बहुत कुछ सिखाया जा सकता है परन्तु जो केवल अनुभव से सीखा जा सकता है वह कही अधिक है। यद्यपि यह हो सकता है कि कोई व्यक्ति अपने निजी प्रयोग के *लिए सांख्यिकीय आँकडे कभी एकत्रित न कर पाए और सदा प्रकाशित स्रोतो का प्रयोग* करता रहे, तो भी यह अनिवार्य है कि उसे सग्रह की प्रक्रियाओ का व्यावहारिक ज्ञान हो और वह जिन आँकडो का प्रयोग करना चाहता है उनकी विश्वसनीयता का मूल्याकन कर सकने मे समर्थ हो। अविश्वसनीय आँकडे निष्कर्ष निकालने का सतोषजनक आधार नही होते।

बहुत से लोगो की यह प्रवृत्ति खेदजनक है कि वे बिना जाँच किए सांख्यिकीय सामग्री को स्वीकार कर लेते है। उनके लिए कोई भी ऐसा कथन, जो सख्यात्मक रूप मे प्रस्तुत किया जाय, शुद्ध होता है और उसकी प्रामाणिकता स्वत सिद्ध रहती है। रेल मार्ग के एक क्लर्क *के अवकाश ग्रहण करने के कुछ काल बाद समाचार-पत्रो द्वारा यह घोषणा की गई कि* उसने अपने 43 वर्ष के सेवाकाल मे कुल 1,20,00,00,000 मील की यात्रा की। इस कथन

के अधिकाश पाठको ने सभवत इसे असन्दिग्ध रूप मे स्वीकार कर लिया। वास्तव मे, इस आँकडे के ठीक होने के लिए उस कर्मचारी को 43 वर्ष की समूची अवधि में प्रत्येक दिन के प्रत्येक घण्टे लगभग 3,200 मील की यात्रा करनी पडी होगी !

प्रस्तुति—अपने निजी प्रयोग के लिए हो या दूसरो के प्रयोग के लिए, आँकडे किसी *उपयुक्त रूप मे प्रस्तुत किये जाने चाहिएँ। सामान्यत. आँकडो को सारणियो मे क्रमबद्ध किया* जाता है या लेखाचित्रो मे दिखाया जाता है, जैसाकि अध्याय 3 से 6 मे वर्णन किया गया है।

विश्लेषण *विश्लेषण करते समय आँकडो का उपयुक्त और तर्कसगत वर्गीकरण* आवश्यक है। सभावित वर्गों का विचार उसी समय कर लेना जरूरी है जब आँकडों का *सग्रह करने की योजनाएं बनाई जाए तथा आँकडा को सारणीबद्ध करते समय ही और* इससे पूर्व कि उन्हे लेखाचित्रो द्वारा दिखाया जा सके, आँकडो का वर्गीकरण आवश्यक है। *अत विश्लेषण की प्रक्रिया आशिक रूप मे सग्रह और प्रस्तुति की सगामी है।*

साख्यिकीय आँकडो के वर्गीकरण के चार महत्त्वपूर्ण आधार है (1) गुणात्मक, (2) मात्रात्मक (3) तैथिक, तथा (4) भौगोलिक। इनमे से प्रत्येक की क्रमश जाँच की जाएगी।

गुणात्मक—उदाहरण के लिये जब कर्मचारियो का वर्गीकरण सघीय या सघेतर मे किया जाता है तो हम गुणात्मक भेद करते है। यह भिन्नता प्रकार की है मात्रा की नही। व्यक्तियो का वर्गीकरण वैवाहिक स्थिति की दृष्टि से, अविवाहित, विवाहित, विधवा अथवा विधुर, तलाकशुदा, और पृथक्कृत के रूप मे किया जा सकता है। कृषको का पूर्ण स्वामियो, आशिक स्वामियो, प्रबन्धको, और मुजारो के रूप मे वर्गीकरण किया जा सकता है। प्राकृतिक रबड को अपने स्रोत के अनुसार रोपित या जगली निर्दिष्ट किया जा सकता है।

मात्रात्मक—जब किसी मापे जा सकने वाले लक्षण की दृष्टि से मदो मे विविधता हो तो मात्रात्मक वर्गीकरण उचित है। कुटुम्बो का वर्गीकरण बच्चो की सख्या के अनुसार हो सकता है। निर्माण-उद्योगो का वर्गीकरण नियुक्त श्रमिको की सख्या के अनुसार और निर्मित वस्तुओ के मूल्य के अनुसार भी कर सकते है। व्यक्तियो का वर्गीकरण उनके द्वारा प्रदत्त आयकर की रकम के अनुसार किया जा सकता है।

अधिकाश मात्रात्मक बटन *बारबारता बटन* हैं। सारणी 8 3 के आँकडो मे राज्य विश्वविद्यालय कामर्स के 409 उदार कला स्नातको द्वारा प्राप्त ग्रेडो का बारबारता बटन दिखाया गया है। कई अन्य बारबारता बटन अध्याय 8, 9, और 10 मे दिखाए गए है।

कभी-कभी गुणात्मक दृष्टि स वर्गीकृत आँकडो को बहुत मामूली परिवर्तन के साथ मात्रात्मक आधार पर पुन वर्गीकृत किया जा सकता है। बैंक की परिसम्पत्ति का नकदी की मात्रा (नकदी, बैंको से लेनदारी, सयुक्त राज्य बधक, बिकाऊ बधक, अविलम्ब ऋण, पात्र दस्तावेज अ य ऋण, स्थिर सपदा ऋण, स्थिर सम्पदा, और फर्नीचर तथा उपस्कर) के अनुसार सूचीकरण किया जा सकता है। यद्यपि ये वर्ग न्यूनाधिक अनिर्धार्य मात्रात्मक ढग से एक-दूसरे मे भिन्न है तो भी वर्गीकरण वास्तव मे गुणात्मक आधार पर किया जाता है। यदि हम बैंक की परिसम्पत्ति की प्रत्येक मद को नकदी म बदलने मे लगने वाले समय की अवधि के अनुसार पुन वर्गीकृत करना चाहे तो वर्गीकरण मात्रात्मक हो जाएगा। साधारणतया परिसम्पत्ति का क्रम पहले वाला ही होगा, परन्तु कम नकद गुणात्मक श्रेणियो की कुछ विशिष्ट मदें (उदाहरण के तौर पर, कुछ स्थावर सम्पदा तथा स्थावर सपदा ऋण) अपेक्षाकृत कम समय मे नकदी म बदले जा सकेंगे।

तैथिक—तैथिक आँकडे या काल-श्रेणी विभिन्न निर्दिष्ट समयो पर किसी विशेष घटना से सम्बन्धित अको को प्रदर्शित करते हैं। उदाहरणार्थ, किसी स्टाक का प्रतिदिन का समापन मूल्य महीनो या वर्षों की कालावधि के लिए दिखाया जा सकता है, सयुक्त राज्य की जन्मदर कितने ही वर्षो मे से प्रत्येक वर्ष के लिए सूचीबद्ध की जा सकती है; कुछ वर्षों की अवधि के लिए कोयले का मासिक उत्पादन दिखाया जा सकता है। काल-श्रेणियो के विश्लेषण का, जिसमे चक्रीय, आवर्ती (ऋतुनिष्ठ) प्रवृत्ति और अनियमित सचलन का विचार आता है, अध्याय 11 से 16 मे विवेचन किया जाएगा।

कुछ अर्थों मे, काल-श्रेणियाँ मात्रात्मक बटन से इस दृष्टि से कुछ-कुछ मिलती-जुलती है कि किसी श्रेणी का प्रत्येक अगला वर्ष या मास किसी पूर्व सकेत-बिन्दु से एक वर्ष या एक मास आगे हटा दिया जाता है। परन्तु कालावधियाँ—या यो कहिए कि इन अवधियो मे घटित घटनाएँ गुणात्मक दृष्टि से भी परस्पर भिन्न होती है। किसी काल-क्रम मे अको की अनिवार्य व्यवस्था विचाराधीन आँकडो की प्रकृति मे निहित होती है।

यदा कदा किसी काल-श्रेणी को वारवारता-बटन मे भी बदला जा सकता है। यदि एक रेल मार्ग कम्पनी ने प्रति वर्ष बदले गए रेल मार्ग स्लीपरो के अभिलेख रखे हैं तो इन आँकडो से एक काल-श्रेणी बनती है। जब यही सूचना स्लीपर-स्थापन की तिथियो के साथ सलग्न होकर प्रयोग मे आती है तो विभिन्न स्लीपरो का जीवन वारवारता बटन के रूप मे कदाचित् कुछ इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

जीवन-काल	स्लीपरो की सख्या
4 परन्तु 5 वर्ष से कम	2
5 परन्तु 6 वर्ष से कम	5
6 परन्तु 7 वर्ष से कम	17
आदि	आदि

भौगोलिक —भौगोलिक बंटन अनिवार्यत एक प्रकार का गुणात्मक बंटन है, परन्तु इसे प्राय एक पृथक् वर्गीकरण माना जाता है। यदि सयुक्त राज्य के प्रत्येक राज्य की जनसख्या प्रकट की जाए तो हमारे पास भौगोलिक दृष्टि से वर्गीकृत आँकडे होगे। यद्यपि किन्ही दो राज्यो मे गुणात्मक भिन्नता भी होती है, तो भी जो भेद किया जाता है वह इतना गुण का नही जितना स्थिति का होता है। भौगोलिक दृष्टि से वर्गीकृत आँकडे सारणी 3 1 और चार्ट 6 19 से 6 22 मे दिखाए गए हैं।

कभी-कभी भौगोलिक बटन को वारवारता-बटन के रूप मे रखा जा सकता है। इस प्रकार यदि हमारे पास आयोवा के प्रत्येक जिले मे अनाज की प्रति एकड पैदावार के आँकडे हो तो हमारे पास एक भौगोलिक श्रेणी होगी। इन आँकडो को प्रति एकड "10 किन्तु 15 बुशल से कम", "15 किन्तु 20 बुशल से कम", इत्यादि उपज वाले जिलो की सख्या बताकर एक वारवारता बटन के रूप मे रखा जा सकता है।

वर्गीकृत आँकडो की सारणी और लेखाचित्र के रूप मे प्रस्तुति साख्यिकीय आँकडो के विश्लेषण मे केवल एक प्रारभिक पग है। अन्य अनेक प्रक्रियाओ का वर्णन इस ग्रन्थ के अगले पृष्ठो मे किया गया है। साख्यिकीय जाँच प्राय यह पता लगाने का प्रयत्न करती है कि निर्दिष्ट स्थिति मे प्ररूपी क्या है। अत सभी प्रकार की घटनाओ, साधारण और असाधारण दोनो, पर विचार किया जाना चाहिए।

सम्मति बनाते समय अधिकाश व्यक्ति असाधारण घटनाओ से अनुचित रूप मे प्रभावित होने और साधारण घटनाओ की उपेक्षा करने की ओर प्रवृत्त होते हैं। सास्यिकीय या अन्य किसी भी प्रकार की जाँच-पडताल मे असाधारण मामलो का अनुचित प्रभाव बिल्कुल नही पडना चाहिए। बहुत लोगो का मत है कि शीशा टूटने से अनिष्ट होता है। शीशा टूटने पर व्यक्ति की प्रवृत्ति होती है, प्रत्याशित "अनिष्ट" की खोज मे रहना और किसी भी अप्रिय घटना को शीशा टूटने के कारण हुई बताना। शीशा टूटने के बाद यदि कुछ नहीं होता तो स्मरण योग्य कुछ नही रह जाता और इस परिणाम (सभवत सामान्य परिणाम) की उपेक्षा हो जाती है। यदि अनिष्ट हो जाता है तो यह इतना असाधारण होता है कि याद रहता है, और परिणामत विश्वास पक्का हो जाता है। वैज्ञानिक प्रक्रिया मे शीशा टूटने के बाद की सब घटनाएँ सम्मिलित होगी और "परिणाम-स्वरूप होने वाले" अनिष्ट की तुलना शीशा न टूटने पर होने वाले अनिष्ट की मात्रा से की जाएगी।

अत सास्यिकी के विश्लेषण मे सभी प्रकार की घटनाओ को सम्मिलित करना आवश्यक है। यदि हम निमोनिया की घटनाओ की अवधि का अध्ययन कर रहे हैं तो हम औसत अवधि और सभवत इस औसत से नीचे और ऊपर की ओर अपसरण का भी निर्धारण करके प्ररूपी क्या है, इसका अध्ययन कर सकते हैं। इस्पात के कारखाने की गति-विधि दिखाने वाली काल-श्रेणी पर विचार करते समय हम उस श्रेणी के प्ररूपी ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप, उपस्थित सवृद्धि-तत्त्व (प्रवृत्ति) और चक्रीय व्यवहार की ओर ध्यान दे सकते हैं। कभी-कभी यह पता चलता है कि सास्यिकीय आँकडो के दो समूहो मे सबद्ध होने की प्रवृत्ति है। अध्याय 19 मे यह सकेत किया गया है कि झींगुरो की चीं-चीं की द्रुतता और तापमान सम्बद्ध हैं। यदि तापमान बढेगा तो झींगुरो की चीं-चीं की द्रुतता तीव्रतर हो जायेगी, यदि तापमान घटेगा तो चीं-चीं की द्रुतता भी धीमी होगी। यह सम्बन्ध गणितीय ढग से व्यक्त किया जा सकता है और हम तापमान से झींगुरो की चीं-चीं की द्रुतता का अनुमान लगा सकते हैं, या इसके विपरीत, चीं-चीं की द्रुतता के आधार पर हम तापमान का अच्छा अनुमान कर सकते है।

कभी-कभी सास्यिकीय जांच सम्पूर्ण हो सकती है और उसमे सभी सभव घटनाएँ सम्मिलित हो सकती हैं। परन्तु प्रायश एक छोटे वर्ग या प्रतिदर्श का अध्ययन आवश्यक होता है। यदि जीवन-बीमा के लिए वकीलो के व्यय के अध्ययन की हमारी इच्छा है तो सयुक्त राज्य अमरीका के सभी वकीलो को सम्मिलित करना कदाचित् ही सभव होगा। प्रतिदर्श का सहारा लेना जरूरी है, और यह अनिवार्य है कि प्रतिदर्श सम्पूर्ण वर्ग का अधिकतम सभव प्रतिनिधि हो ताकि हम सम्पूर्ण समष्टि के लिए अपेक्षित परिणामो के सम्बध मे सन्तुलित अनुमान लगाने मे समर्थ हो सकें। प्रतिदर्श का चयन करने की समस्या का अगले अध्याय मे विवेचन किया गया है। अध्याय 24, 25, और 26 में यह निर्धारित करने का प्रयत्न किया गया है कि प्रतिदर्शों से प्राप्त परिणामो पर कितना निर्भर किया जा सकता है।

कभी-कभी सास्यिकी-विद् को पूर्वानुमान करना पडता है। उसे एक वर्ष बाद मोटर गाडी के टायरो की बिक्री या आगामी कुछ वर्षों की जनसख्या का पूर्वानुमान करना पड सकता है। कुछ वर्ष पहले लेखको के एक वर्ग की कक्षा के ग्रीष्मकालीन सत्र मे एक विद्यार्थी दिखाई पडा और उसने निजी वार्तालाप म घोषित किया कि उसने एक ही उद्देश्य

से वह पाठ्यक्रम लिया है ताकि वह ऐसा सूत्र प्राप्त कर सके जिससे वह कपास के मूल्य का पूर्व-कथन कर सके। उसके अपने लिए तथा उसके मालिको के लिए कपास के मूल्यो की कुछ अग्रिम जानकारी प्राप्त करना महत्त्वपूर्ण था क्योंकि वह संस्था बहुत बडी मात्रा मे कपास खरीदती थी। खेद की बात है कि उस नवयुवक को भ्रान्ति-मुक्त होना पडा। हमारी जानकारी के अनुसार पूर्वानुमान के कोई ऐन्द्रजालिक सूत्र नही हैं। इसका यह तात्पर्य नही कि पूर्वानुमान करना असभव है, अपितु इसका अर्थ यह है कि पूर्वानुमान करना एक जटिल प्रक्रिया है सूत्र जिसका केवल एक छोटा-सा भाग है। इसके अतिरिक्त पूर्वानुमान अनिश्चित और खतरनाक है। भविष्य म क्या होगा ऐसा कहने का प्रयत्न करने के लिए, पूर्वानुमान के विषय की पूरी पकड उससे सबधित क्षेत्रो की प्रगति के प्रत्येक क्षण का ज्ञान, और पूर्वानुमान करने की किसी भी यात्रिक विधि की सीमाओ की पहचान आवश्यक है। पूर्वानुमान सबधी अतिरिक्त टिप्पणियाँ अध्याय 22 म मिलेंगी।

व्याख्या – किसी जाँच का अन्तिम पग प्राप्त आँकडो की व्याख्या है। विश्लेषण से कौनसे परिणाम निकल रहे है? आँकडे हम कौनसी ऐसी बाते बताते हैं जो नई हैं अथवा जो पूर्व मूल कल्पनाओ को पुष्ट करती है या उनके बारे मे सन्देह उत्पन्न करती है? मूल सामग्री की परिसीमाओ को ध्यान मे रखते हुए परिणामो की व्याख्या करनी चाहिए। ऐसे आँकडो से जो स्वय सन्निकट मान मात्र है बहुत सुनिश्चित निष्कर्ष नही निकाले जाने चाहिएँ। परन्तु अन्वेषक के लिए यह आवश्यक है कि वह अपने आँकडो के सभी उपयोगी और प्रयुक्त अर्थों का पता लगाए और उनका स्पष्टीकरण करे।

कुछ अनुपयुक्तताएँ

अन्वेषक को अपनी सामग्री के सब सभव दुरुपयोगो से बचने के लिए निरन्तर सावधान रहना चाहिए। असगत और असावधान तर्क या आँकडो के अनुपयुक्त प्रयोग से ऐसे अध्ययन का महत्त्व नष्ट हो जाएगा जो प्रारभिक अवस्थाओ म प्राविधिक दृष्टि से स्वीकार्य हो सकता था। सदोष प्रक्रियाओ के कुछ उदाहरणो से यह बात स्पष्ट हो सकेगी। पुस्तक के बाद के अध्यायो म कही कही अन्य दोषो का उनसे सबधित विधियो के सबध मे उल्लेख किया गया है।

पूर्वग्रह—अन्वेषक म पूर्वग्रह की उपस्थिति स्पष्ट ही उसके सम्पूर्ण उपक्रम को अविश्वस्त बनाने के लिए पर्याप्त है। पूर्वग्रह सबोध या जानबूझ कर हो सकता है; ऐसी दशा मे यह जालसाजी का पर्यायवाची होगा। इस प्रकार की सांख्यिकीय अनुपयुक्तता का एक बहु-प्रचारित उदाहरण साम्यवादी चीन मे रेल गाडी के एक कर्मीदल से सबधित है जिसने एक वर्ष बिना किसी बडे पुनर्कल्पनो के और बहुत कम ईंधन की खपत के साथ आभासत बहुत लम्बा सुरक्षित सफर किया। बाद मे पता चला कि अनेक दुर्घटनाएँ हुई थी, गुप्त रूप से मरम्मत की गई थी और पुन ईंधन भरा गया था।[1]

दूसरी ओर अनभिप्रेत पूर्वग्रह क्रियाशील हो सकता है, और यह सभवतः अधिक खतरनाक है, क्योंकि अन्वेषक स्वय इससे अनभिज्ञ हो सकता है। यह एक सार्वदेशिक

1. देखिये सिडनी क्लेन, "ए नोट आन स्टैटिस्टिकल टैक्नीक्स इन कम्युनिस्ट चाइना", दि अमेरिकन स्टैटिस्टीशियन जून 1959, पृष्ठ 18—21, व्याप्त।

सिद्धान्त प्रतीत होता है कि व्यक्ति अपने सर्वाधिक अनुकूल तथ्यो की व्याख्या करते हैं और उन्हे स्मरण रखते है। एक जापानी साहित्यिक गौरव ग्रथ रेशोमोन जिसका अनेक भाषाग्रो मे अनुवाद हुआ है इस स्पष्ट मानवीय लक्षण पर आधारित है। यही कारण है कि बहुत से मुकदमे एक ही घटना के अत्यन्त भिन्न वर्णन के कारण होते है, जो सच्ची मत-भिन्नताओं पर आधारित रहते है।

जैसा कि हम अगले अध्याय मे देखेंगे, सांख्यिकीय आँकडे कोरी हवा मे से नही पकडे जा सकते, जैसे जादूगर अनायास अगुलियो के अग्रभाग से सिक्को का निर्माण करता हुआ प्रतीत होता है। यह प्रक्रिया ऐसी है जिसमे सावधानी और ब्यौरे पर ध्यान देना अपेक्षित है। प्राप्त होने पर आँकडो का उपयोग होना चाहिए और उनकी अकस्मात् उपेक्षा नही होनी चाहिए। किसी एक लेखक के सबध मे एक समीक्षक के कथन पर ध्यान दीजिए

> ब्लैन्क अध्यवसायी और निर्भीक है। क्या इससे पूर्व किसी विषय पर आँकडे एकत्र किए गए है ? उसने अधिक और बहतर आँकडे इकट्ठे किए है। यदि अपनी मूल-भूत प्रकृति के कारण उन्हे चार्टो मे नही रखा जा सकता तो भी उसने उनके चार्ट बनाए है ..कभी-कभी स्वय कालक्रम उसके हाथो मे बिगड जाता है। यदि *उसके उदाहरण एक या दो शताब्दी आगे-पीछे रखने पडे तो ब्लैन्क तर्क की खातिर* अपने आँकडो और चार्टो को भी भूल सकता है।

महत्वपूर्ण कारक की लुप्ति—*मोटर गाडियो के लिए पूर्ण रूप से धातु की छत* चालू करने के कुछ देर *बाद किसी निर्माता कम्पनी को यह सिद्ध करने की आवश्यकता* अनुभव हुई कि पूर्ण रूप से धातु की छतो के परिणामस्वरूप कारो के अन्दर अधिक गर्मी नही होती। उन्होने एक परीक्षा का सुझाव दिया जिसमे तीन बातें थी

1 *लगभग 8 इच वर्ग का* एक उच्च कोटि के कपडे का टुकडा लीजिए। उस कपडे के नीचे उसी आकार का अस्तर लगाइये और अस्तर के नीचे एक थर्मामीटर रखिए।

2 लगभग 8 इच वर्ग का एक अत्यधिक परिष्कृत बहुत बढिया इस्पात का टुकडा लीजिए। उसके नीचे उसी आकार के $\frac{1}{4}$ इच मोटे फैल्ट और अस्तर के टुकडे लगाइये तथा अस्तर के नीचे एक थर्मामीटर रखिए।

3 ऊपर के प्रत्येक उपकरण को कमरे के तापमान पर एक तख्ते पर रखिए। *फिर इस समस्त उपकरण को बाहर गर्म धूप मे ले जाइए। लगभग 10* मिनट तक इसे वही धूप मे रहने दीजिए और तब दोनो थर्मामीटरो का तापमान पढिए।

उपर्युक्त प्रयोग की कठिनाई यह है कि पाठक को सुझाव के चरण 2 मे *अत्यधिक परिष्कृत* इस्पात के टुकडे का प्रयोग करने के लिए कहा गया है। मोटर गाडियो की छतो पर रोगन होता है। अत वे *अत्यधिक परिष्कृत* इस्पात की अपेक्षा अधिक गर्मी सोखती है। परीक्षा के इस स्पष्ट दोष से प्रयोग निरर्थक हो जाता है, यद्यपि कपडे की छत वाली कार की अपेक्षा धातु की छत वाली कार अतिरिक्त ऊष्मा रोधन से वास्तव मे अधिक ठण्डी बन सकती है।

असावधानी—गलतियाँ जीवन का अनिवार्य अंग हैं। परन्तु असावधानी कम से कम होनी चाहिए। एक लेखक की पत्नी ने देवदारु की संग्रह-पेटी का आकार पूछने के लिए एक बड़े विभाग स्टोर को लिखा। उत्तर में कहा गया, "यह माल 3" × 1" × 1½" आकार में प्राप्य है।"

हममें से बहुतों को बिना पत्र के बन्द लिफाफे या संदेश वाले स्थल पर बिना कुछ लिखे पोस्ट कार्ड प्राप्त हुए हैं, और हममें से बहुत से संयोगवश दुकानदार को उसका बिल बिना चैक या हस्ताक्षर-रहित चैक के साथ भेज देने के दोषी होते हैं।

एक दुकानदार ने एक प्रकार के मांस का 49 सेन्ट प्रति पाउंड का भाव विज्ञापित किया। उसके एक भण्डार में नौ पैकेट थे जिनमें से प्रत्येक पारदर्शक पदार्थ से लिपटा हुआ था और प्रत्येक पर प्रति पाउंड मूल्य (49 सेन्ट), वजन और उस टुकड़े के मूल्य की पर्ची लगी हुई थी। तीन पैकेटों पर निम्न चिह्न अंकित थे 3 पाउंड 9¾ आउन्स, 2.92 डालर, 4 पाउंड 15¾ आउन्स, 4.05 डालर, 4 पाउंड 12¼ आउन्स, 3.86 डालर। इन मूल्यों को उनके वजन से भाग करने पर पता चलेगा कि यह मूल्य 81 सेन्ट प्रति पाउंड की दर से था जो उस समय उस प्रकार के मांस के प्रचलित मूल्य से कहीं अधिक था। कई मास उपरान्त उसी दुकानदार के यहाँ मांस के अन्य प्रकारों पर भी उसी प्रकार गलत मूल्य लगे देखे गए। अतः संभवतः इस उदाहरण को 'असावधानी' से भिन्न किसी अन्य शीर्षक के अन्तर्गत रखना चाहिए।

अघटित परिणाम—एक साप्ताहिक समाचार-पत्रिका ने जिसका प्रसार स्वस्थ ढंग से बढ़ रहा था एक विशेष वर्ष के लिए यह प्रदर्शन करना चाहा कि उसके पाठक उसकी खपत से कहीं अधिक हैं। अपनी खपत के आँकड़े दिखाने के बाद पत्रिका ने लिखा "और भूतपूर्व डिप्टी पुलिस कमिश्नर के अनुसार जिसने सात विभिन्न नगरों या कसबों में क्रेताओं के घरों से अपने आदमियों द्वारा यादृच्छिक उठाई हुई प्रतियों पर 2,16,948 अंगुलियों के निशान गिने और पहचाने इनमें से प्रत्येक क्रेता 3.26 पृष्ठानुपृष्ठ पाठकों का प्रतिनिधित्व करता है।' अन्वेषक यह कैसे जान सका कि अंगुलियों के निशान पृष्ठानुपृष्ठ पाठकों के थे? *अथवा, क्या उसे प्रत्येक अंगुली का निशान प्रत्येक पृष्ठ पर मिला* और यदि ऐसा हो भी तो क्या इससे यह सिद्ध होता है कि प्रत्येक पृष्ठ पढ़ा गया था? क्या आप कभी वास्तव में कोई पत्रिका पृष्ठानुपृष्ठ पढ़ते हैं?

अतुलनीय आँकड़े—एक वर्ष समाचार पत्रों में अमरीका के अस्थि-संबंधी प्रसूति-शिक्षा के कालेज की एक सभा का संवाद छपा, जिसमें महानगर के एक समाचार-पत्र ने समाचार दिया कि एक डाक्टर ने कहा कि अस्थि चिकित्सकों द्वारा प्रसूति काल में देखरेख की जाने वाली माताओं में मृत्यु का अनुपात अन्य चिकित्सकों की अपेक्षा आधे से भी कम है। अन्य चिकित्सकों द्वारा प्रसूति-काल में देखरेख की जाने वाली माताओं में मृत्यु की ऊँची दर के कारण संवेदनाहारियों के अत्यधिक प्रयोग प्रसव वेदना में अवरोध और यांत्रिक विधियों पर अत्यधिक निर्भर बताए गए। 14,000 अस्थि संबंधी प्रसव केसों के एक सर्वेक्षण से मातृ मरण दर 2.8 प्रति हजार प्रसव का पता चलना बताया गया। इस गणना की तुलना राष्ट्र की औसत 6 से अधिक प्रति हजार से की गई। यह स्पष्ट होना चाहिए कि समस्त देश के लिए औसत दर सामान्य चिकित्सकों द्वारा परिचर्या किए गए प्रसव के केसों की दर का प्रतिनिधित्व नहीं करती क्योंकि बहुत से प्रसव केस चिकित्सकों की देखरेख में नहीं होते।

एक छोटी सस्ती कार के निर्माता इस बात पर बल दे रहे थे कि उनकी कार के आने से बहुत सी पुरानी कारो के क्रेता नई कार के स्वामियो मे बदल गए थे। परिचालन की लागत के सबध मे उन्होने बताया कि "कार के स्वामी एक गैलन गैसोलिन के प्रयोग *से 35 मील तक की रिपोर्ट देते हैं जो एक पुरानी कार द्वारा प्राप्त औसत मीलो की* तुलना मे कम आय वाले वर्ग के लोगों के लिए बडे महत्त्व की बचत है।" एक प्रकार की कार के अधिकतम मीलो की दूसरे प्रकार की पुरानी कारो की औसत मीलो से तुलना करना निस्सन्देह अनुचित है।

साहचर्य और कारणता की संभ्रान्ति—कभी-कभी ऐसे कारक जो सहचारी हो, गलती से कारणत सबधित मान लिए जाते है। एक दक्षिणी मौसम-विज्ञ ने खोज की कि अनाज के मूल्य मे गिरावट का परागज ज्वर की प्रचडता से वैपरीत्य सबध है। इसका यह तात्पर्य नही कि अनाज की कम कीमत परागज ज्वर मे प्रचण्डता उत्पन्न कर देती है, न ही इसका यह अर्थ है कि परागज ज्वर के गभीर मामलो से अनाज का मूल्य गिर जाता है। अनाज का मूल्य साधारणत. उस समय कम होता है जब कि अनाज की फसल अधिक हुई हो। जब मौसमी स्थितियाँ अनाज की अच्छी फसल के लिए अनुकूल रही हो तो वे काटेदार घास-पात की अच्छी फसल के लिए भी अनुकूल रही होगी। इस प्रकार अनाज के मूल्य की गिरावट और परागज ज्वर के रोगियो के कष्टो मे से प्रत्येक का कारण (कम से कम आशिक रूप मे) मौसम मे ढूंढा जा सकता है, परन्तु ये दोनो एक दूसरे पर सीधे निर्भर नही है। साहचर्य और कारणता की और अधिक चर्चा अध्याय 19 मे की गई है।

साहचर्य की कारणता मे सभ्राति का एक दूसरा दृष्टान्त एक अनुसधान सस्था के वक्तव्य से प्राप्त हुआ जिसने वार्षिक आंकडो का अध्ययन करने के बाद कहा, "जब खेती की आय बढती है तब कारखानो के वेतन-चिट्ठे भी निरपवाद रूप से उसका अनुसरण करते है, परन्तु वे वृद्धि का नेतृत्व नही करते। एक कारण है, दूसरा कार्य।" यदि इस प्रकार का क्रम है ही तो इसे वार्षिक आंकडो से कदाचित् ही प्रदर्शित किया जा सकता है। यदि कारखानो के वेतन-चिट्ठे खेतो की आय का अनुसरण करते है तो हमे इस तथ्य को मासिक आँकडो का नक्शा बना कर दिखाना चाहिए जैसा कि अन्य श्रेणियो के लिए चार्ट 22 9 और चार्ट 22 10 मे दिखाया गया है। कारण के सबध के बारे मे यह काफी स्पष्ट है कि जब खेतो की आय मे वृद्धि (या कमी) का कारखानो के वेतन-चिट्ठा पर तदनुरूप प्रभाव पडता ही है तो वेतन-चिट्ठों का भी खेतो की आय पर पारस्परिक प्रभाव पडता है। *इसके अतिरिक्त ये दोनो किन्ही अन्य कारको पर भी निर्भर रहते हैं जो* साधारण व्यापार के रूप को प्रभावित करने मे प्रवृत्त होते है।

अपर्याप्त आंकडे—अपर्याप्त आंकडो से उद्भूत किसी निष्कर्ष के सबध मे अत्यन्त अनिश्चितता रहती है। एक बहुत छोटा प्रतिदर्श हमे ठीक निष्कर्ष पर ले जा सकता है, परन्तु हम अपने निष्कर्ष पर बहुत अधिक अश मे विश्वास नही कर सकते। जब कोई डाक्टर एक नया इलाज विकसित कर रहा हो तो वह कतिपय व्यक्तियो पर प्रयोग करने के बाद ही उसकी अमोघता की घोषणा नही कर देता। उसके पास पर्याप्त आँकडे होने चाहियें ताकि वह परिणामो के सम्बन्ध मे अपेक्षाकृत निश्चित हो सके। यदि दो या तीन व्यक्तियो पर उसके इलाज का अनुकूल प्रभाव पडता है तो उसका यह दावा करना निरापद नही हो सकता कि वे घटनायें सयोगवश नही थी। इन कुछेक की अनुकूल अनुक्रिया इलाज के बिना ही या इसके बावजूद हो सकती है। वास्तव मे, एक ऐसा "नियत्रण" वर्ग होना चाहिए

जिसमें यह दिखाया जा सके कि ऐक्टिनिया की इलाज के बिना या आम इलाज से कैसी अनुक्रिया होगी। साथ ही नियत्रण वर्ग और चिकित्सित वर्ग दोनो काफी बडे होने चाहियें ताकि उनसे दोषमुक्त निष्कर्ष निकाला जा सके। प्रतिदर्शों से परिकलित मूल्यों की विश्वस्तता की चर्चा अध्याय 24 से 26 मे दी गई है।

अप्रातिनिधिक आंकडे—निष्कर्ष ऐसे आंकडो पर आधारित हो सकते हैं जो सख्या मे पर्याप्त हों परन्तु जो प्रातिनिधिक न हों। एक छोटा प्रतिदर्श प्रातिनिधिक हो सकता है, दूसरी ओर एक बडा प्रतिदर्श प्रातिनिधिक नही भी हो ऐसा हो सकता है।

अप्रातिनिधिक आकडो पर आधारित निष्कर्ष का एक चिरप्रतिष्ठित उदाहरण, जिस पर साहित्य मे दीर्घकाल से जोर दिया गया, 1936 के राष्ट्रपति के चुनाव का लिट्रेरी डाइजेस्ट द्वारा किया गया पूर्वानुमान है। डाइजेस्ट ने 1,00,00,000 से अधिक अराजकीय मतपत्र भेजे। इनम से 23,76,523 वापिस आए और उनसे सकेत मिला कि लैन्डन को 370 और रूजवेल्ट को 161 चुनाव मत पडेंगे। अन्तिम चुनाव परिणामो मे रूजवेल्ट को 523 और लैन्डन को 8 चुनाव मत प्राप्त हुए। कठिनाई यह थी कि मत-गणना के लिए आधार-रूप मे प्रयोग की गई डाक सूचियो म ऊँची आर्थिक स्थिति वाले व्यक्तियो की अपेक्षाकृत अधिक बहुतायत थी और इस प्रकार वे मतदान करने वाली समस्त जनता का प्रतिनिधित्व नही करती थी।

अप्रकट वर्गीकरण—कभी-कभी साख्यिकीय आंकडो से निकाले गए निष्कर्ष इसलिए ठीक नही होते क्योंकि एक अप्रकट वर्गीकरण की उपस्थिति की ओर ध्यान नही दिया गया। आत्महत्याओं के एक अध्ययन मे इस प्रकार के अप्रकट वर्गीकरण की उपस्थिति पाई गई। आंकडो मे ऐसा लगता था कि कुछ विशिष्ट धार्मिक वर्गों मे अन्य वर्गों की अपेक्षा आत्महत्याओ की अधिक सम्भावना है। और अधिक विचार करने पर यह प्रकट हुआ कि आत्महत्याओं के शहरी या ग्रामीण क्षेत्रो म घटित घटनाओं के मामले की ओर ध्यान नही दिया गया था। निष्कर्ष, यह नही कि आत्महत्याओं की प्रवृत्ति निर्दिष्ट धार्मिक वर्गों से सम्बन्धित होने की है, बल्कि यह होना चाहिए था कि आत्महत्यायें शहरी इलाकों मे अधिक प्रचलित है और ये धार्मिक वर्ग भी शहरों मे अधिक सख्या म है।

इकाइयो की व्याख्या का अकरण—मोटर गाडी या ड्राइवर के लायसेंस के नवीकरण के साथ प्रत्येक मोटर गाडी वाले को दी गई एक पुस्तिका मे एक राज्य के मोटर गाडी कमिश्नर ने इस तथ्य की ओर ध्यान दिलाया कि 26 वर्ष पूर्व "मील मरण दर" 23 6 थी जबकि उसी समय समाप्त हुए वर्ष मे "मील मरण दर" 4 2 थी। इस बात की कोई व्याख्या प्रस्तुत नही की गई थी कि यह राज्य की सडको की प्रति मील—या प्रति हजार मील—मृत्यु सख्या थी, अथवा वर्ष के दौरान मोटर गाडी के प्रति सौ, प्रति हजार या प्रति दस लाख मील सफर की मृत्यु सख्या थी। निश्चय ही यह प्रति मील मोटर-सफर के पीछे मृत्यु-सख्या न थी, यद्यपि सरसरी तौर पर पढने पर ऐसा ही प्रतीत होता था। पूछताछ करने पर पता चला कि मृत्यु सख्या का यह अनुपात सडक पर प्रति दस करोड मील मोटर-सफर का था। राज्य मे वर्ष भर मे बिके गैसोलिन के गैलनों की सख्या को 13 12 से, जो प्रति गैलन मीलो की औसत थी, गुणा करके मील-दूरी प्राप्त की गई थी। प्रसगवश, इस औसत की यथार्थता के सम्बन्ध मे और यह कैसे प्राप्त की गई इस बारे मे किसी को भी आश्चर्य हो सकता है। हाँ, गैसोलिन की बिक्री राज्य के कर-वृत्तों से प्राप्त थी।

कुछ विकासशील देशो मे, केन्द्रीय सरकार द्वारा इकाइयो की स्पष्ट व्याख्या करने की विफलता के कारण, एक ही क्रिया मे प्रयुक्त विभिन्न विधियो मे पर्याप्त भिन्न परिणाम निकले है। उदाहरणार्थ, साम्यवादी चीन मे, वर्षों तक, सामूहिक सस्थाओ और कम्यूनो के "सचय" के तथा कुल सामूहिक एव कम्यून आय के मुकाबले उपभोग के अनुपात निकालने के लिए सामूहिक सस्थाओ और कम्यूनो मे कम से कम तीन विभिन्न विधियाँ साथ साथ प्रयुक्त की गई। एक बार एक लेखक ने एक विशिष्ट कम्यून के हिसाब-किताब पर ये तीनो विधियाँ लागू की और वह विकल्प से 27 प्रतिशत, 40 प्रतिशत, तथा 48 प्रतिशत के "सचय" अनुपातो पर पहुँचा।[2]

भ्रामक योग—हममे से जो समाचार-पत्र के खेल सम्बन्धी पृष्ठो को पढते हैं, उन्होने सभवत प्रत्येक शरद् काल मे इस आशय का वक्तव्य देखा होगा कि अभी समाप्त हुई बेसबाल ऋतु मे हजार—या लाख—की एक निश्चित सख्या मे शौकीनो ने स्वदेशी टीम का खेल देखा। उदाहरणतया, यह कहा गया कि एक बेसबाल ऋतु मे न्यूयार्क के अमरीकनो के स्वदेशी खेलो मे 15,38,007 शौकीन दर्शक उपस्थित रहे। यह गणना प्रत्येक स्वदेशी खेल देखने वाले व्यक्ति की सख्या को जोडकर प्राप्त की गई। जैसा कि असावधानी से बहुधा कहा या सूचित किया जाता है, यह गणना 15,38 007 शौकीनो का प्रतिनिधित्व नही करती, वरन् प्रवेश की निर्दिष्ट सख्या को व्यक्त करती है, जबकि बहुत से व्यक्तियो ने एक से अधिक खेल देखे।

बहुत कुछ इसी प्रकार का अर्थहीन परन्तु प्रभावपूर्ण लगने वाला योग एक उद्यान-सस्था द्वारा प्रस्तुत विवरण मे उपस्थित था जिसने हाल ही मे एक अन्य उसी प्रकार की कम्पनी खरीदी थी। यह कम्पनी भी दो अन्य सस्थाओ के हाल ही के विलय का प्रतिनिधित्व करती थी। विवरण इस आशय का था कि उनका बागबानी के सयुक्त अनुभव का योग अब 295 वर्ष है। यह गणना तीनो कम्पनियो की आयु को जोडकर प्राप्त की गई थी।

निकृष्ट रूप से अभिकल्पित प्रयोग—कोई प्रयोग सार्थक सिद्ध हो इसके लिए यह इस प्रकार से अभिकल्पित[3] होना चाहिए कि जो परिणाम निकले हैं, विचाराधीन कारको के अतिरिक्त उनके अन्य कारण न हो सकें। निम्नलिखित उदाहरण का पुन दूसरे सदर्भ मे अध्याय 25 के अन्त मे जिक्र किया जाएगा। बहुत वर्ष पूर्व जब प्रतिदीप्त प्रकाश व्यवस्था पहले पहल चालू हुई तो कुछ लोगो का विश्वास था कि जो व्यक्ति इस प्रकाश के विकिरण मे रहेंगे वे वन्ध्य हो जायेंगे। एक रेल मार्ग पर पहले ही प्रतिदीप्त बत्तियाँ लग चुकी थी और इस विश्वास को बदलने की आशा से उन्होंने एक प्रयोग किया जिसमे चूहो का एक समूह तापदीप्त प्रकाश मे तथा दूसरा प्रतिदीप्त प्रकाश मे रखा गया। निश्चित कालावधि के उपरान्त पहले समूह के बच्चे सख्या मे सदा की भाँति हुए जबकि दूसरे समूह का कोई बच्चा न हुआ। एक सशयालु व्यवस्थापक ने कहा कि चूहो के दूसरे समूह की ध्यान से पुन परीक्षा की जाए और यह पता चला कि उस समूह के सभी चूहे

2 सिडनी क्लेन, "सम एस्पेक्ट्स आफ चाइनीज, कम्युनिस्ट स्टैटिस्टिक्स," एशियाई अध्ययनो की सस्था, शिकागो के सम्मुख प्रस्तुत प्रपत्र, मार्च 29 1961, पृष्ठ 11—14, अप्रकाशित।

3 सी० सी० लो, *इन्ट्रोडक्शन टु इक्सपेरिमेन्टल स्टैटिस्टिक्स* मे प्रायोगिक अभिकल्प का एक विवेचन प्राप्त है। मेक ग्रा हिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क, 1964। साथ ही देखिये डी० जे० फिन्नी, *एन इन्ट्रोडक्शन टु दि थीअरि ऑफ एक्सपेरिमेन्टल डिजाइन*, शिकागो युनिवर्सिटी प्रस, 1960।

समान लिंगी थे। यह एक प्रारम्भिक बात है कि दोनो समूहो मे नर-मादा की सख्या समान होनी चाहिए *थी*।

अनुसंधान विधियाँ

यह कल्पना नही करनी चाहिए कि साख्यिकीय विधि ही अनुसधान मे प्रयोगार्थ एकमात्र विधि है, न ही इस विधि को प्रत्येक समस्या का सर्वोत्तम हल मानना चाहिए। जिस प्रकार बढई के पास भिन्न-भिन्न प्रकार के कार्य के लिए उपयोगी विभिन्न औजार होते है, उसी प्रकार अनुसधायक विभिन्न तकनीको का लाभ उठा सकता है जो उसके *व्यवसाय के औज़ार है और जिनमे से प्रत्येक एक विशिष्ट प्रकार की स्थिति के लिए* उपयुक्त है। यदि कोई अव्यवसायी बढई छेनी के स्थान पर पेंचकस का प्रयोग करता है तो परिणाम कर्मकार के अनुरूप या सन्तोषजनक होने की सभावना नहीं है। इसी प्रकार यह महत्त्वपूर्ण है कि अनुसधायक प्रारभ मे ही अपनी समस्या पर ध्यानपूर्वक विचार करे और उस तकनीक या उन तकनीको का प्रयोग करे जो उस समस्या के उपयुक्त हो। जैसे किसी *कार्य को पूर्ण करने मे* बढई को एक से अधिक औजारो के प्रयोग की आवश्यकता होती है, वैसे ही अनुसधायक को प्राय एक नही, बल्कि कई विधियों[4] का बहुधा प्रयोग करना पडता है।

जब प्रत्येक अध्ययनगत व्यक्ति या घटना के सबध मे बहुत कुछ जानकारी प्राप्त करने की हमारी इच्छा होती है तो हमारे बहुत से आँकडे प्रकृत रूप से अमात्रात्मक हो सकते है। ऐसी स्थिति मे हम अनुसधान की *व्यक्ति या घटना-अध्ययन* की विधि का प्रयोग करते हैं जिसका उद्देश्य होता है अध्ययनरत व्यक्ति या घटना की निजी विशेषताओ पर विस्तार से मनन करना और इस प्रकार के कई विस्तृत अध्ययनो से सामान्यीकरण करना। व्यक्ति या घटना वृत्तो (जैसे मजदूरी, सतान की सख्या, आदि) के अध्ययन से प्राप्त *कुछ जानकारी साख्यिकीय हो सकती है और जब बहुत से वृत्त सम्मिलित किए गए हो तो* उनसे प्राप्त अमात्रात्मक जानकारी के साख्यिकीय साराश बनाए जा सकते है।

यदि रुचि का केन्द्र व्यवहार या अभिवृत्तियो के परिवर्तन है तो नामिका तकनीक का प्रयोग किया जा सकता है। इसमे दो या अधिक अवसरो पर उसी वर्ग के व्यक्तियो से साक्षात्कार किया जाता है। उदाहरण के तौर पर जब उपभोग आदतो और परिवार-*बजटो से सबधित जानकारी प्राप्त की जाती है तो नामिका विधि से मात्रात्मक आँकडे* प्राप्त किए जा सकते हैं जहाँ तक व्यक्ति या घटना-अध्ययनो का सबध है, यदि नामिकाएँ

---

4 सामान्यत गुणात्मक विषयवस्तुओ से सबधित क्षेत्रो से परिमाणात्मक विश्लेषण के प्रयोग के उदाहरणो के लिए एस० ब्राइनगार, "मार्क ट्वेन एन्ड दि क्विटस कुर्टियस स्नाडग्रास लेटर्स ए स्टैटिस्टिकल टेस्ट आफ आथरशिप', जरनल आफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, मार्च 1963, पृष्ठ 85—96, तथा एफ० मास्टैलर एव डी० एल० वैलेस, "इन्फरन्स इन एन आथरशिप प्राबलम", *जरनल आफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन*, जून 1963, पृष्ठ 275—309 देखिए। आर० फर्बर तथा पी० जे० वरडून, *रिसर्च मेथड्स इन ईक्नामिक्स एन्ड बिजनस*, मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क, 1962 तथा एच० हीमन, *सर्वे डिज़ाइन एन्ड अनेलिसिस*, ग्लेनको का फी प्रेस, 1955 मे विभिन्न विधियो का वर्णन है। अनुसधानो को एम० जी० केडाल तथा डब्ल्यू० आर० बलैन्ड, *ए डिक्शनरी आफ स्टैटिस्टिकल टर्म्स*, अन्तर्राष्ट्रीय स्टैटिस्टिकल इस्टीट्यूट यूनेस्को, 1959 भी उपयोगी लगेगी।

काफी बडी हो, तो अमात्रात्मक जानकारी, जैसे सार्वजनिक प्रश्नो पर सम्मतियो, के साख्यिकीय विश्लेषण प्रस्तुत किए जा सकते है ।

कभी-कभी ऐतिहासिक अभिगम से किसी समस्या का हल किया जा सकता है । यद्यपि *ऐतिहासिक विधि* अधिकतर वर्णनात्मक तथा अमात्रात्मक है तथापि जब हम आयातो, निर्यातो, जनसख्या, और अन्य श्रेणियो की वृद्धि या ह्रास पर विचार करते है तो हमे उनके साख्यिकीय पक्ष मिल सकते है।

पुनश्च, *प्रायोगिक विधि* का प्रयोग करना भी उपयुक्त प्रक्रिया हो सकती है । इसमे जिस कारक का हम अध्ययन कर रहे हैं उसी मे किचित् हेरफेर होने दिया जाता है और अन्य कारको मे से अधिकतम को नियत्रित रखने का प्रयास किया जाता है । उदाहरणत , यदि हम कार के टायर पर कार के वजन के प्रभाव का अध्ययन करना चाहते हो कि टायर कितने मील के सफर तक काम दे सकेगा तो हमे सडक की दशाओ, रफ्तार, तापमान, टायर के आकार, रबड और फीते के प्रकार, टायर को फुलाने और अन्य बहुत से कारको पर नियत्रण रखना पडेगा ।

सामाजिक विज्ञानो मे, प्रायोगिक विधि विरले ही लागू की जा सकती है और इसके स्थान पर साख्यिकीय विधि के कुछ पक्षो का प्रयोग किया जाता है । उदाहरणतया, हम जन-समूहो को निर्धारित भोजन पर रहने के लिए बाधित करके और वास्तव मे उनके जीवन के अन्य सभी पक्षो या स्थितियो को समान रखकर जीवन की दीर्घता पर विभिन्न प्रकार के भोजनो के प्रभाव का पता नही लगा सकते । इसके स्थान पर हमे विभिन्न प्रकार का भोजन करने वाले व्यक्तियो के समूहो का पता लगाना होगा और तब हमे, जैसा कि अध्याय 21 मे बताया गया है, उनके जीवन के अधिकतम अन्य पक्षो के महत्त्व को आँकना और साख्यिकीय ढग से नियत्रित करना होगा, क्योकि हम प्रयोगात्मक ढग से उन पर नियत्रण नही रख सकते । प्रयोगात्मक और साख्यिकीय विधियाँ प्रतिपक्षी नही है, वरन् व्यावहारिक दशाओ मे साख्यिकीय विधि प्रयोगात्मक विधि की पूरक होती है । यदि इस प्रकार से प्रयोग किया जा सकता कि *सभी* परिवर्ती *पूर्णतया* नियत्रित रखे जाते तो सभवत आँकडो की आवश्यकता न पडती । अधिक मे अधिक हम अधिक महत्त्वपूर्ण कारको मे से प्राय कुछ को नियत्रित कर सकते है और इस प्रकार यह आवश्यक हो जाता है कि *अन्य गौण विघ्नकारी कारकों के जमघट (जिन्हे कभी-कभी "दैवयोग" की सज्ञा दी जाती है)* के महत्त्व का साख्यिकीय ढग से मूल्याकन किया जाए, जैसा कि अध्याय 24 से 26 मे वर्णन किया गया है ।

कुछ समस्याओ को सुलझाने के लिए *आगमन विधि* की बजाय *निगमन विधि* अपनाई जा सकती है । जब निगमन ढग से एक परिकल्पना स्थापित हो जाय और जब मात्रात्मक आँकडे प्राप्त हो तो साख्यिकी की सहायता से परिकल्पना की आगमन परीक्षा की जा सकती है और इस परीक्षा से परिकल्पना की पुष्टि या अविश्वसनीयता सिद्ध हो सकती है । इसके विपरीत, साख्यिकीय ढग से प्राप्त सबधो से (जैसे, उदाहरणार्थ, कुछ राज्यो मे खेतो के आकार और प्रति एकड भूमि के मूल्य के सबध म कुछ निकट के नकारात्मक साहचर्य की प्राप्ति) कारणात्मक सबधो का आभास हो सकता है जिनका निगमन विधि से सम्पादन किया जा सकता है । पुन हमारे पास दो विधियाँ हैं जो प्रतिरोधी न होकर पूरक है ।

अनुसधान की इन विधियो का पूरक स्वभाव *परिचालन अनुसधान* मे भी प्रतिबिम्बित होता है। यह अपेक्षाकृत नया क्षेत्र विशिष्ट प्रबध समस्याओं पर जो किसी सगठन के भीतर मनुष्यों और मशीनो के प्रयोग के इर्द-गिर्द घूमती है, मात्रात्मक विधियो का अनुप्रयोग करता है। उद्देश्य यह है कि समस्याओं के श्रेष्ठ हल निकाले जाएँ। *परिचालन अनुसधान* मे (जिसे कभी कभी *प्रबध विज्ञान* कहा जाता है) *अर्थशास्त्र और समाजशास्त्र जैसे सामाजिक विज्ञानो के सिद्धातो तथा भौतिकी एव रसायन जैसे* भौतिक विज्ञानो के सिद्धान्तो को प्राय मिलाया जाता है। *परिचालन अनुसधान* मे विशेष महत्त्व एकघातीय कार्यक्रम की गणितीय तकनीक का है जिसमे निवेशो, उपजो, तथा उद्देश्यो का परिमाण पूर्ण रूप से स्थिर किया जाता है।

जाँच का भाव—नियन्त्रित निर्देशित सशयालुता—साख्यिकीय विधि का सार है। जब *साख्यिकी मे प्रशिक्षित व्यक्ति समस्या के निश्चित उत्तर पर नही भी पहुँच सकते,* और *कुछ नही तो वे ठीक प्रश्न पूछने की पर्याप्त जानकारी रखते हैं। साख्यिकीय विधि* के सार तथा विशिष्ट साख्यिकीय तकनीको का अनुप्रयोग करने से साख्यिकी के सबध मे मड़े खटकों—अर्थात् अययार्थताओ का 'झूठ, रफू झूठ, तथा साख्यिकी" के रूप मे वर्गीकरण करना तथा आँकड़े मिथ्या भाषण नही करते बल्कि मिथ्याभाषी चित्रित होते हैं" आदि को प्रचलन कम करने मे सहायता मिलती है।

मुक्त उद्यम तथा आयोजित अर्थव्यवस्था दोनो मे, *विकसित एव अविकसित* देशो मे, साख्यिकीय शिक्षा का मूल्य इस प्रकार से प्रशिक्षित व्यक्तियों को दिए जाने वाले ऊँचे वेतनों मे प्रतिबिम्बित होता है। सयुक्त राज्य अमरीका मे, प्राणी विज्ञान, जनसाख्यिकी, अर्थशास्त्र, शिक्षा, इजीनियरी, स्वास्थ्य एव भेषज, बीमा, बाजार अनुसधान, मनोविज्ञान, तथा समाजशास्त्र के क्षेत्रो मे सरकारी अभिकरण, निजी उद्योग, तथा शैक्षिक सस्थाएँ साख्यिकी प्रशिक्षित व्यक्तियो की सक्रियता से खोज करती है। *1960 के दशक के उत्तर काल मे गणितीय साख्यिकी विद् प्रति वर्ष 20,000 डालर से अधिक कमा रहे थे।* बाद के वर्षों मे नि सदेह इस प्रकार के वेतन बढे है।

2

सांख्यिकीय आँकड़े

जब कोई अन्वेषक एक विषय का अध्ययन प्रारभ करता है तो वह स्वय आँकडे इकट्ठे करने *या पहले से ही प्राप्त प्रकाशित या अप्रकाशित सकलनो मे आवश्यक आँकडे* प्राप्त करने मे मे कोई सी प्रक्रिया चुन सकता है। यदि किसी व्यक्ति या सगठन ने ऐसे विश्वस्त आँकडे तैयार किए है जो उस समस्या से सम्बन्ध रखते है तो वर्तमान जानकारी का प्रयोग करना बहुत कम खर्चीला बैठता है। यद्यपि अपने आँकडे इकट्ठे करना अधिक महँगा है तो भी इस प्रक्रिया से अनुसधायक ठीक वही जानकारी इकट्ठी कर सकता है जो विचाराधीन विशिष्ट प्रश्नो के उत्तर के लिए अपेक्षित है।

सभी पाठको के सामने मौलिक सांख्यिकीय आँकडे इकट्ठे करने की समस्या उत्पन्न नही होगी, बहुतो के लिए जानकारी के निमित्त विद्यमान स्रोतो का आश्रय लेना सम्भव होगा। फिर भी यदि अन्वेषक को सांख्यिकीय आँकडो के सग्रह, सम्पादन, और विन्यास की *प्रक्रिया और प्रच्छन्न सकटो का कुछ ज्ञान हो तो ऐसे स्रोतो से प्राप्त आँकडो का मूल्याकन* और उनका अधिक उत्तम प्रयोग किया जा सकता है।

एक बहुद्धृत उदाहरण यहाँ सगत है हैरोल्ड कॉक्स ने, जब वह एक नवयुवक के रूप मे भारत मे था, एक न्यायाधीश के सामने कुछ भारतीय आँकडे उद्धृत किए। न्यायाधीश ने उत्तर दिया, 'कॉक्स, जब तुम कुछ और बडे हो जाओगे तो तुम इतने आश्वासन के साथ भारतीय आँकडे उद्धृत नही करोगे। सरकार आँकडे इकट्ठे करने के लिए बहुत उत्सुक है—वह आँकडे इकट्ठे करती है, उनका जोड करती है, उनकी n गुणा घात निकालती है, उनका घनमूल निकालती है और अत्युत्तम रेखाचित्र तैयार करती है। परन्तु जो बात तुम्हे कभी न भूलनी चाहिए वह यह है कि उनमे से प्रत्येक आँकडा पहले-पहल गाँव के चौकीदार से *प्राप्त होता है जो केवल अपनी इच्छा के अनुसार जैसा चाहे लिख देता है*।"[1] *यह भी कह* देना चाहिए कि यह कहानी बहुत पहले के भारत की ओर सकेत करती है। आज भारत मे बहुत से योग्य सांख्यिकीविद् और एक सक्रिय सांख्यिकीय सस्था विद्यमान है। सम्भवत स्थानीय सांख्यिकीय जानकारी के स्रोत के रूप मे अब चौकीदार कार्य नही करता।[2]

---

1 इस कहानी का सर्वप्रथम प्रयोग जानकारी के अनुसार सर जोसिया की स्टाम्प *सम ईकनामिक फैक्टर्ज़ इन माडर्न लाइफ*, पी० एस० किंग एण्ड सन, लन्दन, 1929, पृष्ठ 258—259 मे किया गया है।

2 प्रमुख अविकसित क्षेत्रो मे सांख्यिकी की एक सक्षिप्त समालोचकीय समीक्षा के लिए सिडनी क्लेन, "रीसेन्ट ईकनामिक इक्सपीरियस इन इडिया एण्ड कम्युनिस्ट चाइना अनदर इन्टरप्रिटेशन," *अमेरिकन ईकनामिक रिव्यू*, मई 1965, पृष्ठ 31—39 देखिए।

सांख्यिकीय आँकड़ो का संग्रह

संग्रह की विधि—सांख्यिकीय आँकडे बहुत बार एक ऐसी प्रक्रिया से प्राप्त किए जाते हैं जिसके अन्तर्गत गृह स्वामी, व्यापारी या अन्य सूचनादाता से अभीप्सित जानकारी प्राप्त की जाती है। इसके लिए या तो गणनाकार सूचनादाता के पास जाता है, उससे आवश्यक प्रश्न पूछता है और एक अनुसूची में उत्तर लिख लेता है या सूचनादाता के पास प्रश्नो की एक सूची (जिसे कभी-कभी प्रश्नावली कहते हैं) प्रेषित कर दी जाती है जिसका उत्तर वह अपनी सुविधानुसार दे सकता है। प्रत्येक जनगणना के अवसर पर इकट्ठे किए गए आँकडे गणन-प्रक्रिया से प्राप्त किए जाते है जिसके अन्तर्गत गणनाकार संयुक्त राज्य अमरीका में प्रत्येक निवास-स्थान पर जाते है। कभी कभी पंजीकरण द्वारा जानकारी प्राप्त की जाती है, जिसका तात्पर्य यह है कि जब कोई घटना घटती है या उसके कुछ ही देर बाद, उपयुक्त अधिकारी को जानकारी की सूचना दे दी जाती है। इस प्रकार जन्म और मृत्यु का पंजीकरण होना आवश्यक है। बहुत से राज्यो मे मोटर दुर्घटनाओ की सूचना मोटर गाडियो के आयुक्त को देना आवश्यक है।

सामान्य रूपरेखा की दृष्टि से प्रश्नावली भेजकर, *गणना प्रक्रिया और पंजीकरण* द्वारा आँकडे प्राप्त करने की समस्याएँ एकसमान है। हाँ, पंजीकरण की पद्धति मे यह कठिनाई अवश्य है कि बहुत से लोग पंजीकरण की उपेक्षा करेंगे। पंजीयक के लिए निरंतर सतर्क और बार-बार पडताल करते रहना आवश्यक होगा। फिर भी, पंजीकरण अधिकतर उपयुक्त ढंग से पदसज्जित सरकारी अधिकारी के पास कराना पडता है, और प्रायः आँकडे देना विधिक बाध्यता होती है। अधिकतर सांख्यिकीय जानकारी क्योंकि गणना-प्रक्रिया द्वारा या प्रश्नावली भेजकर प्राप्त की जाती है, अत. इस अनुभाग के शेषांश मे इन प्रक्रियाओ से आँकडे इकट्ठे करने की विधियाँ दी जाएँगी।

प्रक्रिया की रूपरेखा—किसी सांख्यिकीय अनुसंधान के सोपानो को, जिसमे आँकडो का संग्रह आता है, निम्न प्रकार से नामोद्दिष्ट किया जा सकता है

1. अध्ययन की योजना बनाना।
2. प्रश्न बनाना और अनुसूची तैयार करना।
3. यदि पूर्ण गणना नही की जानी है तो प्रतिदर्श के प्ररूप का चयन करना।
4. जानकारी प्राप्त करने के लिए अनुसूचियो का प्रयोग करना।
5. अनुसूचियो का सम्पादन करना।
6. आँकडो को सुव्यवस्थित करना।
7. अन्तिम सारणियाँ और चार्ट बनाना।
8. निष्कर्षो का विश्लेषण करना।

विशिष्ट प्रतिदर्श के चयन के निर्णय को प्रथम सोपान मे सम्मिलित कर लेने के अतिरिक्त प्राय सभी सोपानो का यही क्रम रहेगा। हम यहाँ पाठो मे से प्रत्येक सोपान का क्रमशः विवेचन करेंगे।

1 अध्ययन की योजना बनाना—यदि एक प्रकरण का सांख्यिकीय ढंग से अध्ययन करना है तो अनुसंधायक के लिए प्रारम्भ से ही दूसरो के इस क्षेत्र मे किए गए पूर्व कार्य से

परिचित होना आवश्यक है। हो सकता है कि उसे यह पता लगे कि पहले ही उसी प्रकरण का किसी अन्य व्यक्ति के द्वारा परीक्षण किया जा चुका है और उसके प्रश्नो का पहले ही उत्तर मिल चुका है। वह अपना अध्ययन इस ढग से व्यवस्थित करन का विचार कर सकता है ताकि इसकी इससे पूर्व के अध्ययनो से तुलना की जा सके। निस्सदेह वह दूसरो के अनुभव और भूलो से लाभ उठाएगा। उसे यह भी पता चल सकता है कि उसके प्रकरण के अनुसधान मे इतनी बडी कठिनाइयां है कि वे अलघ्य है, व्यय बहुत अधिक हो सकता है, अथवा यह प्रतीत हो सकता है कि जानकारी देने वाले उस प्रकार की जानकारी को प्रकट करना नही चाहते जिसकी आवश्यकता है।

दूसरे क्या कुछ कर चुके है यह अध्ययन कर चुकने के उपरात अनुसधायक उन सामान्य पक्षो पर विचार करने को तैयार रहता है जो वह जानना चाहता हो। यदि रोजगार और बेरोजगारी के अध्ययन की प्रायोजना हो तो प्रत्येक व्यक्ति से सबधित बहुत-सी पूछताछ सगत होगी। कुछ अधिक महत्त्व की पूछताछ का सुझाव नीचे दिया जाता है

क्या व्यक्ति के कोई आश्रित है ? कितने है ?

व्यक्ति पुरुष है या स्त्री ?

उसकी वैवाहिक स्थिति क्या है ?

व्यक्ति की आयु क्या है ?

उसकी औपचारिक शिक्षा कितनी है ?

क्या उसके पास सम्पत्ति है ?

उसका साधारण काम-धन्धा क्या है ? किस उद्योग मे है ?

इस समय वह किस प्रकार का कार्य कर रहा है ? (यदि अध्ययन ब्यौरेवार हो तो व्यक्ति के विगत कई वर्षो के धन्धो के अनुभव और उनमे प्राप्त मजदूरी की सूची बनाने की ओर ध्यान दिया जा सकता है।)

क्या उसे पूर्णकालिक रोजगार प्राप्त है ? अथवा अशकालिक ? क्या वह पूर्ण रूप से बेरोजगार है ?

यदि व्यक्ति अशकालिक कार्य कर रहा है या पूर्ण रूप से बेरोजगार है, तो इसका कारण ?

यदि वह पूर्ण रूप से बेरोजगार है, तो कितने समय से ? तथा क्या वह काम करने के योग्य और काम करने का इच्छुक है, अथवा, विकल्प से, क्या वह सक्रिय होकर काम ढूंढ रहा है ?

निस्सदेह पाठक को अन्य महत्त्व के प्रश्नो का विचार आएगा, परन्तु इस प्रारभिक पद के स्वरूप के सकेत के लिए ये प्रश्न पर्याप्त है। हम प्राय सभी महत्त्वपूर्ण प्रश्नो के उत्तर प्राप्त नही कर सकते। इतनी विस्तृत पूछताछ करना बहुत व्ययकारक हो सकता है। कुछ प्रश्न ऐसे हो सकते है (जैसे सम्पत्ति के स्वामित्व से सबधित या मजदूरी सबधी प्रश्न) जिनका उत्तर देने से ज्ञापक प्राय मना कर देगे। अतः पूछताछ के आधार के लिए अत्यन्त महत्त्व के और व्यावहारिक प्रश्न चुने जाते हैं। यही प्रश्न है जो कि अनुसूची मे सम्मिलित किए जाएँगे।

सामान्य महत्त्व की कई ऐसी बातें है जिन पर साधारण योजना बनाने के सबध मे प्राय विचार किया जाता है। इनमे मे एक अध्ययन के विस्तार के बारे मे है। क्या इसमे सारा समुदाय सम्मिलित किया जाएगा या केवल एक प्रतिदर्श ? यदि धन और गणनाकार

प्राप्त हैं तो हम पूर्ण गणना कर सकते है, किन्तु प्राय हमे प्रतिदर्श से ही सन्तुष्ट हो जाना चाहिए। अनुसूची पर विचार पूर्ण कर चुकने के बाद हम प्रतिदर्श के चयन का विवेचन करेंगे।

एक अन्य सबधित समस्या यह है कि अनुसूची डाक से भेजी जाए (इस अवस्था मे इसका बहुत सरल और स्वत स्पष्ट होना जरूरी है) या, गणनाकारो का प्रयोग किया जाए। यदि वैतनिक गणनाकारो का प्रयोग करना है तो योग्य व्यक्तियो को ढूंढना आवश्यक है। तथापि, यह प्राय सत्य है कि गणनाकारो को नियुक्त करने के लिए धन प्राप्त नही होता। वास्तव मे, कभी-कभी स्थिति यह होती है कि यद्यपि जाँच के परिणाम मूल्यवान हो सकते हैं, परन्तु उनका मूल्य इतना अधिक नही होता जितना गणनाकारो को नियुक्त करने पर व्यय आएगा। अवैतनिक गणनाकारो के रूप मे पुलिस के सिपाहियो, कालेज के विद्यार्थियो, डाकियो, घूमने वाले अधिकारियो और स्कूल के बच्चो का प्रयोग करके भी अध्ययन किये गए हैं।

एक तीसरी बात उस स्थान मे सबधित है जहाँ ज्ञापको का साक्षात्कार किया जाएगा। रोजगार-बेरोजगारी के अध्ययन के लिए हम गणनाकारो को गलियो मे, काम पर लगे हुए लोगो से उनके काम के स्थानो पर या घरो पर साक्षात्कार करने के लिए भेज सकते हैं। यह स्पष्ट है कि तीनो मे से अन्तिम ढग अधिक अच्छा है। बेरोजगारी के अध्ययन के लिए हमे यह भी विचार करना चाहिए कि वय, लिंग, काम करने की इच्छा और मानसिक या शारीरिक स्थिति का बिना विचार किए किसी घर के सभी व्यक्तियो की गणना की जाए अथवा नही। प्रत्येक व्यक्ति की सूची बनाने से पूर्ण स्थिति का पता चल जाएगा, परन्तु इसके लिए काम भी बहुत करना होगा। रोजगार का अध्ययन करते समय हमारी रुचि उन गृहिणियो मे होनी आवश्यक नही है जिन्हे घर से बाहर कोई काम नही चाहिए। हमारी रुचि प्रौढ लोगो मे हो सकती है ताकि यह जानने का प्रयत्न किया जाए कि जनसख्या का कितना अनुपात सेवा-निवृत्त या बहुत वृद्ध या काम करने के अयोग्य है। प्राय छोटे बच्चे क्योंकि श्रमिक शक्ति का भाग नही होते, इसलिए (एक आयु जैसे) 14 या 16 वर्ष से छोटे सब व्यक्तियो को सम्मिलित न करना वाछनीय हो सकता है। निम्न उदाहरण मे हम यह मान कर चलेंगे कि 14 वर्ष से ऊपर की आयु के सब व्यक्तियो की गणना हुई।

2 प्रश्न बनाना और अनुसूची तैयार करना — इस ओर पहले ही सकेत किया जा चुका है कि वे सभी प्रश्न, जिनका उत्तर हम चाहते है, अनुसूची मे सम्मिलित नही किए जा सकते। उन प्रकरणो को चुनने के उपरात जिन्हे हम अपनी जाँच मे सम्मिलित करना चाहते हैं, हमे प्रत्येक प्रश्न इस ढग से बनाना चाहिए कि उसका तुरन्त और ठीक-ठीक उत्तर दिया जा सके और तब हमे अनुसूची प्रपत्र का प्रारूप बनाना चाहिए। पृष्ठ 36 पर एक अनुसूची प्रपत्र दिया गया है। इसका किसी समुदाय के रोजगार और बेरोजगारी के अध्ययन मे प्रयोग किया जा सकता है। हाँ, इस अनुसूची के साथ गणनाकारो के लिए अनुदेशो की पुस्तिका या कागज़ पूरक के तौर पर सलग्न करना होगा। अनुदेशो मे यह व्याख्या होगी कि "कुटुम्ब" और "परिवार" से क्या तात्पर्य है, क्योकि दोनो पदो का प्रयोग होता है, वय का अर्थ "निकटतम जन्मदिन" (तथाकथित "बीमा-विधि") या "बीते जन्मदिन" से (तथाकथित "जनगणना-विधि"); "धन्धा" और "उद्योग" पदो का अर्थ क्या है, इत्यादि।

एक बहुत सादी अनुसूची नीचे दी गई है। यह एक पोस्टकार्ड है जो कि कन्ट्री जेन्टलमैन नामक पत्रिका को वापिस करना था। यह फार्म न केवल इसकी सादगी के लिए

रुचिकर है वरन् इसलिए भी क्योंकि जिन्होंने सहयोग दिया उनको 'प्रशंसा के उपहार' के रूप में कर्टिस पब्लिशिंग कम्पनी ने एक चमकदार नवीन दस सेन्ट का सिक्का' भेजा। कम्पनी का कहना है कि जब कोई सिक्का न भेजा जाए तो ऐसी पोस्टकार्ड प्रश्नावली के लगभग 20 प्रतिशत उत्तर प्राप्त होंगे। जब दस सेन्ट का सिक्का भेजा गया तो 65 प्रतिशत उत्तर प्राप्त हुए। *यह भी अनुभव किया गया कि दस सेन्ट के स्थान पर 25 सेन्ट का प्रयोग* करके उत्तर लगभग 70 प्रतिशत तक पहुँचाए जा सकते थे।

1 आपको डाक कैसे प्राप्त होती है ? आर० एफ० डी० अथवा स्टार मार्ग ,
डाकघर पर घर घर वितरण

2 आपके परिवार के मुखिया का क्या धंधा है ?

3 उनका किस प्रकार का व्यवसाय है ?

4 क्या आप फार्म या पशु संवधनालय से जीवन निर्वाह करते हैं ? हाँ नहीं

5 यदि आप फार्म या पशु संवधनालय से जीवन निर्वाह नहीं करते तो क्या आपके परिवार में से कोई—
क कृषि भूमि का स्वामी है या ऐसी भूमि किराए पर लेता है ? हाँ नहीं
ख फार्म पर कार्य करता है ? हाँ नहीं

6 यदि आप किसान नहीं हैं तो आपकी कन्ट्री जेंटलमेन में रुचि का कारण क्या है?

कर्टिस पब्लिशिंग कम्पनी द्वारा प्रयुक्त पोस्टकार्ड प्रश्नावली

एक वर्ष की बात है कि लेखकों में से एक ने न्यू ब्रन्सविक शहर की अर्थव्यवस्था के लिए न्यू जर्सी के रूजर्स राज्य विश्वविद्यालय द्वारा किए अंशदान के एक अध्ययन का निरीक्षण किया और 155 प्रश्नों वाली एक अनुसूची तैयार की जिनमें से कुछ के 9 तक वैकल्पिक उत्तर थे। इसमें प्रश्नों के 9 मिमियोग्राफ पृष्ठ तथा अनुदेशों और अन्य गद्य के 2 पृष्ठ सम्मिलित थे। प्रश्नावली प्राप्त करने वालों में से सकाय के लगभग 42 प्रतिशत ने 25 प्रतिशत कर्मचारियों ने तथा 15 प्रतिशत विद्यार्थियों ने इसे दिए अनुदेशों के अनुसार भरा और रिकार्ड के लिए वापिस किया।[3]

सांख्यिकीय अनुसूचियों की रचना एक ऐसी बात है जो वास्तव में उन्हें बनाने और प्रयोग करने से अत्यन्त सन्तोषपूर्ण ढंग से सीखी जाती है। फिर भी कुछ चेतावनियाँ ऐसी हैं, जो सहायक हैं

3 *दि कन्ट्रीब्यूशन आफ रूजर्स—दि स्टेट यूनिवर्सिटी टु दि ईकानमि आफ दि सिटी आफ न्यू ब्रन्जविक ड्यूरिंग दि कलन्डर ईयर 1959*, दि ब्यूरो आफ ईकनॉमिक रिसर्च रूजर्स राज्य विश्वविद्यालय 25 अप्रैल, 1961 पृष्ठ 1—41 व्याप्त अप्रकाशित।

(क) स्पष्टता आवश्यक है—पूर्ण अनुसूची तथा प्रत्येक प्रश्न यथासभव सरल और स्पष्ट होना चाहिए। यह बात विशेष रूप से ऐसी अनुसूचियों के बारे मे सत्य है जो अपनी सुविधा के अनुसार भरी जाने के लिए व्यक्तियों को भेजी जाती है या उनके पास छोडी जाती हैं। एक अस्पष्ट प्रश्न या एक ऐसे प्रश्न से जो अस्पष्ट उत्तर को निमत्रित करता है, अनुपयोगी आँकडे प्राप्त होते है तथा समय और धन नष्ट होता है। एक सस्था ने एक अध्ययन करते समय लगभग सैकडो माता-पिताओ से प्रश्न किया "आपके बच्चे का जीवन सबन्धी दृष्टिकोण उसी की आयु मे आपके दृष्टिकोण से व्यापक है या सकुचित?" स्पष्ट है अनुसधानकर्ता उत्तर मे "व्यापक" या "सकुचित" की अपेक्षा करता था। परन्तु वास्तव में प्राप्त उत्तर प्राय 'हाँ', "नही", 'मुझे सदेह है", और "मुझे ऐसी आशा है" थे—जिनमे से किसी का कोई अर्थ नही था। साथ ही, प्रश्न मे इस प्रकार का शब्द प्रयोग है जिसमें इस तथ्य के लिए कोई गु जाइश नही है कि कुटुम्ब म दो या इससे अधिक बच्चे हो सकते है।

वैवाहिक स्थिति के सम्बन्ध मे जाँच जब "विवाहित या अविवाहित ?" कहकर की जाए तो इस पर दो आपत्तियाँ हो सकती है (1) "हाँ" अथवा "नही" मे प्राप्त होने वाला उत्तर अर्थहीन है, (2) सभी व्यक्ति इन दो श्रेणियो मे नही आते। इस प्रश्न को पूछने का एक अच्छा ढग इस प्रकार कहना है

पडताल कीजिए क्या
अविवाहित है .....
विवाहित है.. ...
विधवा/विधुर है . ...
विवाह-विच्छेदित है......
वियोजित है......

"अविवाहित" का अर्थ स्पष्ट करने के लिए कभी-कभी "कभी विवाह नही हुआ" यह पद प्रयुक्त किया जाता है।

अनुसधानकर्ता को अपने प्रश्नो मे केवल इस प्रकार के शब्द-प्रयोग से सन्तुष्ट नही होना चाहिए कि वे समझे जा सकते है, उसे उनकी इस सावधानी से रचना करनी चाहिए कि उनका अशुद्ध अर्थ नही लगाया जा सकता।

(ख) सभी प्रश्नों का ठीक-ठीक उत्तर नहीं दिया जा सकता—कितना भी स्पष्ट प्रश्न क्यो न पूछा जाए, कुछ इस प्रकार के प्रश्न है जिनके उत्तर असन्तोषजनक होने की सभावना है। कुछ जनगणनाओ से आयु के अलग-अलग वर्षों के अनुसार जनसख्या के वितरण में कुछ विचित्र अनियमितताओं का पता चला है। 25 वर्ष की आयु से प्रारम्भ करके 70 वर्ष की आयु तक जाते हुए, 55 वर्ष की आयु को छोडकर, 0 या 5 पर समाप्त होने वाली प्रत्येक आयु मे व्यक्तियो का निश्चित केन्द्रीकरण है। उदाहरणतया, जिनकी 25 वर्ष आयु बताई गई वे 24 या 26 वर्ष की आयु वालों से अधिक है। कुछ आयुओ पर जो 2 की गुणज हैं गौण केन्द्रीकरण भी रहे है, ये केन्द्रीकरण उस समय अधिक स्पष्ट है जब आयु के ये सम वर्ष 5 के गुणज के समीप नही है। इस प्रकार 28, 32, 38, 42, इत्यादि पर 62 तक केन्द्रीकरण है। इसके अतिरिक्त 21 वर्ष जिनकी आयु बताई गई ऐसे पुरुष बहुत अधिक प्रतीत होते है।

आयु का पूर्णांकन सयुक्त राज्य अमरीका की जनगणना के लिए विलक्षण नही है: इसकी किसी भी ऐसी जांच मे अपेक्षा की जा सकती है जहाँ आयु, जन्म प्रमाणपत्रो या

जन्म-तिथि के किसी अन्य ठीक वृत्त से प्राप्त नहीं की गई। पूर्णांकों में आयु दिए जाने के कारण समझे जाने वाले कुछ कारक ये हैं (1) गणनाकार को किसी व्यक्ति के बारे में जानकारी आवश्यक तौर पर स्वयं उस व्यक्ति द्वारा नहीं दी जाती, प्राय इसे देने वाला कोई सम्बन्धी, मित्र, मकान-मालिक या कोई अन्य व्यक्ति होता है और इन ज्ञापकों में से कुछेक को सही जानकारी नहीं भी हो सकती। (2) जब जानबूझ कर आयु ठीक नहीं बताई जाती, जैसा कभी-कभी होता है, तो ऐसा विश्वास करना उचित है कि आयु का प्राय पूर्णांकन किया जाता है। (3) कुछ व्यक्ति असावधान होते हैं या कभी-कभी व्यक्ति सदा पूर्णांकों में ही सोचता है। जनसंख्या के उन वर्गों में पूर्णांकन सबसे अधिक पाया जाता है जिनमें अशिक्षितों का अनुपात सबसे अधिक है। (4) कुछ व्यक्ति अपनी ठीक-ठीक आयु नहीं जानते। (5) गणनाकारों के द्वारा असावधानी हो सकती है। ठीक आयु बताने में कुछ सुधार आयु के स्थान पर या आयु के अतिरिक्त जन्म-तिथि पूछकर हो सकता है। परन्तु यह बात माननी चाहिए कि जब यथार्थ जानकारी का अभाव है, जैसाकि अपने किरायेदारों के लिए मकान मालकिन द्वारा दी गई जानकारी के बारे में है, तो अधिक यथार्थ प्रश्न पूछने से अधिक अच्छे आंकड़े प्राप्त नहीं होते। साथ ही इस अतिरिक्त प्रश्न पूछने में होने वाला व्यय परिशुद्धता में प्रत्याशित वृद्धि से अधिक हो सकता है। जब आयु का प्राथमिक महत्व होता है, जैसा कि बीमे के लिए प्रार्थना-पत्र देते समय, तब प्राय जन्म-तिथि पूछी जाती है और उसकी लेख्य साक्ष्य से जाँच की जा सकती है।

पूर्णांकों में सोचने का एक अन्य रुचिकर उदाहरण एक चलचित्रशाला द्वारा आयोजित प्रतियोगिता के सम्बन्ध में उत्पन्न हुआ। एक अनियमित आकार के कांच के मर्तबान को झानबेरियों में भरा गया और उन सरक्षकों के लिए छ पारितोषिक प्रस्तुत किए गए जो मर्तबान में झानबेरियों की सख्या का सर्वाधिक निकट अनुमान लगाएँ। 1,996 अनुमानों के विश्लेषण से पता चला कि 1,465 अनुमान ऐसे थे जो 0 या 5 पर समाप्त हुए।

(ग) कुछ प्रकार के प्रश्नों का परिहार करना चाहिए—जब अभियोजक न्यायवादी ने पत्नी के कथित पीटने वाले से पूछा, 'क्या तुमने अपनी पत्नी को पीटना बन्द कर दिया है ?" तो उसने प्रतिवादी को यह मानने की स्थिति में डाल दिया कि उसने अपनी पत्नी को पीटा है, चाहे वह "हाँ" में उत्तर दे या "न" में। वैज्ञानिक खोज में इस प्रकार के सकेतक प्रश्नों का कर्त्तव्यनिष्ठा के साथ परिहार करना चाहिए। मंदी के समय में किए गए बेरोज़गारी के सर्वेक्षण में बेरोज़गारी का कारण पूछते समय गणनाकार यदि यह कहे कि "मेरा अनुमान है कि आप मंदी के कारण बेरोज़गार है?" तो वह उत्तर का सुझाव दे रहा होगा। इसके स्थान पर उसे पूछना चाहिए, "क्या कारण है कि आप बेरोज़गार है ?"

इसी प्रकार, ऐसे प्रश्नों का परिहार किया जाना चाहिए जो अनुचित रूप से छानबीन करने वाले है, या खिझाने वाले है। सामाजिक कार्यकर्ताओं के एक अध्ययन में प्रत्येक विवाहित स्त्री से यह पूछा गया कि क्या वह अपने पति के साथ रहती है या नहीं। पूछताछ अविवेकपूर्ण थी, रोष उत्पन्न करती थी और यदि जिनसे प्रश्न पूछे गए उनमें से प्रत्येक व्यक्ति द्वारा इसका उत्तर दिया जाता तो मुश्किल से ही इससे उपयोगी आंकड़े प्राप्त होते। व्यक्तिगत विषयों (जैसे आय) से सम्बन्धित प्रश्न चतुराई से पूछने चाहिएँ—कदाचित् साक्षात्कार के अन्त के निकट ज्ञापकों का सहयोग प्राप्त होने के बाद पूछे जाने चाहिएँ। कभी-कभी इस प्रकार का प्रश्न न पूछना अच्छा रहता है, परन्तु इस जानकारी से कि क्या घर में प्लेटें धोने वाली मशीन है, क्या घर अपना है और उसका अनुमानित मूल्य क्या है; व्यक्ति का

यथा, यदि कार है (या कारें हैं) तो उसका (या उनके) मेक, नियुक्त नौकर, यदि कोई हो, इत्यादि से सामान्य आय स्तर का अनुमान लगा लेना चाहिए। एक जनगणना मे जनसख्या के बीस प्रतिशत प्रतिदर्श के लिए आय की राशि पूछी गई और यद्यपि जनगणना के सब प्रश्नो के समान यह प्रश्न कानून के द्वारा अधिकृत था तो भी उन लोगो को, जो सीधे जनगणना कार्यालय को यह जानकारी भेजना पसन्द करते थे, एक विशेष गुप्त फार्म दिया गया जिस पर डाक टिकटें लगाने की आवश्यकता नही थी। एक सर्वेक्षण म ज्ञापको से पूछा गया आप अपने पास साधारणत कितनी नकदी रखते हैं ? आप घर मे प्राय कितनी नकदी रखते हैं ? बहुत से लोगो द्वारा इस प्रकार के प्रश्नो का उत्तर देने से इन्कार कर देना प्रत्याशित है।

(घ) *उत्तर वस्तुनिष्ठ एव सारणीकरण के योग्य होने चाहिएँ*—जब तथ्यपूर्ण अध्ययन किए जा रहे हो तो प्रश्न इस ढग से करने चाहिएँ कि वस्तुनिष्ठ उत्तर प्राप्त हो। बिल्डिंग की दशा पूछने और गणनाकार को अपने शब्दो से दशा बताने की अनुज्ञा देने के स्थान पर सयुक्त राज्य अमरीका के व्यापार विभाग द्वारा किए गए एक अध्ययन मे पूछा गया कि क्या बिल्डिंग अच्छी हालत मे है या छोटी-मोटी मरम्मत चाहती है या इमारती मरम्मत चाहती है अथवा आवास के अयोग्य है। यद्यपि इन प्रश्नो के उत्तर पूर्णतया वस्तुनिष्ठ नही है तो भी कम से कम तुरन्त सारणीकरण के योग्य हैं।

(ङ) *अनुदेश और परिभाषाएँ सक्षिप्त होनी चाहिएँ*—गणनाकार और ज्ञापक को कभी भी इस सम्बन्ध मे कोई सन्देह नही होना चाहिए कि क्या सूचना वाछित है और उसके लिए किन शब्दो या इकाइयो का प्रयोग करना है। एक व्यक्ति के रोजगार के स्तर के बारे मे पूछताछ करते समय पूछताछ का किसी निश्चित समय की ओर सकेत होना आवश्यक है। अत जनगणना मे गणनाकार के आने के पूर्व के सप्ताह के बारे मे जानकारी मांगी गई।

यदि अशकालिक कर्मचारी की ठीक स्थिति के बारे म जानकारी वाछित है तो यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि वाछित उत्तर क्या होना चाहिए (1) घण्टे प्रतिदिन, (2) घण्टे (या दिन) प्रति सप्ताह, अथवा (3) सामान्य पूर्ण समय का भाग।

अध्ययन मे प्रयुक्त इकाइयां गणनाकार और सूचनादाता दोनो को स्पष्टत समझ मे आनी चाहिएं। यदि हम किसानो और फलोद्यानियो से सेब के उत्पादन के आंकडे इकट्ठे कर रहे हैं तो हमे इस बात का उल्लेख करना चाहिए कि हम आंकडे बुशलो के रूप में चाहते है या फलो के बक्सो के रूप मे। यदि हम घरो मे कमरो की सख्या के बारे मे सूचना चाहते है तो यह बताया जाना चाहिए कि स्नान घरो रसोई घरो, पाउडर-कक्षो, शृगार कक्षो इत्यादि को कमरो के रूप म गिनना है अथवा नही।

(च) *प्रश्नों की व्यवस्था सावधानी से आयोजित होनी चाहिए*—सूचीपत्र पर न केवल प्रश्नो की ठीक ढग से व्यवस्था होनी आवश्यक है ताकि उत्तर के लिए समुचित स्थान रहे बल्कि प्रश्नो का क्रम इस प्रकार का होना चाहिए ताकि प्रत्येक प्रश्न का क्रम से उत्तर देना सरल हो जाए। यदि किसी विचार का तर्कयुक्त प्रवाह आता है तो प्रश्नो की व्याख्या मे उसका अनुसरण होना चाहिए। प्रश्न एक प्रकरण मे दूसरे प्रकरण पर आगे पीछे नही खिसकने चाहिएँ।

एक अनुसूची का प्रारूप बनाने के बाद वाछित ढग यह है कि इसकी एक दल पर परीक्षा की जाए, इसकी कमियाँ ढूढी जाएँ और तब परीक्षा के प्रकाश मे इसे सशोधित किया जाए। यदि परीक्षा के लिए समय नही है तो कुछ योग्य अन्वेषको को इसे पढने और

इसमे सुधार के सुझाव देने के लिए कहा जाए। जब अनुसूची के अन्तिम प्रारूप का निश्चय हो चुके तो इसे भरने के लिए सावधानी से अनुदेश तैयार करने चाहिएँ। यदि अनुसूचियाँ डाक से आपको को भेजी जानी है तो ये अनुदेश यथासभव स्पष्ट और सक्षिप्त होने चाहिएँ। यदि गणनाकारो का प्रयोग किया जाना है तो गणनाकारो को दिए जाने वाले अनुदेश पूर्ण होने चाहिएँ ताकि उनके कार्य मे जितनी भी सभव स्थितियाँ उत्पन्न हो उन सबको समाहित किया जा सके।

3 प्रतिदर्श के प्रारूप का चयन करना — सयुक्त राज्य अमरीका की जनगणना सयुक्त राज्य के नागरिको की पूर्ण गणना है। अर्थात् यह इतनी ही पूर्ण है जितना इसे पूर्ण करना सभव हो सकता है। हो सकता है कुछ लोग, जैसे अस्थायी मजदूर, न्याय से भागने वाले और अत्यन्त दूरस्थ स्थानो के निवासी, सम्मिलित न हो पाए हो, परन्तु आशय प्रत्येक को सम्मिलित करने का है और कोई भी जानबूझ कर नही छोडा गया। इसी प्रकार, कृषि की गणना म सयुक्त राज्य अमरीका के सब खेतो, तथा कुछ विशिष्ट क्रियाओं को, जिनमे पादपगृह, नर्सरियाँ कुक्कुटघर और मधु-वाटिकाएँ आती हैं, सम्मिलित किया जाता है।

कभी कभी पूर्ण गणन के स्थान पर आशिक गणन का प्रयोग किया जाता है। यदाकदा केवल बडी इकाइयाँ सम्मिलित की जा सकती है। उदाहरणार्थ, विनिर्माणो की एक द्विवार्षिक गणना मे केवल उन सस्थापनो का समावेश किया गया जिनके वार्षिक उत्पादनो का मूल्य 5,000 डालर या इससे अधिक था। समाविष्ट सस्थापनो की सख्या की दृष्टि से गणन अधूरे थे, परन्तु विनिर्माणो म मजदूरो की कुल सख्या का तथा निर्मित वस्तुओ के कुल मूल्य का एक ऊँचा अनुपात सम्मिलित किया गया था। बाद मे एक या अधिक व्यक्तियो को रोजगार देने वाले सब सस्थापनो को सम्मिलित किया गया। इसके भी उपरान्त विनिर्माणो का एक वार्षिक सर्वेक्षण प्रारम्भ किया गया, वार्षिक सर्वेक्षण मे एक प्रतिदर्श का प्रयोग किया गया जो आगामी अनुच्छेदो मे वर्णित ढगो का सम्मिश्रण है।

एक सांख्यिकीय अध्ययन मे पूर्ण या लगभग पूर्ण व्याप्ति की चेष्टा करना बहुत अधिक खर्चीला या बहुत अधिक समय लगाने वाला हो सकता है। साथ ही, मान्य परिणामो पर पहुँचने के लिए सारी या लगभग सारी समष्टि का गणन आवश्यक भी नही है। बडी समष्टि पर आधारित एक प्रतिदर्श का हम अध्ययन कर सकते है और यदि वह प्रतिदर्श समष्टि का पर्याप्त प्रतिनिधित्व करता है तो हम मान्य परिणामो पर पहुँचने के योग्य होना चाहिए। समष्टि से प्रतिदर्श चुनने के बहुत से तरीके है। इनमे से चाहे कोई भी लिया जाए यह स्मरण रखना आवश्यक है कि प्रमुख उद्देश्य है एक प्रतिनिधि प्रतिदर्श प्राप्त करना, अर्थात् वह प्रतिदर्श जिसमे सब कारक उसी अनुपात मे हैं जिस अनुपात मे समष्टि मे हैं जिससे वह प्रतिदर्श लिया गया है। सक्षेप मे यह समष्टि का कोई भी 2, 5, 10, या 20 प्रतिशत प्रतिदर्श सम्मिलित करने मात्र की बात नही है, परन्तु वह प्रतिदर्श इस प्रकार से चुनने की बात है कि वह यथासभव अधिक से अधिक प्रतिनिधि हो।

(क) *यादृच्छिक प्रतिदर्श* —यदि प्रतिदर्श इस प्रकार स लिया जाए कि जिस समय एक मद चुनी जाती है तो समष्टि (या विश्व) मे प्रत्येक मद के लिए जाने का समान अवसर हो तो उस प्रतिदर्श को *यादृच्छिक प्रतिदर्श* कहा जाता है। इन अवस्थाओ मे मदो की एक विशिष्ट सख्या के प्रत्येक समुच्चय के चुने जाने की समान सम्भावना होगी। कभी-कभी इसे अबाधित या सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श कहा जाता है ताकि इसका उन प्रतिदर्शी प्रविधियो से

भेद बताया जाए जो यादृच्छिक प्रतिदर्श को अन्य आवश्यकताओं से संयुक्त करते हैं, उदाहरणत विषमागी समष्टि का समुचित समागी उपवर्गों मे प्रारम्भिक विभाजन।

जब समष्टियाँ समागी है तो जिस विशेषता मे हमारी रुचि है उसके संबध मे यादृच्छिक प्रतिदर्शों से संतोषजनक निष्कर्ष निकलने की आशा की जा सकती है। उदाहरण के लिए, यदि एक बड़े पात्र मे हजारों संगमरमरों की समष्टि है, जिनमे $\frac{1}{3}$ सफेद, $\frac{1}{3}$ काले, और $\frac{1}{3}$ लाल हैं और यदि वे संगमरमर रंग के अतिरिक्त, आकार, रूप, घनता, और अन्य सब विशेषताओं मे समरूप है तो हमारे पास समागी संख्या है। यदि प्रत्येक बार संगमरमर को निकालने के समय पात्र को घुमाकर, या अन्य ढंग से, संगमरमरों को पूर्णरूपेण मिश्रित किया जा सके तो यादृच्छिकता प्राप्त करना अधिक कठिन नही है। संकेतित अवस्थाओं मे इस बात की अधिक संभावना है कि संगमरमरों के प्रतिदर्श मे तीनों रंग उसी अनुपात मे दिखाई देंगे जिस अनुपात मे वे समष्टि मे विद्यमान है, न कि ये रंग किसी अन्य अनुपात मे उपस्थित होंगे। इसका यह अर्थ नही कि प्रत्येक प्रतिदर्श मे समष्टि मे विद्यमान अनुपात दिखाई देगा, परन्तु यदि बहुत से प्रतिदर्श लिए जाएँ तो उनमे ऐसी प्रवृत्ति होगी। साथ ही, अधिक असादृश्य कठिनाई से ही मिलेंगे।

ऊपर दिए गए उदाहरण मे, यादृच्छिकता प्राप्त करना कठिन नही था। कल्पना कीजिए कि किसी समष्टि मे चार भिन्न आकार के कावलों का समान अनुपात है और सभी एक ही पदार्थ से बने हुए है। ऐसी स्थिति मे विभिन्न आकारों का यादृच्छिक प्रतिदर्श प्राप्त करने के लिए हमें एक पात्र मे कावलों को मिश्रित करना सहायक नहीं होगा क्योंकि छोटे पदार्थों की अपेक्षाकृत प्रवृत्ति तह मे जाने की होती है। संतोषजनक सम्मिश्रण संभवतः एक समतल सतह पर प्राप्त किया जा सके, परन्तु यहाँ इस दृष्टि से सावधान होना पड़ेगा कि बड़े कावलों को, क्योंकि वे अधिक प्रमुख हैं, ही न छाँट लिया जाए। एक कुछ-कुछ ऐसी ही समस्या अनाज और कोयले के जहाजों के प्रतिदर्श बनाने मे आती है। अनाज मे समागता का अभाव माना जाता है और अनाज मे कई स्थानों पर खड़ी-सीधी ट्यूब डालकर कभी-कभी प्रतिदर्श लिए जाते है। यह विधि परिच्छेद (घ) मे वर्णित स्तरयुक्त प्रतिदर्श से मिलती-जुलती है।

कभी-कभी मदों को वास्तविक रूप से मिलाया नही जा सकता, तो भी यादृच्छिक प्रतिदर्श अभीष्ट होता है। सम्मिश्रण असंभव हो सकता है क्योंकि मदें भारी, अचल या भंगुर है या क्योंकि वे घरेलू वस्तुएँ या अलग-अलग व्यक्ति हो सकते है। पुनश्च, सम्मिश्रण संभव हो सकता है, परन्तु यह संभव है कि यादृच्छिकता विश्वसनीय न हो, क्योंकि जो व्यक्ति सम्मिश्रित समष्टि मे से मदों को छाँटता है वह यादृच्छिक ढंग से मदों को न चुने। कभी-कभी यादृच्छिकता समष्टि मे मदों के अंक लगाकर और यादृच्छिक अंकों[4] की सारणी के संकेत द्वारा एक या अनेक प्रतिदर्श लेकर प्राप्त की जा सकती है। इसे "यांत्रिक यादृच्छिकता" कहा जा सकता है, यह पद सिक्कों या पाशकों के प्रयोग मे भी लागू होता है।

जब पेंचों, कीलों, कावलों, ईंटों, तार, या फैक्टरी के अन्य उत्पादों के प्रत्येक समूह मे से प्रतिदर्श लिए जाते हैं तो वास्तविक रूप से सम्मिश्रण करना आवश्यक नही है, क्योंकि समय-समय पर उत्पादन-प्रवाह मे से मदों को छाँटा जा सकता है। छाँटने का ऐसा तरीका

4. उदाहरणार्थ, आर० ए० फिशर तथा एफ० येट्स स्टैटिस्टिकल टेबल्ज फार बायलॉजिकल, ऐग्रीकल्चरल एन्ड मेडिकल रिसर्च, हैफनर पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क, 1949, पृष्ठ 104—109 में दी गई सारणी।

ठीक प्रकार से यादृच्छिक नही है और वास्तव मे इसमे पूर्वग्रह हो सकता है, यदि मदो के निर्माण मे प्रयुक्त मशीन, साँचा, बरमा, आरा या अन्य साधन एक समूह के उत्पादन के बीच मे घिसने या असमजित होने लगता है। उत्पादन प्रवाह मे से मदो को छाँटना आगे वर्णित विधि से कुछ-कुछ मिलता है।

(ख) *व्यवस्थित प्रतिदर्श*—जब सूची या फाइल मे से, उदाहरणार्थ, प्रत्येक दसवी मद लेकर प्रतिदर्श प्राप्त किया जाता है, तब प्रतिदर्श व्यवस्थित होता है। प्रथम मद यादृच्छिक ढग से छाँटनी चाहिए। इस प्रकार का प्रतिदर्श कभी-कभी नामो की वर्णक्रम सूची अथवा वर्णक्रम, अनुक्रमाक या अन्य क्रम से फाइल मे रखे गए कार्डों से लिया जाता है। एक जनसख्या एव घरो की गणना के लिए प्रयुक्त अनुसूची मे माँगी गई कुछ जनसख्या सबधी जानकारी सूची मे लिखे गए केवल 20 प्रतिशत व्यक्तियो के सबध मे प्राप्त की गई। यह प्रतिदर्श प्राप्त करने के लिए अनुसूची मे प्रत्येक पाँचवी पक्ति पर "प्रतिदर्श पक्ति निम्न प्रश्न पूछिए" का लेबल लगाया गया। अनुसूची के पाँच फार्म छापे गए, प्रत्येक मे प्रतिदर्श की पक्तियो की व्यवस्था भिन्न थी।

यह महत्वपूर्ण बात है कि मूलभूत सूची, जिसमे से व्यवस्थित प्रतिदर्श चुना जाता है, वास्तव मे वह समष्टि है जिसका अध्ययन करना वाछित है। 1936 के राष्ट्रपति के चुनाव की लिटरेरी डाइजेस्ट द्वारा ठीक-ठीक भविष्यवाणी करने मे असफलता का कारण यह था कि इसका 23 लाख मतपत्रो से भी अधिक का ऊपर से व्यवस्थित दिखाई देने वाला प्रतिदर्श समुचित मूलभूत सूची मे से नही चुना गया था। मतदाता, मोटर गाडियो के स्वामियो तथा टेलीफोन के ग्राहको की सूचियो मे से चुने गए थे। इन सूचियो मे कम आय वाले वर्गों के पर्याप्त व्यक्ति सम्मिलित नही थे और यह बात आज की अपेक्षा 1936 के लिए और भी अधिक सत्य होगी। 1930 की मदी मे न्यूइग्लैड नगर मे बेरोजगारी के अध्ययन के लिए प्रतिदर्श लेने के लिए आधार-स्वरूप इसी प्रकार की अपूर्ण सूची का प्रयोग किया गया। प्रतिदर्श बिजली, गैस, तथा पानी के ग्राहको मे से चुना गया था। सूची मे निर्धनतम कुटुम्बो का समावेश नही था।

इस आशय का कोई सामान्य कथन प्रस्तुत नही किया जा सकता कि उसी आकार के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा व्यवस्थित प्रतिदर्श से अधिक विश्वस्त या कम विश्वस्त निष्कर्ष प्राप्त किए जा सकते है। वे स्थितियाँ, जिनमे व्यवस्थित प्रतिदर्श को यादृच्छिक प्रतिदर्श से अधिक पसन्द किया जाए या यादृच्छिक प्रतिदर्श को व्यवस्थित प्रतिदर्श से अधिक पसन्द किया जाए, इतनी अधिक पेचीदा है कि उनका यहाँ विवेचन नही किया जा सकता, परन्तु एक सावधानी का वर्णन कर देना चाहिए। मदो की सूची बनाते समय प्रतिदर्श के बीच के अन्तरो (सूची मे प्रत्येक पाँचवी मद, प्रत्येक दसवी मद) का किन्ही लगातार बार-बार उत्पन्न होने वाली विशेषताओ से सपात नही होना चाहिए।[5]

---

5 उच्च अध्ययन के लिए देखिए एम० एन० मूर्ती, "सम रीसेन्ट एडवासिस इन साम्पलिंग थीअरि", जर्नल आफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, सितम्बर 1963 पृष्ठ 735—755। तथा देखिये ए० एम० मूड एव एफ० ए० ग्रेबिल, इन्ट्रोडक्शन टु दि थीअरि आफ स्टैटिस्टिक्स, द्वितीय सस्करण, मैकग्रा हिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क, 1965, व्याप्त।

(ग) *गुच्छ प्रतिदर्श*—गुच्छ प्रतिदर्श का वर्णन प्रारम्भ करने से पूर्व *प्रतिदर्शी* इकाई पद का परिचय करा देना उपयोगी होगा। प्रतिदर्शी इकाई किसी प्रतिदर्श म मूलभूत सत्ता है और यह एक सगमरमर, एक काबला, एक व्यक्ति, एक विनिर्माण सस्था, एक खेत, एक परिवार, एक भौगालिक क्षेत्र, इत्यादि कुछ भी हो सकती है। सगमरमर के मामले मे इकाइयाँ सरल थी और वे एक-दूसरी से केवल रग की दृष्टि से भिन्न थी। अन्य इकाइयाँ जटिल हो सकती हैं और वे एक-दूसरी मे बहुत सी दृष्टियो से भिन्न हो सकती हैं। उदाहरणार्थ, विनिर्माण सस्थाएँ, उत्पादन के स्वरूप, निविष्ट पूँजी, कर्मचारियो की सख्या तथा अन्य अनेक दृष्टिया मे भिन्न होती हैं। जब हमारी इकाइयाँ लोग है तो हम देखते हैं कि वे लिग, आयु, जाति, धन्धा, रोजगार-स्तर, आर्थिक स्तर, धर्म, इत्यादि की दृष्टि से भिन्न होते हैं। उनम जो बात समान हो सकती है, वह केवल यह है कि वे मनुष्य हैं और एक ही समुदाय म रहते हैं। जब प्रतिदर्श चुना जाता है तो ये अन्तर महत्वपूर्ण हैं और इनका ध्यान रखना आवश्यक है। प्रतिदर्शी इकाइयाँ जितनी अधिक असमान होगी, प्राति-निधिक प्रतिदर्श चुनने की समस्या उतनी ही अधिक कठिन होगी।

गुच्छ प्रतिदर्श को कभी-कभी क्षेत्र प्रतिदर्श कहा जाता है क्योकि इसका प्रयोग प्राय भौगोलिक आधार पर होता है। यह आवश्यक तौर पर इकाइयो के समूहो का यादृच्छिक चयन होता है। उदाहरण के लिए, भौगोलिक आधार पर हम एक नगर के ब्लॉक या महादेश सयुक्त राज्य अमरीका की काउन्टी चुन सकते हैं। अभौगोलिक उदाहरण-स्वरूप चार आकारो के काबले जिनका पहले वर्णन किया गया है, एक समतल सतह पर, जिसे समान आकार के वर्गो मे बाँटा गया है फैलाए जा सकते है और वर्गो का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया जा सकता है। ब्लाक, काउन्टियाँ या वर्ग गुच्छ[6] है और प्रत्येक समूह के अन्तर्गत सब वर्तमान इकाइयाँ सम्मिलित की जा सकती हैं। बहुक्रम प्रतिदर्श मे समूहो मे से इकाइयो के प्रतिदर्शो या समूहो मे से उपसमूहो के प्रतिदर्श (उदाहरणार्थ, गुच्छ म काउन्टियो में से नगर) या दोनो आते हैं। बहु-क्रम प्रतिदर्श मे एक या अधिक पगो मे दूसरे प्रकार के प्रतिदर्शो का भी समावेश हो सकता है।

(घ) *स्तरित प्रतिदर्श*—जब एक समष्टि के विषमागी होने का ज्ञान है और जब उस विषमागता का अध्ययन की जाने वाली विशेषता पर प्रभाव पडता है, तब उस समष्टि को स्तरो मे विभाजित किया जा सकता है और प्रत्येक स्तर से इकाइयो के यादृच्छिक प्रतिदर्श लिए जा सकते हैं। भरियो के एक बक्स की क्रेता को, जब वह उनकी तह तथा ऊपरी सतह की परीक्षा करने के लिए उन्हे उलटती है, विषमागता के अस्तित्व और इसी प्रकार स्तरो की पहचान होती है। प्राय प्रत्येक स्तर मे से चुनी गई इकाइयो की सख्या कुल सख्या मे उस स्तर मे इकाइयो की सख्या के अनुपात मे होती है। स्तरित प्रतिदर्श का एक रुचिकर प्रयोग सयुक्त राज्य अमरीका के युद्धनीतिक बमबारी सर्वेक्षण[7] द्वारा बहुत वर्ष पूर्व किए गए जापानी मनोबल पर युद्धनीतिक बमबारी के प्रभावो के अध्ययन मे किया गया। इस प्रतिदर्श के चुनाव मे एक महत्वपूर्ण शर्त यह थी कि प्रश्नकर्ता प्रतिदर्श की सूचियो मे दिए गए

---

6. कभी-कभी गुच्छो को "प्रमुख प्रतिदर्शी इकाइयाँ और गुच्छों मे मदो को 'प्राथमिक प्रतिदर्शी इकाइयाँ" कहा जाता है।

7 विवेचन के लिए देखिए हीमन, उपरिनिदिष्ट, पृष्ठ 158—159, *व्याप्त।*

व्यक्तियो का कोई प्रतिस्थापन नही कर सकते थे। घर पर न होने वाले या अन्य प्रकार से आसानी से न मिलने वाले व्यक्तियो के लिए प्रतिस्थापन किसी भी प्रकार के प्रतिदर्श मे त्रुटि का एक भयानक स्रोत है।

ध्यान रखिए कि स्तरित प्रतिदर्श का उस समय तक प्रयोग नही किया जा सकता जब तक कि समष्टि और उसके स्तरो के बारे मे कुछ जानकारी प्राप्त नही है। एक अत्यन्त ही महत्त्व की बात जिसकी ओर प्राय ध्यान नही दिया जाता यह है कि स्तर वे होने चाहिएँ जो अध्ययन किए जा रहे विषय से सबधित हैं। यदि हम एक कॉलेज के पुरुष विद्यार्थियो के स्वास्थ्य का अध्ययन कर रहे हैं तो हम ऐसे स्तरो को स्वीकार कर सकते हैं, यथा वे विद्यार्थी जो घर पर रहते हैं या जो घर पर नही रहते, वे जो पूर्णतया, या अशतः आत्मनिर्भर हैं या बिल्कुल भी आत्मनिर्भर नही हैं, वे जो नियमपूर्वक व्यायाम करते हैं या नही करते; वे जो धूम्रपान करते हैं या नही करते, इत्यादि। परन्तु ऐसे अन्य स्तर हैं जिनका स्पष्ट ही इस समस्या पर कोई प्रभाव नही। एक सीमान्त उदाहरण लीजिए, हम ऐसे स्तरो मे वे भी मान्य कर सकते हैं जो आदत से ही टोपियाँ या टोप पहनते है, जो एक या दोहरे ब्रैस्ट के कोट पसन्द करते है या कोई भी अन्य श्रेणियाँ जिनका स्वास्थ्य से सबध नही। दूसरा महत्त्वपूर्ण विचार यह है कि स्तरित प्रतिदर्श सबसे अधिक लाभदायक उस समय होने है जब स्तर एक-दूसरे से इतने अधिक भिन्न हैं जितना कि समष्टि से सभव है, परन्तु प्रत्येक स्तर के भीतर एकरूपता होनी चाहिए।

बहुत सी सार्वजनिक राय तथा मण्डी अनुसधान सस्थाएँ स्तरित प्रतिदर्श के सिद्धान्त का प्रयोग करती है। कभी-कभी गणनाकारों को नगर के एक विशिष्ट खण्ड (एक भौगोलिक स्तर) मे काम करने और यादृच्छिक ढग से चुने गए लोगो की एक विशिष्ट सख्या से बात करने के लिए कहा जा सकता है। प्राय. चयन यादृच्छिक नही होता क्योकि इसमें वे लोग आते है, जो घर पर होते हैं वे जो साक्षात्कार के लिए तैयार हैं और वे जो देखने से ही ऐसे प्रतीत होते है कि वे बात करने के लिए तैयार हो जाएँगे।

एक असमागी समष्टि के लिए, एक उचित ढग से स्तरित प्रतिदर्श से उसी आकार के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा अधिक विश्वस्त[8] निष्कर्ष निकलने की आशा हो सकती है। इससे यह परिणाम निकलता है कि वही विश्वस्तता एक छोटे स्तरित प्रतिदर्श से प्राप्त की जा सकती है। इसमे कुछ खतरा भी है कि अन्वेषक स्तरित प्रतिदर्श मे अत्यधिक सुरक्षा का अनुभव करने के कारण बहुत छोटे प्रतिदर्शों का प्रयोग कर लें जो साख्यिकीय आधार पर विश्वस्त निष्कर्ष प्राप्त नही करा सकते। इसके विपरीत, विधि तथा विश्वस्तता सूत्रो का बुद्धिमानी से प्रयोग करके इससे बचाव किया जा सकता है। यद्यपि

---

8 इस पुस्तक मे हम केवल यादृच्छिक प्रतिदर्शों के लिए (अध्याय 24, 25 और 26 म) त्रुटि सूत्रो का विचार करेंगे। अधिक जटिल विधिया से प्राप्त प्रतिदर्शो का मूल्याकन करने के लिए यादृच्छिक प्रतिदर्शों के व्यवहार की समझ एक आवश्यक आधार है। त्रुटि सूत्र साख्यिकीय अनुमान, प्रतिदर्शों की तकनीको, तथा प्रतिदर्श सर्वेक्षण विधियो की बहुत सी पुस्तको मे मिल सकते हैं। और अधिक उच्च तकनीको के लिए देखिए डब्ल्यू० ए० एरिक्सन, "आप्टिमम स्ट्रैटिफाइड साम्पलिंग यूजिंग प्रायर इन्फरमेशन, जर्नल आफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, सितम्बर 1965, पृष्ठ 750—771, तथा डी० सिह एव बी० डी० सिह, "डबल साम्पलिंग फार स्ट्रैटिफिकेशन आन सक्सेसिव आकेयंस," तत्रैव, पृष्ठ 784—792।

उचित स्तरण और प्रतिदर्श का आकार दोनों महत्त्वपूर्ण हैं, तथापि, एक बडा प्रतिदर्श घटिया स्तरण की कमी को पूरा नही कर सकता । हाँ, एक समागी समष्टि से लिया गया स्तरित प्रतिदर्श उसी आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा अधिक विश्वस्त नहीं होता ।

(ङ) *अनुक्रमिक प्रतिदर्श*[9]—अनुक्रमिक प्रतिदर्श का कच्चे पदार्थ या निर्मित माल से सबधित गुण नियत्रण योजनाओ के सबध मे बहुत विस्तृत रूप मे प्रयोग किया गया है, परन्तु धीरे-धीरे इसके अन्य प्रयोग[10] बढ रहे है । इसमे अपेक्षाकृत कम सख्या मे मदो का परीक्षण आता है जिसका परिणाम उस ढेर को स्वीकार या अस्वीकार करने के निर्णय मे निकल सकता है जिसमे से प्रतिदर्श प्राप्त हुआ था । यदि प्रथम प्रतिदर्श से कोई स्पष्ट निर्णय नही निकलता तो इसे उस समय तक बढाया जाता है (सभवत एक समय मे एक मद) जब तक कि निर्णय हो सके ।

(च) *प्रतिदर्शों के अन्य प्ररूप*—पूर्व-वर्णित पाँच प्रकार के प्रतिदर्शों को कभी-कभी "प्रायिकता प्रतिदर्श" कहा जाता है क्योकि यह प्रायिकता कि एक अमुक पद प्रतिदर्श मे सम्मिलित किया जाएगा निश्चित रूप से जानना सभव है । पहले वर्णन की गई प्रतिदर्शों की योजनाओं से भिन्न अन्य योजनाएँ भी हैं । वे वाछनीय प्रक्रियाएँ नही समझी जाती क्योकि उनमे व्यक्तिनिष्ठ कारक आते है, अथवा उनकी विश्वस्तता सन्तोषजनक ढग से निश्चित रूप से नही जानी जा सकती, या दोनों बाते हो सकती हैं । इनमे आते है : (1) *सोद्देश्य प्रतिदर्श*—जिसमे कुछ विशेषताओ के बारे मे प्रतिदर्श समष्टि के अनुकूल बनाया जाता है—उदाहरण के लिए, औसत आय एव परिवार का आकार, (2) *यथाश प्रतिदर्श*,[11] जिसमे एक विशिष्ट क्षेत्र मे काम करने वाले भेंटकर्ताओ को कुछ विशेषताओ वाले व्यक्तियो से बात करने का अनुदेश दिया जाता है (यदि भेंटकर्ताओ को 10 देशज गोरे पुरुषो, 4 हब्शी पुरुषो और 3 विदेशज पुरुषो से बात करने के लिए कहा गया है तो इस बात की अधिक सभावना है कि जिन विदेशजो से भेंट की जाएगी वे ऐसे लोग होगे जो पर्याप्त अच्छी अग्रेजी बोल सकते हैं ताकि उनसे सन्तोषजनक ढग मे बातचीत की जा सके । इससे अधिकतर अध्ययनों मे पूर्वग्रह आ जाएगा क्योकि वास्तव मे अध्ययन की गई समष्टि वह समष्टि नही होगी जिसका अध्ययन अभिप्रेत था, (3) *यादृच्छिक बिन्दु* प्रतिदर्श

---

9. अनुक्रमिक विश्लेषण की एक पूर्ण व्याख्या प्रारम्भकर्ता अब्राहम वाल्ड की पुस्तक *सीक्वेन्शल अनैलिसिस*, जान विली एन्ड सन्ज, न्यूयार्क, 1947 मे दी गई है । वाणिज्यिक अनुसधान मे अनुक्रमिक प्रतिदर्शों के अनेक अनुप्रयोग बाजार अनुसधान का वर्णन करने वाली अनेक प्राप्य पुस्तको मे वर्णित हैं ।

10. देखिए एफ० जे० एन्सकोम्ब, "सीक्वेन्शल मेडिकल ट्रायल्स", *जर्नल आफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन*, जून 1963, पृष्ठ 365—383, तथा पी० आर्मिटेज, "सम कमेन्ट्स आन एन्सकोम्ब्स पेपर", *तत्रैव*, पृष्ठ 384—387 । साथ ही देखिए मूड तथा ग्रेबिल, *उपरिवर्णित* पृष्ठ 383—402 ।

11. यथाश प्रतिदर्श का एक अच्छा यद्यपि पुराना विवरण एफ० मोसटेलर तथा अन्यो की पुस्तक *दि प्रि-इलेक्शन पोल्ज आफ 1948*, सोशल साइस रिसर्च काउन्सिल, न्यूयार्क, 1949, पृष्ठ 83—91 तथा 94—96 मे मिल सकता है । यथाश प्रतिदर्श के प्रयोग के खतरे की पृष्ठ 95 पर अच्छी प्रकार सोदाहरण व्याख्या की गई है ।

जिसमे एक मानचित्र मे यादृच्छिक ढग से बहुत से बिन्दुओ का पता लगाना होता है और प्रत्येक बिन्दु के *निकटतम प्रतिदर्श की इकाइयो की पूर्वनिश्चित सख्या का गणन करना* होता है। (यह तरीका कभी-कभी खेतो के प्रतिदर्श बनाने के लिए प्रयोग मे लाया जाता है, परन्तु इसके प्रयोग से छोटे फार्मो की अपेक्षा बडे फार्मों के समाविष्ट किए जाने की अधिक सभावना है।)

किस प्रतिचयन योजना का प्रयोग करना है, यह निर्णय करते समय अन्वेषक को योजना की कार्यक्षमता पर अवश्य विचार करना चाहिए। यह टिप्पणी पहले ही की जा चुकी है कि एक स्तरित प्रतिदर्श से उसी आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा अधिक विश्वस्त निष्कर्ष निकलते है (अर्थात् इसमे प्रतिदर्श की त्रुटि कम है)। गुच्छ प्रतिदर्श मे यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा उसी आकार के प्रतिदर्शों के लिए कम विश्वस्त निष्कर्ष निकलने की आशा हो सकती है। किसी प्रतिदर्श की योजना की कार्यक्षमता का सकेत इकाई लागत के सबध मे विश्वस्तता की ओर होता है। अत एक भौगोलिक गुच्छ प्रतिदर्श की, उदाहरण के लिए एक बडे राज्य मे 20 स्थलो पर, इकाइयों के समूहो के साथ प्रति प्रतिदर्श की इकाई की लागत राज्य भर मे इधर-उधर बिखरी हुई इकाइयो के साथ उसी आकार के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श की प्रति प्रतिदर्श की इकाई की लागत की अपेक्षा कम हो सकती है। इकाई लागत मे अन्तर इतना अधिक हो सकता है कि गुच्छ प्रतिदर्श यादृच्छिक प्रतिदर्श की अपेक्षा पर्याप्त बडा किया जा सके जिससे उतना ही खर्च करके यादृच्छिक प्रतिदर्श से प्राप्त हो सकने वाले निष्कर्षो को अपेक्षा गुच्छ प्रतिदर्श से अधिक विश्वस्त निष्कर्ष निकलेंगे।

पूर्व-विवेचित विधियो के सम्मिश्रण के प्रयोग से प्रतिदर्श का चयन किया जा सकता है। सार्वजनिक राय की अमरीकन सस्था[12] द्वारा अपनाया गया ढग निम्न है

> सार्वजनिक राय की अमरीकन सस्था के राष्ट्रीय सर्वेक्षण का स्थायी प्रतिदर्श वयस्क जनसख्या का प्रतिदर्श है। स्थायी प्रतिदर्श मे से मतदाता जनसख्या के सन्निकट मान का प्रतिदर्श, जबकि ऐसा प्रतिदर्श अभीष्ट है, चुनने की व्यवस्था की गई है। डिजाइन मे सात क्षेत्रो (राज्यो के समूहो) के हिसाब से स्तरण की व्यवस्था है और प्रत्येक क्षेत्र मे भौगोलिक वितरण के हिसाब से स्तरण, तीन ग्राम-शहर स्तर, जनगणना आर्थिक क्षेत्र और अन्तिम तौर पर चुने हुए इलाके के आकार की व्यवस्था है। आकार के अनुपात मे चुनने की प्रायिकता के साथ यादृच्छिक प्रारभ से प्रत्येक स्तर के अन्दर इलाको का एक व्यवस्थित प्रतिदर्श लिया गया था। बडे शहरी समुदायो के भीतर प्रतिदर्श की इकाइयां[13] (खण्डो के छोटे गुच्छ) आकार के अनुपात मे प्रायिकता के साथ यादृच्छिक ढग से ली गईं। छोटे समुदायो और ग्रामीण क्षेत्रो मे प्रतिदर्श के क्षेत्र समान प्रायिकता के साथ लिए गए।

भेंटकर्ताओ को चुने हुए क्षेत्र दे दिए जाते हैं और उन्हे ऐसे क्षेत्रो की सीमाओ के अन्दर कार्य करना होता है। प्रत्येक राष्ट्रीय सर्वेक्षण मे लगभग 150

12. अमेरिकन इन्स्टीच्यूट आफ पब्लिक ओपीनियन के निदेशक डॉ० जार्ज० एच० गैलप से पत्र व्यवहार द्वारा।

13 स्पष्ट ही ये "प्रमुख प्रतिदर्शी इकाइयां" हैं। पाद-टिप्पणी 6 देखिए।

प्रतिचयन बिन्दुओं का प्रयोग किया जाता है और प्रत्येक बिन्दु के साथ समान संख्या म साक्षात्कार होते है। 1,000 से अधिक भेंटकर्ता कर्मचारी रखे जाते है।

कभी-कभी न्यूनाधिक यादृच्छिक ढग से प्रतिदर्श लिया जाता है। अथवा, अन्वेषक ऐसे आंकडो का समावेश कर सकता है जो सुविधाजनक और शीघ्र प्राप्य हों जिसके उपरान्त वह विश्वास से घोषणा करेगा कि इस प्रकार लिया हुआ प्रतिदर्श निस्सदेह उस समष्टि का प्रातिनिधिक है जिसका कि वह अध्ययन कर रहा है। उदाहरण के लिए एक अन्वेषक, जिसने यह पता किया कि हाई स्कूल मे प्रवेश लेने योग्य 25,00,000 से कुछ कम बच्चो ने प्रवेश नही लिया, यह अनुमान लगाना चाहता था कि इन 25,00,000 मे से कितनो ने आर्थिक दवाव के कारण स्कूल छोडा। विद्यार्थियो ने स्कूल क्यों छोडा इसके कारणो से सबधित 16 स्वीकार्य अध्ययनो के सबध मे उसने पता लगा लिया। इन अध्ययनो मे से प्रत्येक मे 53 मे लेकर 274 बच्चो तक तथा कुल मिलाकर 2,525 बच्चे आते थे। अध्ययन 13 विभिन्न राज्यो के स्कूलो मे किए गए। एक अध्ययन नीग्रो बच्चो का किया गया। न्यूयार्क, मसाच्युसेट्स, इलीनोइस, मिशीगन, विस्कौसिन, टैक्साज और कुछ अन्य अधिक जनसख्या वाले राज्यो से कोई आंकडे नहीं लिए गए। फिर भी क्योंकि भौगोलिक वितरण विविध था और क्योंकि बडे नगर, छोटे नगर और ग्राम के बच्चो का समावेश किया गया था अत. अन्वेषक ने निष्कर्ष निकाला "समस्त समूह के अनुमान का आधार बनने के लिए प्रतिदर्श समष्टि के विभिन्न तत्वो का पर्याप्त मात्रा मे प्रतिनिधि प्रतीत होता है।" *यह सत्य रहा हो या न रहा हो। प्रतिदर्श न तो यादृच्छिक था,* न स्तरित अथवा व्यवस्थित था, और न ही गुच्छ, इसमे केवल जो उपलब्ध था उसका ही समावेश था।

जैसा कि अध्याय 24, 25, और 26 मे दिखाया जाएगा, यादृच्छिक प्रतिदर्शों के लिए, प्रतिदर्श जितना बडा होगा, उससे निकले निष्कर्षो पर हम उतना ही अधिक विश्वास कर सकते हैं। यह भी दिखाया जाएगा कि समष्टि मे जितनी अधिक विविधता है, हम उसी आकार के प्रतिदर्शों पर उतना ही कम विश्वास कर सकते हैं। हाँ, केवल आकार से ही प्रतिदर्श का प्रतिनिधि होना निश्चित नही हो जाता। एक बडे परन्तु बुरे ढग से चुने हुए प्रतिदर्श की अपेक्षा एक छोटा यादृच्छिक या स्तरित प्रतिदर्श अधिक अच्छा हो सकता है। कभी-कभी स्थिरता की परख से यह निर्धारित किया जाता है कि प्रतिदर्श कब पर्याप्त बडा है। उदाहरणार्थ, मतदाताओं के एक दल मे से 1,000 का एक प्रतिदर्श चुना जा सकता है *और प्रतिदर्श के 57.3 प्रतिशत से यह सकेत मिल सकता है कि वे एक विशिष्ट प्रत्याशी* को वोट देना चाहते है। 1,000 अन्य व्यक्ति चुने जा सकते है और दोनो दलो से मिलकर 56 9 प्रतिशत दिखाई दे सकते है। अन्य 1,000 जोडने से प्रतिशतता बदल कर 56 8 हो सकती है और अन्य 1,000 (कुल 4,000) से अनुपात 56 8 पर अपरिवर्तित रह सकता है। इस परीक्षण से यह प्रतीत होगा कि आकार के दृष्टिकोण से 3,000 या 4,000 पर्याप्त प्रतिदर्श हैं। परन्तु स्थिरता की परख केवल स्थिरता का परीक्षण करती है, प्रतिनिधित्व का नही। इस तथ्य का कि प्रतिशत आवश्यक तौर पर अपरिवर्तित रहता है केवल यह अर्थ है कि हमे बराबर पहले वाला ही निष्कर्ष प्राप्त हो रहा है। कल्पना की जा सकती है कि 1,000 का प्रथम प्रतिदर्श निश्चित तौर पर अप्रातिनिधिक रहा होगा (जैसे, मतदाता जनसख्या के केवल अपेक्षाकृत गरीब वर्गों मे से) और प्रत्येक अगला प्रतिदर्श इसी प्रकार अप्रातिनिधिक रहा होगा।

प्रतिदर्श मे पूर्वग्रह के विद्यमान होने की सभावना का पहले ही वर्णन किया जा चुका है। जब प्रतिदर्श का चयन किया जा रहा है उस समय यह आवश्यक है कि पूर्वग्रह को दूर रखा जाए। पूर्वग्रह का अर्थ अन्वेषक का व्यक्तिगत पूर्वग्रह नही है जिससे वह अपना प्रतिदर्श जानबूझ कर इस प्रकार चुनता हो कि वह अपने वाछित परिणाम दिखा सके। वह बौद्धिक बेईमानी है। इसका यह भी अर्थ नही कि अनुसूची के प्रश्नो का उत्तर देने वाले व्यक्तियो मे पूर्वग्रह है। पूर्वग्रह के परिहार का तात्पर्य है—प्रथम, कि प्रतिदर्श लेते समय कोई चयनात्मक कारक विद्यमान न हो तथा, दूसरे यह कि उस समय कोई चयनात्मक कारक विद्यमान न हो जब प्रतिदर्श मे सम्मिलित किए गए व्यक्तियो के पास से अनुसूचियाँ वापिस आएँ। लिटरेरी डाइजेस्ट 1936 की प्रारभिक राय के मामले मे एक चयनात्मक कारक विद्यमान था क्योंकि उन मूलभूत सूचियो मे जिनमे से प्रतिदर्श चुना गया था जनसख्या के निम्न आर्थिक स्तरो का समावेश नही था। कभी-कभी मूलभूत सूची पूर्ण हो सकती है, परन्तु प्रतिदर्श चुनने के ढग से पूर्वग्रह उत्पन्न हो सकता है। इस प्रकार, कौटुम्बिक नामो के अक्षरक्रम से वितरण मे राष्ट्रीयता के अन्तरों के कारण नामो की अक्षर-क्रम से बनी सूची मे से चुनना असन्तोषजनक हो सकता है। यदि सूची के भाग चुने जाते है तो इस प्रकार का पूर्वग्रह उत्पन्न हो सकता है; यदि (उदाहरण के लिए) प्रत्येक दसवाँ नाम लिया जाए तो इसकी सभावना नही होगी।

यदि डाक द्वारा प्रश्नावली भेज कर सूचना इकट्ठा करने का ढग प्रयोग मे लाया जाए तो दूसरे प्रकार का चयनात्मक कारक प्राय सामने आता है। जब अनुसूचियाँ डाक से भेजी जाती है तो अन्वेषक को कभी यह आशा नही होती कि सब की सब वापिस आएँगी, क्योंकि परिप्रश्नो के केवल एक भाग का ही उत्तर आता है तो वह यह निश्चय कैसे कर सकता है कि जिन्होने उत्तर दिया वे उन सभी के प्रतिनिधि है जिन्हे अनुसूचियाँ भेजी गई थी? प्राय वह इस सबध मे निश्चय नही कर सकता, कभी-कभी यह स्पष्ट होता है कि वे प्रतिनिधि नही है। एक छात्र सस्था ने स्नातको को 363 परिप्रश्न भेजे और प्रत्येक से यह पूछा कि वह अपनी पहले वर्ष की आय को (गुप्त रूप से) रिपोर्ट दे। 133 से उत्तर प्राप्त हुए। यह बिल्कुल सभव है कि इन उत्तरो मे चयनात्मक कारक विद्यमान हो। उन छात्रो ने जिनके पास काम नही था या जिनकी आय बहुत कम थी सभवतः उत्तर नही दिया। यह कल्पना आँकडो पर आधारित है जिनसे 1,500 डालर से कम आय के लगभग पूर्ण अभाव का पता लगा, यद्यपि अध्ययन एक मदी के वर्ष मे किया गया था। स्पष्ट ही पूर्वग्रह-ग्रस्त प्रतिदर्शो पर आधारित निष्कर्ष न केवल व्यर्थ हैं बल्कि भ्रामक भी होते है।

4 जानकारी प्राप्त करने के लिए अनुसूचियो का प्रयोग—जब एजेण्ट या गणनाकार उन व्यक्तियो के पास, जिन्होंने जानकारी देनी होती है, अनुसूचियाँ ले जाते हैं तो गणनाकार खोज के अभिप्राय की व्याख्या और सहयोग की प्रार्थना कर सकते हैं। पूछते समय प्रत्येक प्रश्न की स्पष्ट रूप से व्याख्या की जा सकती है। स्पष्ट है कि गणनाकारो को अपना काम प्रारभ करने से पूर्व ध्यानपूर्वक अनुदेश देना आवश्यक है। कभी-कभी उन्हे अनुसूची और मुद्रित अनुदेशो का अध्ययन करके परीक्षा देनी होती है। गणनाकार प्रश्नातीत सत्यनिष्ठा वाले व्यक्ति तथा धैर्यशील, नम्र और चतुर भी होने चाहिएँ। बहुत से व्यक्ति साख्यिकीय (या अन्य) जानकारी देने के झझट से रुष्ट होते हैं, बहुत से हिचकिचाहट करते हैं, कुछ इन्कार कर देते हैं। गणनाकार को अपनी भेट की इस प्रकार

योजना करनी चाहिए कि यथा-संभव कम समय लगे और यदि संभव हो तो वांछित जानकारी प्राप्त करने की प्रत्येक चेष्टा करनी चाहिए। यदि गणनाकार पहुँचने से पूर्व व्याख्या का पत्र पहुँच जाता है, तो कई बार उसका कार्य आसान हो सकता है। कभी कभी गणनाकार साक्षात्कार कर लेते है और अनुसूचियाँ बाद मे भरते हैं। यह इस सिद्धान्त के आधार पर किया जाता है कि यदि उस समय टिप्पणियाँ नही लिखी जाती तो लोग बात करने मे अधिक स्वतत्रता अनुभव करते हैं। परन्तु यह विश्वास किया जाता है कि यह एक अवांछनीय ढग है, विशेष तौर पर उस समय जबकि बहुत से तथ्य स्मरण रखने और बाद मे लिखने हों। गणनाकारो को प्रत्यय-पत्र साथ रखने चाहिएँ ताकि जिन व्यक्तियो के पास जाएँ वे आने वालो के पदीय सम्बन्ध के बारे म सन्तुष्ट हो सकें। यद्यपि गणनाकार जितना अधिक सभव होना है उतनी चतुराई से जानकारी प्राप्त करने की प्रार्थना करता है, तथापि कभी कभार उसे उत्तरदाता उत्तर देने से इन्कार कर सकता है। प्राय एक अन्य मुलाकाती एक अलग प्रकार के ढग से अधिक सफल हो सकता है। कभी कभी एक विशेष रूप से योग्य कार्यकर्ता द्वारा अधिक कठिन मामलो का अनुपरीक्षण करना एक अच्छी योजना है। यदा कदा गणनाकार का एक ऐसे व्यक्ति से सामना हो सकता है जो सहयोग देना नहीं चाहता और जो अध्ययन के सम्बन्ध म विस्तार से बात करना चाहता है। ऐसी स्थिति म अच्छी अप्रत्य सुविधाएँ परिसम्प्राप्त होती हैं।

गणनाकारो का प्रयोग करन की अपेक्षा डाक से अनुसूचियाँ भेजना, सर्वप्रथम, आँकडे एकत्र करन का कम खर्चीला ढग है। इसम एक अतिरिक्त लाभ यह भी है कि जानकारी देन वाला व्यक्ति सभवत व्यस्त या असुविधाजनक समय मे गणनाकार द्वारा बाधित होने की बजाय अपनी सुविधा के अनुसार फार्म भर सकता है। साथ ही डाक द्वारा भेजी गई प्रश्नावली मे (हाँ बशर्ते कि ज्ञापक को यह विश्वास हो कि उसकी पहचान गुप्त है) ऐसी गुप्त सूचना दी जा सकती है जो कि ज्ञापक गणनाकार को बताने मे हिचकिचाएगा। दूसरी ओर, एक बड़े अनुपात म व्यक्ति डाक द्वारा भेजे गए परिप्रश्नो का उत्तर नही देते और बहुत सा अनुपरीक्षण कार्य आवश्यक हो सकता है। यह भी बडा खतरा है कि ज्ञापक प्रश्ना को न समझे अथवा जानबूझ कर या अन्यथा अशुद्ध उत्तर दे। अत अनुसूची के साथ न केवल स्पष्ट सक्षिप्त निर्देश भेजना आवश्यक है बल्कि जाँच के उद्देश्य की व्याख्या और सहयोग की प्रार्थना करने के लिए एक सक्षिप्त पत्र भी भेजना चाहिए। एक साधारण उपहार द्वारा (जैसे कि कर्टिस पब्लिशिंग कम्पनी द्वारा भेजा गया सिक्का) एक अधिक अनुपात मे उत्तरो को सुनिश्चित किया जा सकता है। किसी भी स्थिति म पता लिखा हुआ और टिकटें लगा हुआ (अथवा व्यवसाय-उत्तर) लिफाफा भेजना चाहिए। यदा-कदा गणनाकारो द्वारा एक हवाई डाक व्यवसाय-उत्तर लिफाफा इस आशा से प्रयोग किया जाता है कि इसके परिणाम, स्वरूप अधिक और शीघ्र उत्तर प्राप्त होगे। जब अनुपरीक्षण कार्य आवश्यक हो तो जिन व्यक्तियो न अपने फार्म वापिस नही भेजे उन्हे परिप्रश्न का स्मरण कराने और पुन सहयोग की प्रार्थना करने के लिए व्यक्तिगत विनम्र पत्र लिखे जाएँ। जब उचित हो, हवाई डाक-पत्रों, विशेष वितरण पत्रो, रजिस्टर्ड पत्रो (यह निश्चित करने के लिए कि पत्र वितरित हुआ है), तारो या टेलिफोन पर बातचीत द्वारा अनुपरीक्षण कार्य किया जाए। हाँ, अन्वेषक को ऐसा कार्य नही करना चाहिए जिससे वह बलात् लगने लगे, उसे अधिक आग्रह नही करना चाहिए। जब अनुसूचियो म से केवल कुछ ही अन्तिम तौर पर प्राप्त हुई हो तो स्थिति का ध्यानपूर्वक परीक्षण करना आवश्यक है ताकि यह निश्चय किया जाए

कि कोई चयनात्मक कारक विद्यमान नहीं रहा । अथवा, यदि किसी चयनात्मक कारक की उपस्थिति प्रतीत होती हो तो स्थिति के उपचार के लिए एक अनुपूरक अन्वेषण करना आवश्यक हो सकता है ।

5 अनुसूचियों का सम्पादन करना—भरी हुई अनुसूचियाँ प्राप्त होने के उपरान्त *आँकडे सारणीकरण के लिए ठीक रूप मे करने के लिए कुछ मात्रा मे प्रारंभिक कार्य* आवश्यक होता है । सम्पादकीय कार्य विविध हैं । किसी छोटे अध्ययन की स्थिति मे एक *सम्पादक पूर्ण कार्य* कर सकता है । बड़े अध्ययन मे, सम्पादन की भिन्न अवस्थाएँ कई सम्पादकों मे बाँटी जा सकती हैं ।

(क) *परिकलन—यह प्राय अधिक अच्छा है* कि गणनाकारो या जानकारी देने वाले व्यक्तियो को कोई परिकलन करने के लिए न कहा जाए । इस प्रकार यदि घर मे कमरो की संख्या और परिवार मे सदस्यो की संख्या के संबध मे जानकारी प्राप्त की गई है तो भीड का कुछ प्रत्यय देने के लिए सम्पादक प्रति कमरा व्यक्तियो के अनुपात का परिकलन कर सकता है । यदि अक्षतिपूरित दुर्घटनाओ के द्वारा समय के नाश और कई एक कर्मचारियो मे से प्रत्येक की दैनिक मजदूरी के सबध मे आँकडे इकट्ठे किए गए हैं तो सम्पादक प्रत्येक मामले मे दुर्घटनाओं के कारण नष्ट हुई आय का परिकलन कर सकता है ।

(ख) *संकेतीकरण—सारणीकरण मे प्राय संकेतीकरण से सुविधा हो* जाती है । जब मशीन के द्वारा सारणीकरण (जिस पर थोडा आगे विवेचन किया जाएगा) प्रयोग मे आता है तो *अनुसूची मे सब प्रविष्टियाँ केवल संख्यात्मक संकेत के रूप मे शेष रह जाती हैं ।* यदि सारणीकरण शारीरिक हो तो भी मौलिक प्रविष्टियो को पढने की चेष्टा करने की बजाय संकेत चिह्न *अक्षरो संख्याओं या अक्षरो,* और संख्याओ के *सम्मिश्रण* की खोज करना अधिक आसान हो सकता है । सारणीकार का काय इस तथ्य से और भी आसान हो सकता है कि सम्पादक *सुवाच्य ढग से लिखता है या उसे लिखना चाहिए और एक विशिष्ट रंग,* प्राय लाल, का प्रयोग करता है ।

पृष्ठ 36 पर संख्यात्मक संकेत के अनुसार सम्पादित बेरोजगारी अनुसूची दिखाई गई है । यांत्रिक साधनो से सारणीकरण आसान बनाने के लिए पहले से ही संख्याओ मे अभिव्यक्त प्रविष्टियो को छोड कर प्रत्येक प्रविष्टि का *संख्यात्मक दृष्टि से संकेत दिया गया* है । ध्यान दीजिए कि प्रश्न 7 स्वत संकेतित था । प्रश्न 5 और 6 के लिए एक सरल संकेत *योजना निम्न प्रकार से हो सकती है* ·

10 व्यावसायिक
20 लिपिक (अन्यथा अनिर्दिष्ट)
30 घरेलू एव व्यक्तिगत सेवा
40 सरकारी कर्मचारी (अध्यापकों को छोडकर)

व्यापार और परिवहन

50 परचून और थोक व्यापार
51 टलीफोन और तार
52 रेलवे, एक्सप्रेस, गैस, बिजली का प्रकाश
53. जल परिवहन

54 बैंक तथा दलाली
55 बीमा तथा स्थावर सपदा
56 अन्य

विनिर्माण और यांत्रिक धंधे

60 निर्माण व्यापार, ठेकेदार
61. निर्माण व्यापार, श्रमिक
62 मिट्टी, काच, और पत्थर के उत्पाद
63 खाद्य और सम्बन्धित उत्पाद
64 लोहा, इस्पात, और उनके उत्पाद
65 धात्विक उत्पाद, लोहे और इस्पात को छोडकर
66 कागज, छपाई, और प्रकाशन
67 पहनने के परिधान और वस्त्र
68 मोटर गाडियाँ, पुर्जे, तथा टायर
69 काष्ठखण्ड और फर्नीचर
70 हवाई जहाज
71 अन्य निर्माण और यांत्रिक धंधे
75 श्रम (अन्यथा अनिर्दिष्ट)
80 स्वनियोजित (10 या 60 को छोडकर)
90 विविध रोजगार जो ऊपर निर्दिष्ट नहीं
100 अप्रतिवेदित

(ग) गूढ-लेखवाचन—कभी-कभी गणनाकार या ज्ञापक का लेख पढना कठिन हो सकता है। यह बात तब विशेषत सत्य होती है जब गणनाकार अनुसूची मे घर से बाहर वर्षा या बर्फ मे प्रविष्टि करता है। ऐसी कापी के लेख का गूढ-वाचन करना सम्पादक का कार्य है, वह न केवल सारणीकार का समय बचाता है बल्कि ठीक निष्कर्षों को भी सुनिश्चित करता है। यदि प्रविष्टियाँ अक्षरश पढने योग्य नही है तो अनुसूची गणनाकार या उस व्यक्ति को जिसने जानकारी भेजी है वापिस भेजनी पड सकती है।

(घ) पडताल करना—असगतियो के लिए सम्पादक अनुसूचियो की परख कर सकता है। हो सकता है वय और जन्मतिथि की प्रविष्टियाँ आपस मे न मिलें। यदि कोई व्यक्ति 8 वर्ष की आयु का बताया गया है और विवाहित भी दिखाया गया है तो सभवत: कुछ भ्राति है। इसी प्रकार यदि कोई स्त्री पूरा समय लोहार के तौर पर कार्य करती हुई बताई गई है तो सभव है (यद्यपि आवश्यक नही) कि गलती हो गई हो। यदि उनका प्रयोग करना हो तो इस प्रकार की प्रविष्टियो की जांच करना आवश्यक है।

(ङ) पूर्णता के लिए परीक्षण करना—यह देखने के लिए कि कोई प्रविष्टियाँ छूट तो नही गई या अपूर्ण तो नही हैं सम्पादक के लिए अनुसूची की जांच करना आवश्यक है। यदि छूटी हुई जानकारी महत्त्व की है तो अनुसूची गणनाकार या ज्ञापक को वापिस भेजनी जरूरी है। अन्यथा सम्पादक छूटी हुई जानकारी के स्थान पर "अप्रतिवेदित" (N. R.= Not Reported) या तदनुरूप सख्यात्मक सकेत लिख देता है।

6 आंकडों को सुव्यवस्थित करना—अनुसूचियो का सम्पादन हो चुकने के बाद

अन्तिम सारणियाँ और चार्ट बनाने से पूर्व आँकडो को सगठित करना आवश्यक है। इसके लिए तीन विधियो का प्रयोग हो सकता है

(1) *गणन अथवा गिनतीपत्र*—उदाहरणार्थ, 20 मार्च, 19— को समाप्त होने वाले सप्ताह मे, उद्योग के अनुसार, परिवारो के पुरुष मुखियाओं ने कितने घण्टे काम किया यह दिखाने के लिए, आइए हम एक गणनपत्र पर विचार करे। गणन-पत्र पृष्ठ 38 पर दिखाया गया है और यह समुदाय के एक क्षेत्र से परिवारो के पुरुष मुखियाओ के लिए सब सम्पादित कार्डो से प्राप्त आँकडो का प्रतिनिधि है। हस्त-सारणीकरण के लिए उद्योग समूहों का सख्यात्मक सकेत आवश्यक नही है (हस्त सारणीकरण मे अगले उप-परिच्छेद मे वर्णित अक प्राप्त करने और हाथ से छाँटने दोनो का समावेश होता है), परन्तु पूर्ण उद्योग के पदनाम के स्थान पर सकेत सख्याओ के प्रयोग से गिनती-पत्र मे स्थान बचता है। जब यान्त्रिक सारणीकरण किया जाता है तो सख्यात्मक सकेतन आवश्यक है।

ध्यान से देखिए कि गणन-अको की पाँच के समूहो मे व्यवस्था की गई है, जिनमे से चार ऊर्ध्वाधर और एक विकर्ण है। इससे गिनती सरल हो जाती है। गणन-अको का दूसरा सेट परख के प्रयोजन के लिए है। क्योकि गिनती-पत्र केवल एक क्षेत्र के लिए है, इसलिए पूर्ण समुदाय के आँकडे प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक है कि ऐसे कई गिनती-पत्रो के निष्कर्षो को मिलाया जाए। परिणामस्वरूप प्राप्त होने वाली सारणी 2.1 के समान प्रतीत हो सकती है।

एक छोटे अध्ययन से जानकारी का सगठन करने के लिए गिनती-पत्र उपयोगी ढग है। परन्तु यदि बहुत सी अनुसूचियो का गणन करना है या यदि वर्गीकरणो को उपविभाजित करना वाछित है तो गणन-पत्र दुष्कर हो जाता है। उदाहरणार्थ, यदि हम घण्टो के वही प्रकार प्रयोग करना चाहते है जैसेकि गणन-पत्र मे दिखाए गए है, परन्तु पुरुषो और स्त्रियो को भी दिखाना चाहते है और साथ ही परिवारो के मुखियाओ और जो परिवारो के मुखिया नही है उनमे प्रभेद करना चाहते है, तो हमारे पास दो प्रमुख श्रेणियाँ होगी "परिवार का मुखिया' तथा "परिवार का मुखिया नही"। इनमे से प्रत्येक को "पुरुष" और "स्त्री" मे विभाजित किया जाएगा और इन चार श्रेणियो मे से प्रत्येक को पृष्ठ 38 पर गिनती-पत्र मे दिखाए गए वर्गो मे आगे उपविभाजित किया जाएगा। इसके लिए $4 \times 6 = 24$ कालम की आवश्यकता होगी और इसके परिणामस्वरूप एक बहुत बडा गिनती-पत्र प्रस्तुत होगा। हाँ, इसे कई गणन-पत्रो मे तोडा जा सकता है, परन्तु यह और भी अच्छा होगा यदि आँकडे सुव्यवस्थित करने की एक भिन्न विधि का प्रयोग किया जाए।

(2) *हाथ से छँटाई*—जब किसी अध्ययन मे, बहुत बडी सख्या मे अनुसूचियाँ नही आती और जब अनुसूचियाँ पर्याप्त छोटी तथा गत्ते या भारी कागज पर हो, ताकि उनसे तुरन्त काम लिया जा सके, तब आँकडो को दस्ती छाँट के ढग से सगठित किया जा सकता है। यदि हम पूर्वगामी अनुच्छेद म वर्णित जानकारी प्राप्त करना चाहते है तो हम (1) चार ढेरो मे कार्डों को छाँट सकते है—परिवारो के पुरुष मुखिया, परिवारो की स्त्री मुखिया, पुरुष जो मुखिया नही, और स्त्रियाँ जो मुखिया नही, (2) इन चार ढेरो मे से प्रत्येक को 27 उद्योग श्रेणियो मे छाँट सकते हैं ताकि अधिक से अधिक 108 ढेर होगे; तथा (3) इनमे से प्रत्येक ढेर को पृष्ठ 38 पर दिखाए गए काम के घण्टो के सवर्गो मे छाँट सकते हैं। तब वाछित आँकडे प्राप्त करने के लिए प्रत्येक ढेर के कार्डो को गिना जाएगा।

नाम जोहन्स डो क्षेत्र 103 परिवार 0682
पता 100 अर्नेस्ट स्ट्रीट कार्ड 01 गणनाकर ए० जोन्स

1 परिवार के मुखिया से सम्बन्ध मुखिया (1) 2 वय 38
3 लिंग भेद पुरुष (1) 4 स्कूल के वर्ष 6 (1)

5 नियमित रोजगार
धंधा राज
(61) उद्योग गृह निर्माण

6 वर्तमान रोजगार
धंधा राज
(61) उद्योग गृह निर्माण

7 यह दिखाने के लिए कि यह व्यक्ति 20 मार्च 19 को समाप्त होने वाले सप्ताह में प्राथमिक तौर पर क्या कर रहा था एक संख्या पर चक्र लगाओ

(01) मुद्रा या जिन्स में प्राप्ति के लिए काम कर रहा है।
02 स्वनियोजित।
काम में लगा है या स्वनियोजित है परन्तु कार्य नहीं कर रहा क्योंकि
03 छुट्टी पर।
04 बुरा मौसम।
05 श्रम झगड़ा।
06 30 दिन या कम की जबरी छुट्टी।
07 अपनी बीमारी।
08 अन्य
09 काम में नहीं 30 दिन के अन्दर नया कार्य प्रारम्भ करता।
10 काम में नहीं काम की खोज में।
11 अनियत कमकार कोई नियमित कार्य नहीं।
12 स्कूल में जाना।
13 सेना में।
14 घर की देखभाल (कर्मचारी के रूप में नहीं)।
15 परिवार के फार्म पर या परिवार के व्यापार में अवैतनिक कर्मकार।
16 स्वैच्छिक कर्मकार, परिवार के फार्म या परिवार के व्यापार में नहीं।
17 सेवा निवृत्त।
18 शारीरिक या मानसिक दृष्टि से कार्य करने के अयोग्य।
19 संस्था का निवासी।
20 अन्य

8 यदि पिछले सप्ताह इस व्यक्ति ने, प्राप्ति के बदले, या परिवार के फार्म या परिवार के व्यापार में, या स्वनियोजित व्यक्ति के रूप में कोई कार्य किया तो उसने कितने घण्टे कार्य किया? 30 घण्टे।

9 यदि यह व्यक्ति कार्य की खोज करता रहा है तो वह कितने सप्ताह तक रोजगार ढूंढता रहा/ढूंढती रही? सप्ताह

टिप्पणी

शहरी आबादी का रोजगार-बेरोजगारी अध्ययन, 19

शहरी आबादी की रोजगार-बेरोजगारी अनुसूची सम्पादित

(3) *यान्त्रिक सारणीकरण*—यात्रिक सारणीकरण में वही मौलिक प्रक्रम होता है, जो हाथ से छँटाई मे होता है, परन्तु यह बहुत अधिक तेज है। यात्रिक छँटाई और सारणीकरण (गिनने और जोडने) की युक्तियों से साख्यिकीय अध्ययन की जानकारी को सगठित करने का कार्य अत्यन्त शीघ्रता से हो सकता है, हाँ शर्त यह है कि अध्ययन काफी विस्तृत हो ताकि ऐसे साधन का प्रयोग हो सके। यात्रिक सारणीकरण के साधन के प्रयोग की उस हालत मे सिफारिश की जाती है जबकि बडी सख्या मे अनुसूचियो का विश्लेषण करना हो या जब प्रत्येक अनुसूची मे अनेक प्रविष्टियाँ हो। इस प्रक्रम मे आवश्यक तौर पर निम्न पग आते हैं :

(क) समुचित सकेतो का प्रयोग करके अनुसूची मे सब प्रविष्टियो को सख्यात्मक मदो मे बदलना।

(ख) सकेत सख्याओ का प्रतिनिधित्व करने के लिए छिद्र करके एक छिद्रण कार्ड पर ये प्रविष्टियाँ अकित करना।

(ग) मशीनो के प्रयोग से कार्डों को छाँटना और आँकडो को एकत्र करना।

पृष्ठ 36 की सम्पादित अनुसूची के आँकडो को दिखाने के लिए पृष्ठ 39 पर एक कोरा छिद्रण कार्ड और एक कार्ड का बढाया हुआ छिद्रित भाग भी दिखाया गया है। कार्ड (103) मे प्रथम प्रविष्टि उस क्षेत्र की पहचान कराती है जहाँ से अनुसूची आई। अगली प्रविष्टि, जिसमे 4 कालम प्रयोग किए गए है, परिवार की पहचान कराती है और यदि वाछित हो तो प्रत्येक परिवार के कार्डों को इकट्ठा करने के योग्य बनाती है। अगले दो कालम परिवार के भीतर कार्ड की सख्या का सकेत करते है क्योकि एक परिवार के लिए कई कार्ड हो सकते है। यदि अभीष्ट हो तो कुल मिलाकर पहली नौ सख्याओ से किसी अनुसूची और इससे बने हुए पच कार्ड को इकट्ठा करना सभव होता है। अगले कालम मे "1" के द्वारा यह दिखाया गया है कि व्यक्ति एक परिवार का मुखिया है, "2" से यह सकेत होगा कि वह मुखिया नही है। अगले दो कालमो मे वय दिखाई गई है। अगले कालम मे "1" यह सकेत करता है कि प्रत्यर्थी पुरुष है, स्त्री के लिए "2" पच किया गया है। अगले कालम मे इन सख्याओ से स्कूल के वर्षों का सकेत है : 1, 0—6 वर्ष, 2, 7—12 वर्ष; 3, 13—16 वर्ष, 4, 17 या अधिक 0, अप्रतिवेदित। उद्योग सकेत, जो पहले ही दिया जा चुका है, अगले चार कालमो मे है, दो कालम नियमित रोजगार के लिए और दो वर्तमान रोजगार के लिए है। दो और कालमो मे स्वय के सकेतक प्रश्न 7 के उत्तर दिए हैं। प्रश्न 8 का उत्तर सख्यात्मक होगा और यह अगले दो कालमो मे आता है। अन्तिम तीन कालमों मे प्रश्न 9 के सख्यात्मक उत्तर आते है। ध्यान दीजिए कि इस अनुसूची के लिए पच कार्ड का केवल एक भाग प्रयोग करना आवश्यक है।

कार्ड तैयार हो चुकने के बाद, उनका सत्यापन होता है। यह कार्य प्रत्येक छिद्रित कार्ड को, उस अनुसूची के साथ पढकर जिसका वह प्रतिनिधि है, किया जाता है। कार्डों का प्रकाश के किसी स्रोत पर रखकर या किसी काली पृष्ठभूमि पर परीक्षण होता है। वैकल्पिक तौर पर, "सत्यापक" कहलाने वाली एक विशिष्ट मशीन का प्रयोग किया जा सकता है। सत्यापक मशीन कार्डों को पच करने वाली मशीन से मिलती-जुलती है परन्तु यह कार्डों को पच नही करती।

सत्यापन के बाद, कार्डों को छाँटा जाता है और उनका मशीन से सारणीकरण होता है। इलेक्ट्रॉनिक साख्यिकीय मशीनें ये कार्य करती हैं। वे छाँटती हैं, गिनती हैं, जोड़

क्षेत्र 1

गणन कर्त्ता जेन स्मिथ

पडताल कर्त्ता विलियम जोन्स

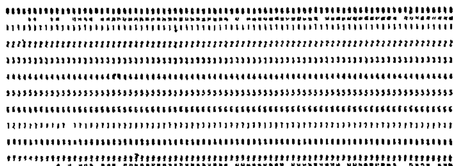
उद्योग तथा जितने घण्टे काम किये
परिवारों के पुरुष मुखिया

उद्योग समूह	35 घण्टे या अधिक	28 परन्तु 35 घण्टे से कम	21 परन्तु 28 घण्टे से कम	14 परन्तु 21 घण्टे से कम	7 परन्तु 14 घण्टे से कम	7 घ २ से कम
0	7					
20	2			0		
30	2	2	2			1
40	27	2		1		
50	16	0	2	2	2	
5	3					
52	32	2	2	2		1
53	6		2			
54	3					
55	5	0				
56	2					
60	4	2				
6	25	5	2	3	2	
62						
63	8	0	3			
64	7	5	3	4	2	2
65	4		1		0	
66	3	2	0			
67	5			3		
68	12	3	2			
69	4	0				
70	6		2			
71	0		0			
75						
80	7	3	2	0	2	
90	2					
00						

करती हैं और परिणाम छापती है य मशीन पूर्व स्थापित कसौटियों पर आधारित जानकारी [सम्पादन के अन्तर्गत अनुच्छेद (घ) देखिए] की सगति के लिए कार्डों का सत्यापन भी करती है।

अनेक अध्ययनो के लिए उपयोगी एक सरल साधन जिसे कीसार्ट[14] कहते हैं किनारो के साथ छिद्रो वाले कार्डों का प्रयोग होता है। छिद्र और किनारे के बीच मे कार्ड के भाग का खाँचा बनाकर जानकारी लिखी जाती है जैसा कि यहाँ दिखाया गया है

14 कीसार्ट की बिक्री रायल मकबी कम्पनी 295 मडिसन एवेन्यू न्यूयार्क एन० वाई० द्वारा की जाती है।

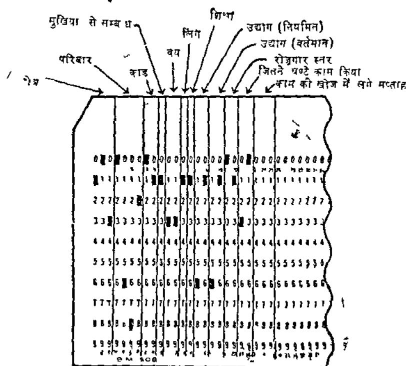


पंच कार्ड

खाँचदार और बेखाँचदार कार्डों को एक बड़ी छँटाई की सुई से अलग किया जाता है ।



हाल के वर्षों में, स्वचालित आँकड़े ससाधन उपकरण का बड़ी व्यापारिक फर्में तथा सरकारी एजेंसियाँ विस्तृत प्रयोग करने लगी है। ये अति गतिमान मशीनें न केवल सेकंड



पंच कार्ड का एक भाग जो यह दिखाता है कि पृष्ठ 36 पर सम्पादित अनुसूची कैसे दर्ज की जाएगी

सारणी 21

20 मार्च 19— को समाप्त होने वाले सप्ताह में शहरी आबादी में परिवारों के पुरुष मुखियाओं द्वारा काम के घण्ट उद्योग समूह के क्रम से

उद्योग समूह	35 घण्टे या अधिक	28 परन्तु 35 घण्टे से कम	21 परन्तु 28 घण्टे से कम	14 परन्तु 21 घण्टे से कम	7 परन्तु 14 घण्टे से कम	7 घण्टे से कम	कुल
व्यावसायिक	247	16	12	1	2		278
लिपिक (अन्यथा अनिर्दिष्ट)	10	5	4	13			32
घरेलू और व्यक्तिगत सेवा	386	125	44	11	6	9	581
सरकारी कर्मचारी (अध्यापकों को छोड़कर)	1 563	232	48	25	11	15	1 894
व्यापार और परिवहन	6 339	532	269	166	49	34	7 389
फुटकर और थोक व्यापार	2 207	65	103	33	25	9	2 442
टेलीफोन और तार	120	3	20	6	2		151
रेलवे एक्सप्रेस गैस बिजली का प्रकाश	3 119	408	66	94	11	20	3 718
जल परिवहन	308	12	71	16	5		412
बैंक तथा दलाली	239	8	5	6	1	2	261
बीमा तथा स्थावर संपदा	245	20	4	9	5	3	286
अन्य	101	16		2			119

विनिर्माण तथा यांत्रिक धंधे	8 468	1,054	693	268	85	78	10,646
निर्माण व्यापार ठेकेदार	557	27	4	2		1	591
निर्माण व्यापार श्रमिक	1 223	311	108	67	31	8	1,748
मिट्टी कांच और पत्थर के उत्पाद	251	30	15	21			317
खाद्य और सबंधित उत्पाद	1 243	47	124	8	2	3	1,427
लोहा इस्पात और उनके उत्पाद	2 205	308	211	53	26	47	2 850
धात्विक उत्पाद, लोहे और इस्पात को छोडकर	213	25	76	8	13	5	340
कागज छपाई और प्रकाशन	220	41	37				298
पहनने के परिधान और वस्त्र	304	13	21	62	4	7	411
मोटर गाडियां पुर्जे तथा टायर	1 083	102	41	25	1	1	1,253
काष्ठखण्ड और फर्निचर	293	100	8	2	5	3	416
हवाई जहाज	703	33	36	17	1	2	792
अन्य	168	17	12	3	2	1	203
श्रम (अन्यथा अनिर्दिष्ट)	12	7	3	3	6	4	35
स्वनियोजित	1,530	88	49	18	23	11	1 719
विविध	63	10	7	2			82
अप्रतिवेदित	1		1	1			3
कुल परिवारो के पुरुष मुखिया	18 619	2 069	1 130	508	182	151	22,659

इस सारणी में दिखाए गये आंकड़ उदाहरण के प्रयोजनो के लिए हैं वे किसी वास्तविक गणना का प्रतिनिधित्व नहीं करते ।

के एक छोटे अश मे अतीव जटिल गणितीय क्रियाएँ सम्पन्न करने मे समर्थ हैं बल्कि ये आँकडो और उन्हे तैयार करने वाले अनुदेशो को संग्रह करके भी रख सकती हैं। व्यापारिक उपक्रमो द्वारा स्वचालित आँकडे ससाधन उपकरण का वेतन-चिट्ठा तैयार करने, परिसम्पत्ति एव देयताओ सबधी और विशेषकर वस्तु-सूचियों के विस्तृत रिकार्ड रखने, तथा विभिन्न वैकल्पिक बहिर्वेशित क्रियाओ के निष्कर्षो के विश्लेषण तैयार करने के लिए प्रयोग किया जाता है।

7. **प्रस्तुति तथा विश्लेषण**—हाथ से या यांत्रिक साधनो से अनुसूचियो की जानकारी को सगठित कर चुकने के बाद, अन्तिम सांख्यिकीय सारणियाँ और चार्ट बनाए जा सकते है। सांख्यिकीय सारणियो का विवरण अध्याय 3 मे दिया गया है। ग्राफ के द्वारा प्रस्तुति पर अध्याय 4, 5, और 6 मे विचार किया गया है। सांख्यिकीय आँकडो का विश्लेषण अध्याय 7 से 26 मे दिया गया है।

वर्तमान स्रोतों का प्रयोग

प्राथमिक बनाम गौण स्रोत—जैसा कि इस अध्याय के प्रारम्भ मे सकेत किया गया है, एक प्रक्षिप्त अध्ययन मे उपयोग के योग्य सांख्यिकीय आँकडे पहले ही विद्यमान हो सकते है। आँकडे प्रकाशित हुए हो या न भी प्रकाशित हुए हो। वे एक व्यक्ति, एक व्यापारी कोठी, एक अनुसधान सस्था, एक व्यापार सस्था, एक स्थानीय, राज्य या सघ के सरकारी कार्यालय, एक समाचार-पत्र या पत्रिका इत्यादि द्वारा इकट्ठे किए जा सकते हैं। कुछ प्रकाशनो मे, जैसे *यूनाइटेड स्टेट्स सेन्सस आफ पापूलेशन एन्ड हाउसिंग* के ग्रन्थो मे, केवल प्रचालक सस्था द्वारा इकट्ठे किए गए आँकडे होते है। इस प्रकार के स्रोत *प्राथमिक* कहलाते हैं। अन्य प्रकाशनो के प्रकाशन करने वाली सस्था के अतिरिक्त अन्य सस्थाओ द्वारा प्रारम्भ मे सकलित किए गए कुछ या सब आँकडे इकट्ठे होते हैं। इन्हे *गौण* स्रोत कहा जाता है। सयुक्त राज्य व्यापार विभाग के व्यापार अर्थशास्त्र के कार्यालय से मासिक प्रकाशित होने वाला *सर्वे ऑफ करन्ट बिजनेस* एक गौण स्रोत है क्योकि इसमे बहुत से सरकारी और गैर-सरकारी स्रोतो से प्राप्त आँकडे होते हैं। स्पष्ट है, जब कभी सभव हो प्राथमिक स्रोत का प्रयोग करना अधिक अच्छा है परन्तु प्राय. किसी गौण स्रोत का प्रयोग अधिक सुविधाजनक हो सकता है। सयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो का वार्षिक प्रकाशन *स्टॅटिस्टीकल एब्स्ट्रॅक्ट ग्राफ दि यूनाइटेड स्टेट्स* आँकडो का एक अमूल्य गौण स्रोत है।

प्राथमिक स्रोत को अधिमान देने के कारण हैं

(1) गौण स्रोत मे प्रतिलेखन की अशुद्धियाँ हो सकती हैं जो प्राथमिक स्रोत से आँकडे नकल किए जाते समय हो गई हो।

(2) प्राय प्राथमिक स्रोत मे प्रयुक्त मदो और इकाइयो की परिभाषाएँ होती हैं। यह एक महत्त्वपूर्ण विचार है क्योकि जब तक प्रयोग करने वाले को यह ठीक-ठीक पता नहीं कि इकट्ठा करने वाली सस्था द्वारा प्रयोग किए गए प्रत्येक पद या इकाई का क्या अर्थ है तब तक आँकडो का बुद्धिमत्तापूर्ण प्रयोग कठिन ही हो सकता है। जब आँकडे कई एक स्रोतो से लिए जाते हैं उस समय इसका विशेष महत्त्व है कि पदों और इकाइयो की परिभाषाओ की छानबीन की जाए। कभी-कभी "कुटुम्ब" पद का पिता, माता, और सतान यह सीमित अर्थ हो सकता है, कभी-कभी इसका न्यूनाधिक "परिवार" (एक घर मे रहने वाले) के पर्यायवाची के रूप मे प्रयोग किया जा सकता है। कभी-कभी "निर्यात" पद का सकेत कुल

निर्यात (पुन: निर्यात मिलाकर) हो सकता है, कभी-कभी केवल सयुक्त राज्य के माल का निर्यात। यद्यपि एक मापी हुई बुशल 2,150 4 घन इच होती है, तथापि सब वस्तुओ के लिए एक बुशल मे उसी सख्या मे पाउड नही होते। उदाहरण के लिए, छिलके सहित हरी मटर की फलियो का एक बुशल 22 पाउड वज़न का होता है, जई के एक बुशल मे 32 पाउड वज़न होता है, और सेब के एक बुशल का भार 45 पाउड होता है, परन्तु गेहूँ, सेम, मटर या आलू का एक बुशल 60 पाउड वज़न का होता है। *स्टैटिस्टिकल एब्स्ट्रैक्ट ग्राफ दि यूनाइटेड स्टेट्स* मे, यद्यपि यह एक गौण स्रोत है, इकाइयो की आवश्यक परिभाषाएँ होती है।

(3) प्राथमिक स्रोत मे प्राय अनुसूची की एक प्रतिलिपि और प्रतिदर्श का चयन करने तथा आंकडे एकत्र करने मे प्रयुक्त क्रियाविधि का वर्णन होता है, इस प्रकार पाठक यह निश्चय करने के योग्य होता है कि अध्ययन के निष्कर्षों पर कितना विश्वास किया जाए।

(4) प्राथमिक स्रोत मे प्राय आंकडे अधिक विस्तार मे होते है। गौण स्रोत मे प्राय. जानकारी का कुछ भाग छोड दिया जाता है या सवर्गों को मिला दिया जाता है, जैसे कि नगरो के स्थान पर काउन्टियाँ दिखाई जाएँ, या काउन्टियो के स्थान पर राज्य।

आंकड़ो की उपयुक्तता—आंकडो की विश्वस्तता, यथार्थता, और प्रयोज्यता का विश्वास किए बिना विश्लेषक को प्राथमिक या गौण स्रोत से आंकडों का प्रयोग नही करना चाहिए। इस सिलसिले मे विचार के योग्य बहुत से बिन्दु हैं

(1) यदि गणन प्रतिदर्श पर आधारित था, तो क्या प्रतिदर्श प्रातिनिधिक था ?

(2) क्या अनुसूची अच्छी प्रकार अभिकल्पित की गई थी ? क्या कोई प्रवाहक प्रश्न या सदिग्ध प्रश्न समाविष्ट किए गए थे ?

(3) क्या एकत्र करने वाली एजेंसी पूर्वग्रह-रहित थी, अथवा इसे "कोई अपना मतलब निकालना था" ? यह स्मरण रखना अच्छा है कि पूर्वग्रह का समावेश जानबूझ कर या अनजाने मे हो सकता है।

(4) क्या असावधान गणन के कारण कोई चयनात्मक कारक आ गया था ? उदाहरणार्थ, बेरोज़गारी के एक अध्ययन मे, जिन घरो मे कोई नही है उन घरो के अनुपरीक्षण के सबध मे उपार्थक असावधान हो सकते हैं और इस प्रकार आंकडो मे रोज़गार-प्राप्त व्यक्तियों की सख्या वास्तविक से कम दिखाई देगी।

(5) क्या गणनाकार योग्य एव उचित ढग से शिक्षित थे ? अयोग्य या कम शिक्षित गणनाकारो पर उपयोगी निष्कर्षों के लिए निर्भर नही किया जा सकता।

(6) क्या सम्पादन सावधानी और शुद्ध अन्त करण से किया गया था ? सम्पादको द्वारा असावधानी से सकेतन या परिकलन से अन्यथा मूल्यवान अध्ययन के निष्कर्ष मूल्यहीन हो सकते है।

(7) क्या सारणीकरण (गिनती पत्र, छँटाई या यात्रिक सारणीकरण) सावधानी से किया गया था और उसका ठीक-ठीक सत्यापन किया गया ?

(8) क्या प्रयोग की गई परिभाषाओ, अध्ययन किए गए क्षेत्र और क्रियाविधि की विधियो की दृष्टि से आंकडे खोज के अधीन समस्या पर लागू होते है ?

गणनाकारो, सम्पादको और सारणीकारो द्वारा किए गए कार्य की कोटि का निश्चय करना सदा सभव नही होता। जैसा कि अभी-अभी नोट किया था, प्राथमिक स्रोतो

से प्रयोग की गई अनुसूची की प्रतिलिपि का पुनरुत्पादन हो सकता है और अनुसरण की गई प्रणालियो तथा क्रियाविधियो का न्यूनाधिक ठीक ठीक वर्णन मिल सकता है। अतिरिक्त जानकारी प्राय पत्र-व्यवहार द्वारा प्राप्त की जा सकती है।

दिए हुए एक स्रोत से वर्षों की अवधि के दौरान आँकडे प्रयोग करते समय हमे यह निश्चय कर लेना आवश्यक है कि पदो की परिभाषाएँ बदली नही है, अथवा यदि वे बदल गई हैं तो परिवर्तन के लिए उचित छूट दे देनी चाहिए, यदि ऐसा करना सभव हो। उदाहरणार्थ, 1950 की जनगणना के लिए शहरी जनसख्या की एक नई परिभाषा का प्रयोग किया गया। इस पाठ में, हम पुरानी और नई परिभाषाएँ[15] देकर स्थान नही घेरेंगे, परन्तु परिवर्तन का उद्देश्य था अधिक बडे और घने बसे हुए अनिगमित स्थानो को शहरी के तौर पर सम्मिलित करना, जैसे कि नगरो के चारो ओर के उपान्त क्षेत्र तथा एक शहरी उपान्त के बाहर 2,500 या इससे अधिक निवासियो के अनिगमित स्थान। 1950 के आँकडो का सारणीकरण दोनो पुरानी और नई परिभाषाओ के आधार पर किया गया था और पुरानी परिभाषा के प्रयोग से 8,89,27,464 शहरी आबादी तथा नई परिभाषा के आधार पर 9,64,67,686 शहरी आबादी थी। पहले की जनगणनाओ के आँकडे केवल पुरानी परिभाषा के आधार पर प्राप्त है।

समाचार-पत्र साधारणतया सांख्यिकीय आँकडो के अच्छे स्रोत नही होते विशेषत जब आँकडे एक समाचार के रूप मे हो। इसका एक कारण यह है कि समाचार-पत्र की प्रति इतनी तीव्रता से तैयार की जाती है और छापी जाती है कि सामग्री का उतने ध्यान से प्रूफ वाचन नही किया जा सकता जितना कि पत्रिकाओ और पुस्तको की अन्तर्वस्तु का। इसके अतिरिक्त समाचार मदो मे उद्धृत बहुत से आँकडे ऐसे व्यक्तियो के भाषणो और वक्तव्यो से लिए जाते है जो स्वय सदिग्ध विश्वस्तता के स्रोत होते है। उदाहरणार्थ, देश के एक प्रमुख समाचार-पत्र मे एक समाचार मे दिए गए इस वक्तव्य पर विचार कीजिए . (आस्ट्रेलियन) ऊन की अनुमानित उपज 37,40,000 गाँठें है, जो कि रिकार्ड पर अधिकतम है। योग्य प्रेक्षको का विचार है कि खरगोशों के विनाश से (जो भेडों का घास खा जाते थे) उपज में 2,50,00,000 गाँठें बढ गई है।" समाचार मद से यह निश्चित करने का कोई ढग नही है कि कौन-सी सख्या ठीक है। तो भी प्रथम सख्या लगभग ठीक है, दूसरी सख्या अत्यन्त अशुद्ध है।

विभिन्न स्रोतों से प्राप्त आँकडो की तुलनात्मकता—जब आँकडे दो या अधिक स्रोतो से लिए जाते हैं तो प्रत्येक स्रोत की विश्वस्तता पर विचार करना आवश्यक है और इसके अतिरिक्त प्रयोग करने वाले को यह निश्चित करना जरूरी है कि विभिन्न स्रोतो से प्राप्त आँकडे तुलना योग्य है। आइए हम तुलना की कमी के कुछ कारणो की सूची बनाएँ।

(1) पदो की विभिन्न परिभाषाएँ प्रयोग मे लाई गई हो सकती हैं। कोयले का उत्पादन सयुक्त राज्य खान ब्यूरो द्वारा 2,000 पाउड के छोटे टनो मे दिया जाता है जब कि एक समय कोयले के निर्यात को विदेशी और घरेलू व्यापार ब्यूरो द्वारा 2,240 पाउड के बडे टनो मे दिखाया जाता था। छोटे टनो का अब दोनो ब्यूरो प्रयोग करते हैं। सयुक्त

15. नई परिभाषा और परिवर्तन का स्वरूप जनगणना के सयुक्त राज्य ब्यूरो, *यू० एस० सेन्सस ऑफ पापूलेशन*, 1950, खड II, *कैरेक्ट्रिस्टिक्स आफ दि पापूलेशन*, भाग 1, सयुक्त राज्य सारांश, पृष्ठ 9—10 मे दिए गए हैं।

राज्य के कच्ची और साफ चीनी के स्टाकों की रिपोर्ट कृषि विभाग द्वारा छोटे टनों मे दी जाती है, कच्ची चीनी के क्यूबा के स्टाक वीकली स्टॅटिस्टिकल शुगर ट्रेड जर्नल द्वारा स्पेनी टनों मे दिए जाते है। एक स्पेनी टन मे 2,271,64 अंग्रेजी पाउंड होते है। मानो ये तीन प्रकार के टन पर्याप्त मात्रा मे भ्रांति मे डालने वाले नही थे, पोतपरिवहन मे प्रयुक्त दो अन्य "टनों" की जानकारी प्राप्त करना आवश्यक है। ये कुल टन और नेट (या रजिस्टर्ड) टन है, जिनमे से प्रत्येक 100 घन फुट का प्रतिनिधि है। कुल टन खोखु (हल) की क्षमता तथा नौभार, स्टोर, यात्रियों, और कर्मी दल के लिए प्राप्त डेक पर घिरे हुए स्थान को कहते हैं, जबकि नेट टन कुल टनों मे से चालक मशीनों, ईंधन, कर्मी क्वार्टरों, स्वामी के केबिन और नौचालन स्थानों को निकाल कर आते है—दूसरे शब्दों मे, लगभग नौभार और यात्रियों के लिए प्राप्य स्थान।

लेखा की विभिन्न प्रणालियों के कारण, "लाभ" पद के विभिन्न उद्योगों मे विभिन्न अर्थ हो सकते है। रेल मार्ग का लाभ एक विभागीय स्टोर के लाभ से कही भिन्न हो सकता है। लगभग पूर्ण रूप से साझेदारी मे चलने वाले एक विशिष्ट उद्योग मे एक अनुसधानकर्ता ने पता किया कि बहुत-सी फर्मे कोई लाभ नही दिखा रही थी और फर्मों मे बड़े अन्तर विद्यमान थे। हिस्सेदार प्राय अपने आप को भरपूर वेतन दे रहे थे और इसलिए अध्ययन के लिए एक नए पद "लाभ तथा हिस्सेदारों के वेतन" को प्रयोग मे लाया गया। वय का वृत्त पिछले जन्मदिन के हिसाब से, निकटतम जन्मदिन के हिसाब से, या प्राच्य पद्धति के अनुसार, आगामी जन्मदिन के अनुसार दिया जा सकता है। अत वय के आंकड़ों की तुलनात्मकता वृत्त के आधारों द्वारा प्रभावित होती है।

(2) परिकलन या अनुमान की विभिन्न प्रणालियों का प्रयोग किया गया हो सकता है। उदाहरण के लिए, न्यूयार्क नगर पुलिस कमिश्नर के अनुसार 10 मार्च, 1966 और 7 अप्रैल, 1966 के बीच न्यूयार्क शहर मे चोरी और लूट की घटनाएँ लगभग दुगनी हो गईं। परन्तु 'वृद्धि' "केवल मात्र" रिपोर्ट करने की विधियों मे परिवर्तन के कारण थी। कई मामलों मे पहले महापराधों को उपापराधों के रूप मे रिपोर्ट किया जा चुका था।[16]

(3) प्रतिदर्श इस प्रकार चुने गए हो सकते है कि निष्कर्षों की तुलना नही की जा सकती। अथवा, सयोगवश, एक अध्ययन प्रतिदर्श पर आधारित रहा हो जब कि दूसरा पूर्णरूपेण गणन हो। हां, प्रतिदर्श का चुनाव इस प्रकार करना सभव है कि किसी अध्ययन के निष्कर्ष पूर्वकल्पित विचार के जबरदस्ती अनुकूल बैठाए जा सकें।

(4) गणन, सम्पादन, और सारणीकरण के सबध मे यथार्थता के विभिन्न स्तर रह सकते है।

(5) सभव हो सकता है कि समाविष्ट क्षेत्रों की दृष्टि से या निर्दिष्ट कालावधि की दृष्टि से स्रोत तुलना के योग्य न हों। यदि तैथिक अन्तर बहुत अधिक नही तो कभी-कभार तुलनाएँ की जा सकती हैं या समजन किए जा सकते हैं।

चाहे अन्वेषक प्राथमिक स्रोतों का प्रयोग कर रहा हो या गौण स्रोतों का, स्पष्ट अशुद्धियों और मुद्रण दोषों की तलाश मे रहना आवश्यक रहता है। उदाहरण के लिए, एक वर्ष एक गौण स्रोत द्वारा बताया गया कि महादेशीय सयुक्त राज्य मे 3,81,10,000

---

16 सयुक्त प्रेस, "न्यूयार्क सर्ज टू-थ आन क्राइम,' पैसिफिक स्टार्स एन्ड स्ट्रिप्स, 8 अप्रैल, 1966, पृष्ठ 3।

ग्रश्वशक्ति सभाव्य जल विद्युत् 90 प्रतिशत समय के लिए प्राप्त थी, जबकि 91,66,000 ग्रश्वशक्ति सभाव्य जल विद्युत् 50 प्रतिशत समय के लिए प्राप्य थी। यह स्पष्ट है कि 90 प्रतिशत समय की ग्रपेक्षा 50 प्रतिशत समय के लिए ग्रावश्यक तौर पर ग्रधिक सभाव्य ग्रश्वशक्ति प्राप्य होगी। प्रत्येक राज्य के लिए ग्रांकड़े दिए गए थे, ग्रौर यदि इन ब्यौरो को जोड़ा जाए तो प्रतीत होता है कि 5,91,66,000 ग्रश्वशक्ति सभाव्य जल शक्ति 50 प्रतिशत समय के लिए प्राप्य थी। स्पष्ट है कि यह मुद्रण की ग्रशुद्धि थी जो ग्रांकड़े छापते समय हो गई, या सभवत प्राथमिक स्रोत से ग्रा गई। ग्रांकड़ो के ग्रनुभवी प्रयोगकर्ता को इस प्रकार का स्पष्ट विरोधाभास तुरन्त दिखाई दे जाएगा।

3

सांख्यिकीय सारणियाँ

प्रस्तुति की विधियाँ

साख्यिकीय प्रस्तुति की चार विधियाँ उपलब्ध हैं। आँकडे (1) पाठ के एक अनुच्छेद मे समाविष्ट हो, (2) सारणी के रूप मे रखे हो, (3) अर्ध-सारणिक व्यवस्था मे रखे हो, अथवा (4) लेखाचित्री विधि द्वारा वर्णित हो।

पाठ प्रस्तुति—आँकडो और पाठ को मिलाना कोई विशेष प्रभावपूर्ण साधन नही है। क्योकि व्यक्ति को समस्त आँकडो के समुच्चय का अर्थ समझ मे आ सके, इससे पूर्व, यह आवश्यक है कि सारे अनुच्छेद को पढा जाए या कम से कम अवलोकन किया जाए। इस प्रकार से रखे हुए आँकडो को अधिकतर व्यक्ति आसानी से नही समझ सकते और पाठक के लिए वैयक्तिक आँकडो को अलग करना विशेष रूप से कठिन होता है। परन्तु इसमे यह लाभ है कि लेखक विशिष्ट आँकडो की ओर ध्यान दिला सकता है और इस प्रकार उन पर ज़ोर दे सकता है तथा महत्व की तुलनाओ की ओर ध्यान आकर्षित कर सकता है। पाठ प्रस्तुति का एक उदाहरण निम्न है

संयुक्त राज्य की 1960 की जनगणना के अनुसार कोलोरेडो मे 8,70,467 पुरुष और 8,83,480 स्त्रियाँ थी। पहाडी मण्डल मे सबसे अधिक जनसख्या वाले इस राज्य मे 1950 मे 6,65,149 पुरुष और 6,59,940 स्त्रियाँ थी। 1960 और 1950 की दोनो जनगणनाओ के समय पर जनसख्या मे कोलोरेडो के बाद एरीज़ोना था। इसमे 1960 मे 6,54,928 पुरुष और 6,47,223 स्त्रियाँ थी, 1950 की गणना के समय 3,79,059 पुरुष और 3,70,528 स्त्रियाँ थी। 1960 मे उटाह पहाडी राज्यो मे चौथे स्थान पर था जबकि 1950 मे यह तीसरे स्थान पर था। 1960 मे इसमे 4,44,926 पुरुष तथा 4,45,703 स्त्रियाँ थी, जबकि 1950 म इसमे 3,47,636 पुरुष और 3,41,226 स्त्रियाँ थी। न्यू मेक्सीको जो 1950 मे चौथे स्थान पर था 1960 मे उटाह को विस्थापित करके तीसरे स्थान पर आ गया। 1960 मे इसमे 4,79,770 पुरुष और 4,71,253 स्त्रियाँ थी जबकि 1950 मे इसमे 3,47,544 पुरुष और 3,33,643 स्त्रियाँ थी। मोनटाना, इडाहो, व्योमिंग और नेवादा दोनो 1960 और 1950 मे क्रमश पाँचवें, छठे, सातवें और आठवें स्थान पर थे। 1960 मे मोनटाना मे 3,43,743 पुरुष और 3,31,024 स्त्रियाँ थी, 1950 मे, इसमे 3,09,423 पुरुष और 2,81,603 स्त्रियाँ थी। इडाहो मे जिसमे 1960 मे 3,38,421 पुरुष और 3,28,770 स्त्रियाँ थी, एक दशाब्द पूर्व 3,03,237 पुरुष और 2,85,400 स्त्रियाँ थी। जनसख्या की दृष्टि से पहाडी राज्यो मे सबसे छोटे राज्य से अगले व्योमिंग मे 1960 मे 1,69,015 पुरुष और 1,61,051 स्त्रियाँ थी जबकि 1950 मे जनसख्या

1,54,853 पुरुष और 1 35 676 स्त्रियाँ थी। आठ पहाडी राज्यो मे सबसे कम जनसख्या वाला नेवादा था जिसमे 1960 मे 1,47,521 पुरुष और 1 37,757 स्त्रियाँ थी। दस वर्ष पूर्व इसमे 85,017 पुरुष और 75 066 स्त्रियाँ थी।

सारणिक निरूपण—वही आँकडे जो पूर्व के पाठ विवरण मे समाविष्ट थे सारणी 3 1 तथा 3 3 मे दिखाए गए है। साथ ही, प्रत्येक राज्य के लिए सारणियो मे लिंग अनुपात दिखाया है, जिसका अध्याय 7 मे वर्णन किया जाना है। साख्यिकीय आँकडो को बिठाने की यह विधि प्राय पाठ के प्रयोग से श्रेष्ठ है। एक सारणी अपने शीर्षक के साथ पूर्णत स्वत स्पष्ट होनी चाहिए। यद्यपि इसके साथ प्राय व्याख्या का अनुच्छेद या महत्त्वपूर्ण आँकडो की ओर ध्यान दिलाने वाला एक अनुच्छेद हो सकता है।

सारणी 3 1

1950 और 1960 मे पहाडी विभाग के राज्यों मे लिंग के अनुसार निवासियो की सख्या

राज्य	पुरुष		स्त्रियाँ		पुरुष प्रति 100 स्त्रियाँ, 1960
	1960	1950	1960	1950	
कोलोरडो	870 467	665,149	883,480	659,940	98 5
एरीजोना	654 928	379 059	647,223	370,528	101 2
उटाह	444 924	347,636	445,703	341,226	99 8
न्यू मेक्सीको..	479 770	347,554	471,253	333,643	101 8
मोनटाना	343 743	309,423	331,024	281,603	103 8
इडाहो	338 421	303,237	328,770	285,400	102 9
व्योमिंग ..	169,015	154,853	161 051	135,676	104 9
नेवादा..	147,521	85,017	137 757	75 066	107 1

1960 के लिए जनसख्या के आकड, सयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू०एस० सेन्सस आफ पापूलेशन *1960*, खण्ड 1, *कैरैक्टिरिस्टिक्स आफ दि पापूलेशन*, पृष्ठ XIII, प्रत्येक राज्य से सबधित भाग की सारणी A से उद्धृत 1950 के आँकड सयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू० एस० सन्सस आफ पापूलेशन *1950*, खण्ड 2 *कैरैक्ट्रिस्ट्रिक्स आफ दि पापूलेशन*, प्रत्येक राज्य से सम्बधित भाग की सारणी 13 से उद्धृत। पुरुष/100 स्त्रियाँ सयुक्त राज्य व्यापार विभाग, *ऐस्टैटिस्टिकल एब्सट्रैक्ट आफ दि यूनाइटेड स्टेट्स, 1964* यू० एस० जी० पी० ओ० वाशिंगठ डी० सी० 1964, पृष्ठ 21 से उद्धृत।

यह स्पष्ट दिखाई देता है कि सारणी पाठ विवरण से बहुत सक्षिप्त है क्योकि पक्ति और कालम शीर्षको से व्याख्यात्मक विषय को दोहराने की आवश्यकता नही रहती। क्योकि आँकडो के साथ कोई पाठ प्रस्तुत नही होता, इसलिए प्रस्तुति अधिक सक्षिप्त है। मदो की स्टब (बाएँ हाथ का कालम और उसका शीर्षक) और बक्स शीर्ष (अन्य कालमो के शीर्षको) म युक्तिपूर्ण व्यवस्था से सारणी स्पष्ट और पढने मे सरल हो जाती है। आँकडो के लिए स्तम्भो और पक्तियो के प्रयोग से तुलनाएँ सरल हो जाती है।

सारणी 3 2 मे एक सारणी के विभिन्न भाग कुछ अलग किए गए हैं और पहचान के लिए उन पर लेबल लगा दिए है। एक सारणी में कम से कम चार आवश्यक भाग होंगे शीर्षक, स्टब, कालम शीर्ष, तथा पिण्ड। एक प्रारम्भिक टिप्पणी (देखिए सारणी 3.5) तथा एक या अनेक पाद-टिप्पणियाँ, जैसे सारणी 3.2 मे, भी विद्यमान रह सकती हैं। यदि सारणी मे आँकडे मौलिक नही हैं तो एक स्रोत टिप्पणी भी दी जाती है जो कभी-कभी प्रारम्भिक टिप्पणी के साथ होती है परन्तु प्राय सारणी के नीचे, और यदि कोई पाद-टिप्पणियाँ विद्यमान हो तो सारणी की पाद-टिप्पणियो के नीचे होती है।

अर्ध-सारणिक निरूपण—जब किसी विवेचन मे केवल कुछेक आँकडो का प्रयोग होना है तो पाठ को तोडा जा सकता है और आँकडे निम्न प्रकार से दिए जा सकते हैं :

सयुक्त राज्य के कारखानो से मोटर गाडियो की बिक्री की सख्या थी

1962 मे 69,33,240.

1963 मे 76,37,728.

1964 मे 77,51,822

यह विधि प्राय प्रयोग नही की जाती, परन्तु यह इस दृष्टि से उपयोगी है कि आँकडे पाठ से ऐसे अलग कर दिये जाते हैं जैसे यदि उन्हे एक या दो वाक्यो मे दिया जाता तो न होते। प्रासगिक तौर पर, आँकडों की, यदि वे पाठ मे होते तो उसकी अपेक्षा अधिक शीघ्रता से तुलना की जा सकती है।

लेखाचित्री निरूपण—एक सीमित मात्रा मे जानकारी को शीघ्र प्रस्तुत करने के लिए लेखाचित्री साधन बहुत ही उपयोगी एव प्रभावपूर्ण है। अगले तीन अध्यायो मे वक्रो, दण्ड चार्टो, चित्रो, तथा अन्य सांख्यिकीय रेखाचित्रो का वर्णन है।

प्रमुख विचार

सारणियो के प्रकार—प्रयोग की दृष्टि मे, सारणियाँ दो प्रकार की है। प्रथम तो सामान्य या सदर्भ सारणियाँ हैं जो जानकारी के सग्रह के रूप मे प्रयुक्त होती हैं। ये प्राय. बहुत विस्तृत होती हैं और बहुत से पृष्ठ घेरती हैं। ऐसी सारणियो मे तुरन्त सदर्भ के लिए व्यवस्थित विस्तृत जानकारी मिलती है। सामान्य सारणी मे प्रविष्टियों की ऐसी व्यवस्था करने की कोई चेष्टा नही की जाती ताकि विशिष्ट मदो पर ज़ोर डाला जाए, न ही प्राय: कोई व्यक्ति कालमो और पक्तियो की व्यवस्था करने के लिए होता है ताकि अन्वेषक द्वारा वाछित तुलनाएँ महत्वपूर्ण हो। सदर्भ सारणी का प्राथमिक और प्रायः एकमात्र उद्देश्य आँकडो को इस प्रकार प्रस्तुत करने का होता है कि पाठक तुरन्त वैयक्तिक मदो को ढूँढ सके। सदर्भ या सामान्य सारणियाँ प्राय: एक परिशिष्ट मे या प्रकाशित रिपोर्ट के एक अलग भाग मे रखी जाती है।

दूसरे स्थान पर साराश या पाठ सारणियाँ हैं जो प्राय आकार मे अपेक्षाकृत छोटी होती हैं और जो जितना सभव है उतन प्रभावपूर्ण ढग से एक निष्कर्ष या कुछेक घनिष्ठ रूप से सबधित निष्कर्षों को दिखाने के लिए बनाई जाती हैं। जबकि सदर्भ सारणी स्टब और शीर्षक मे उपशीर्षको और उप-उपशीर्षको सहित कुछ जटिल हो सकती है, साराश सारणी बनावट मे अपेक्षाकृत सरल होनी चाहिए। यह प्राय· पाठ विवरण के साथ होती है और इसलिए पाठ सारणी भी कहलाती है। यदि एक पाठक से यह अपेक्षा की जाती है कि वह अपना ध्यान एक चालू सवाद से हटाकर एक सारणी पर लगाए तो यह आवश्यक है कि सारणी बहुत भयावह नही बल्कि सरल और समझने मे सरल हो। बहुत अधिक पाठको

सारणी 32

सयुक्त राज्य अमरीका के क्षेत्रो, अधीन क्षेत्रो, तथा अन्य क्षेत्रो की 1960 की जनसख्या तथा क्षेत्रफल } शीर्षक

क्षेत्र	जनसख्या		वर्ग मीलो मे कुल क्षेत्रफल
	सख्या	कुल का प्रतिशत	
कुल	183,285,009	100 00	3,628,150
महादेशीय सयुक्त राज्य	178,464,236	97 37	3,022,387
हवाई... .. .	632,772	0 35	6,424
अलास्का	226 167	0 12	586,400
अधीन क्षेत्र			
प्योर्टोरिको	2,349,544	1 28	3,435
गुग्राम	67,044	0 04	206
सयुक्त राज्य के अक्षत द्वीप	32 099	0 12	133
अमेरिकन समोग्रा . ..	20,051	0 01	76
मिडवे द्वीप	2,356	**	2
वेक द्वीप	1'097	**	3
अन्य द्वीप* . . .	504	**	37
नहर क्षेत्र†	42,122	0 0	553
कार्न द्वीप ≠	1,872	**	4
प्रशान्त द्वीपो का न्यास क्षेत्र ..	70,724	0 04	8,484
विदेशो मे जनसख्या‡	1,374,421	0 75	. .

खाना शीर्ष; स्टब; पिण्ड

पाद-टिप्पणियाँ

* इस श्रेणी मे सम्मिलित द्वीपो, तटो समुद्री चटटानो, और पुष्प चटटानो की सूची के लिए नीचे दिए स्रोत को देखिए। कुछ द्वीपो का क्षेत्रफल उपलब्ध नही था।

† पनामा गणराज्य मे समझौते के द्वारा सयुक्त राज्य के अधीन।

≠ नाइकेरेग्वा गणराज्य से पट्टे पर लिये।

‡ निजी व्यापार, भ्रमण इत्यादि के लिए विदेशो मे गए नागरिको को छोड कर, जिन की उनके निवास के सामान्य स्थान पर गणना की गई है।

** एक प्रतिशत के सौवें भाग से कम।

स्रोत नोट: सयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो, यू० एस० सेन्सस आफ पापूलेशन *1960*, खड 1, *कैरेक्टिरस्टिकस आफ दि पापूलेशन* भाग A *नम्बर आफ इनहैबिटेन्ट्स*, सारणी 1 पृष्ठ 1 3 से लिए गए आकड।

की रिपोर्ट म सब सारणियो को लाँघ जाने की प्रवृत्ति होती है। इस प्रवृत्ति का सफलतापूर्वक निराकरण तभी हो सकता है जब सारणियाँ इतनी सरल बनी हुई प्रतीत हो कि वे रुचिकर हो सकें और जब ऐसे लेखाचित्र दिए जाएँ जो आकर्षक हो और बहुत जटिल न हो। साराश सारणी को जो उद्देश्य पूर्ण करना होता है उसके कारण से उसमे दिखाई गई मदो की जहाँ वाछित हो वहा ज़ोर डालने की दृष्टि से व्यवस्था की जाएगी और कालम और पक्तियाँ इस प्रकार रखी जाएँगी ताकि अत्यन्त महत्त्व की तुलनाएँ सरलता से हो सकें।

एक साराश सारणी प्राय आवश्यक तौर पर एक या अधिक सदर्भ सारणियों मे रखी जानकारी को सक्षिप्त करने का परिणाम होती है, यद्यपि कभी-कभी एक साराश सारणी, पूर्णतया या अशरूपेण, एक या अनेक अन्य साराश सारणियों पर आधारित हो सकती है। कभी-कभी एक साराश सारणी सीधे अनुसूची रूप मे रखे आँकडो से बनाई जा सकती है। एक या अनेक सारणियों से कोई अन्य सारणी बनाने मे प्रयोग की जा सकने वाली विधियाँ निम्नाकित है

1. वे आँकडे जो वर्तमान समस्या के लिए महत्त्वपूर्ण नही हैं, छोडे जा सकते है। इस प्रकार यद्यपि लगभग 20 राज्य ऐसे है जो बिटूमनी कोयले की पर्याप्त मात्राएँ उत्पादित करते हैं तो भी केवल 10 या 12 प्रमुख राज्यों के आँकडे अलग से दिखाना पर्याप्त हो सकता है।

2. विस्तृत आँकडो को समूहो मे मिलाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, राज्यो के अनुसार दिखाए गए आँकडो को भौगोलिक विभागो मे इकट्ठा किया जा सकता है। पुनश्च, अलग-अलग उद्योगो के अनुसार दिखाए गए आँकडों को व्यापक औद्योगिक समूहो मे मिलाया जा सकता है। उदाहरण के लिए, ईट, टाइल, और टेरा कोटा उत्पादो का विनिर्माण, सीमेन्ट, काँच और मिट्टी के बर्तनो का विनिर्माण, तथा सगमरमर, ग्रेफाइट, स्लेट, और ऐसे उत्पादो को खानो से निकालना, को बडे सवर्ग "मिट्टी, पत्थर, तथा काँच के उत्पाद" मे मिलाया जा सकता है।

3 आँकडो की व्यवस्था बदली जा सकती है। इस प्रकार नगरो की वर्णक्रम के अनुसार व्यवस्था के स्थान पर नगरपालिका के आकार के अनुसार व्यवस्था की जा सकती है।

4 मौलिक पूर्ण आँकडो के स्थान पर या उनके अतिरिक्त, औसत, अनुपात, प्रतिशतता या अन्य परिकलित माप दिए जा सकते है। प्रतिशतताओ का एक कालम सारणी 3 4 मे दिखाया गया है। यह देखने मे आएगा कि ये आँकडे उस सामग्री की व्याख्या सरल बना देत हैं जिस पर वे आधारित हैं।

तुलनाएँ—जबकि कालमो और पक्तियों मे व्यवस्था आँकडो की तुलना को आसान बना देती है, इस प्रकार के प्रतिपादन से महत्त्वपूर्ण तुलनाओ पर स्वयमेव ध्यान केन्द्रित नही होता। जिन आँकडो की तुलना की जानी है उन्हे निकटस्थ कालमों या पक्तियों मे रखकर यह किया जा सकता है। इस प्रकार यह देखा जा सकता है कि पुरुषो या स्त्रियो के लिए दो जनगणनाओं मे प्राप्त आँकडो की तुलना सारणी 3 1 से सरल हो गई है जबकि सारणी 3 3 मे उनमे से प्रत्येक जनगणना मे पुरुषों और स्त्रियों की सख्या की तुलना करना आसान हो जाता है।

इन सारणियो मे से प्रत्येक भली-भाँति निर्मित की गई है, परन्तु प्रत्येक एक भिन्न तुलना पर ध्यान केन्द्रित करती है। सारणी निर्माण मे सबसे अधिक महत्त्वपूर्ण विचारों मे से एक यह है कि जिन आँकडो की तुलना करनी है, उन्हे सन्निकट सन्निधि मे रखना आवश्यक है। यह स्मरण रखना चाहिए कि अको की दो या अधिक श्रेणियो की तब अधिक सरलता से तुलना होती है जब उन्हे साथ की पक्तियो मे रखने की अपेक्षा साथ के कॉलमो मे रखा जाए और किसी श्रेणी के अको की एक दूसरे के साथ उस समय अधिक

सरलता से तुलना होती है जब उन्होंने एक पक्ति मे रखने की अपेक्षा उनकी एक कॉलम म व्यवस्था की जाए।

अनुपातों, प्रतिशतताओं औसतो या अन्य परिकलित सम्बन्धो के प्रयोग से तुलनाएँ बहुत सरल हो सकती है। अनुपात सारणी 7 4 म दिखाए गए हैं, प्रतिशतताएँ

सारणी 3 3

1950 और 1960 मे पहाडी विभाग के राज्यो मे लिंगानुसार निवासियो की सख्या

राज्य	1960		1950		1960
	पुरुष	स्त्रियाँ	पुरुष	स्त्रियाँ	पुरुष/100 स्त्रियाँ
कोलोरेडो	870 467	883,480	665,149	659,940	98 5
एरीज़ोना	654,928	647,223	379,059	370,528	101 5
उटाह्	444,924	445,703	347,636	341,226	99 8
न्यू मेक्सीको	479,770	471,253	347,554	333,643	101 8
मोनटाना	343,743	331,024	309,423	281,603	103 8
इडाहो	338,421	328,770	303,237	285,400	102 9
व्योमिंग	169,015	161,051	154,853	135,676	104 9
नेवादा	147,521	137,757	85,017	75,066	107 1

1960 के जनसख्या आँकड सयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू० एस० सेंसस आफ पापूलेशन 1960 खण्ड I कैरैक्टिरिस्टिक्स आफ दि पापूलेशन, पष्ठ XIII, प्रत्येक राज्य मे सम्बन्धित भाग की सारणी ए मे लिए गए 1950 के आंकड सयक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू० एस० सेन्सस आफ पापूलशन 1950 खण्ड II कैरैक्टिरिस्टिक्स आफ दि पापूलेशपन, प्रत्येक राज्य से सम्बन्धित भाग की सारणी 13 से लिए गए। पुरुष/100 स्त्रिया सयुक्त राज्य व्यापार विभाग, स्टैटिस्टिकल एब्स्ट्रैक्ट आफ दि यनाइटिड स्टटस, 1964, यू० एस० जी० पी० ओ०, वाशिंगटन डी० सी०, 1964 पष्ठ 21 से उदधत।

सारणी 3 4

1960 में सयुक्त राज्य की शहरी जनसख्या की क्षेत्रानुसार रचना

क्षेत्र	कुल शहरी सख्या	शहरी क्षेत्रो के भीतर	
		सख्या	प्रतिशत
उत्तरपूर्व	35,840,140	30,611,324	85 4
उत्तरकेन्द्रीय	35,481,254	26,550 170	74 8
दक्षिण	32,160 250	21,501,114	66 9
पश्चिम	21,787 106	17,185,879	78 9
कुल . ..	125 268,750	95,848,487	76 5

आँकड सयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू० एस० सेन्सस आफ पापूलेशन 1960 खण्ड I, कैरैक्टिरिस्टिक्स आफ दि पापूलेशन, भाग ए, नम्बर आफ इनहैबिटैंटस, सारणी 17, पृष्ठ 1—26 मे लिए गए।

जो वास्तव मे अनुपात का एक प्रकार है (अध्याय 7 देखिए), सारणी 3 2 तथा 3 4 मे सम्मिलित है। अनुपात तथा प्रतिशतताएँ उस समय विशेषतः उपयोगी होती हैं जब तुलना किए जाने वाले पूर्णांक बहुत हो। ध्यान दीजिए कि सारणी 3 2 तथा 3.4 मे प्रतिशतताओ के प्रयोग से अपेक्षाकृत बृहत् जनसख्या के आँकडो की सहज ही तुलना की जा सकती है। जब सारणियों मे मासिक घट-बढ दिखाई जाती है और अधिकतम तथा निम्नतम दोनों नोट की जाती है, तो तुलना के लिए "अधितम के प्रतिशत के रूप मे निम्नतम" यह अतिरिक्त प्रविष्टि उपयोगी है। उदाहरणार्थ, मूल अंग्रेजी पुस्तक का द्वितीय सस्करण, पृष्ठ 58 देखिए। श्रीमने सारणी 14 1, 14 3, तथा 14 7 मे दिखाई गई है।

बल—किसी मद को सारणी मे समुचित स्थान पर रखने से उस पर उचित बल देना सभव हो जाता है, क्योकि पाश्चात्य लोग बाएँ से दाएँ और ऊपर से नीचे पढते हैं, परिणाम यह निकलता है कि स्टब मे सबसे महत्त्व का स्थान चोटी पर होता है और बक्स-शीर्ष मे सबसे महत्त्व की स्थिति बाई ओर होती है, इसी प्रकार सबसे कम महत्त्व का स्थान स्टब के तल मे और बक्स-शीर्ष के दाई ओर होना है। नोट कीजिए कि सारणी 3 3 मे इस सिद्धान्त के अनुसार पुरुषों पर बल दिया गया है, न कि स्त्रियो पर, और 1960 को 1950 की अपेक्षा अधिक महत्वपूर्ण स्थान दिया गया है।

सारणी 3 5

1963—64 मे समुद्रपार देशो से संयुक्त राज्य अमरीका मे विदेशी आगन्तुक*
(यात्री हज़ारो मे)

समुद्रपार क्षेत्र तथा वर्ष	कुल	व्यवसाय	विहार	पारगमन	विद्यार्थी
समुद्रपार देशो से आए कुल :					
1964	1,098	150	807	110	31
1963	847	122	613	84	28
यूरोप तथा भूमध्यसागरीय :					
1964	527	93	376	54	4
1963	398	75	278	40	5
वैस्ट इडीज, केन्द्रीय तथा दक्षिण अमरीका .					
1964	414	21	346	35	12
1963	332	20	273	28	11
अन्य समुद्रपार क्षेत्र					
1964	157	36	85	21	15
1963	117	27	62	16	12

*कैनेडा और मैक्सीको से आगन्तुको को छोडकर, सयुक्त राज्य मे नियुक्त विदेशी सरकारी व्यक्तियो तथा विदेशी व्यवसायियो को छोडकर।

सर्वे आफ करन्ट बिजनेस, जून 1965, खण्ड 45, न० 6, पृष्ठ 28 मे उद्धृत, संयुक्त राज्य न्याय, आप्रवास एव देशीकरण सेवा विभाग से लिए आंकडे।

जोड़ प्रायः अधिकतम महत्व के या न्यूनतम महत्व के स्थान पर रखे जाते हैं, यह इस बात पर निर्भर करता है कि उन पर बल देना वांछित है अथवा नहीं। जब "जोड़" स्तंभ में चोटी पर दिखाया जाता है तो, सारणी 3.2 के समान, अंकों की पहली पंक्ति के नीचे एक रेखा खींचनी चाहिए। यदि जोड़ की प्रविष्टि स्तंभ के तल में है तो सारणी 3.4 के समान इन अंकों के ऊपर रेखा खींची जाती है। एक वैकल्पिक ढंग यह है कि, सारणी 3.5 के समान, जोड़ों को अलग करने के लिए रेखा की अपेक्षा रिक्त स्थान छोड़ा जाता है। स्तंभ में "जोड़" शब्द को चाहे इसकी स्थिति कैसी ही हो यथासंभव जगह छोड़ कर दिखाना चाहिए।

अलग-अलग अंकों या कालमों या अंकों की पंक्तियों पर भी सारणी 3.5 के समान मोटे टाइप के प्रयोग से बल डाला जा सकता है। जब रोजगार, बिक्री या अन्य कारकों के मासिक उतार-चढ़ाव दिखाए जाते हैं तो अधिकतम अंक को मोटे टाइप में दिखाया जा सकता है और न्यूनतम को तिरछे टाइप में रखा जा सकता है। प्रायः तिरछे टाइप का प्रयोग बल की अपेक्षा अन्तर के संकेत के लिए होता है। अतः एग्रीकल्चरल स्टेटिस्टिक्स के कुछ निर्गमों में जनगणना के अंक तिरछे टाइप में हैं जबकि शेष सभी अंक संयुक्त राज्य कृषि विभाग द्वारा संकलित या अनुमानित हैं। कभी-कभी तिरछे टाइप का प्रयोग घाटों, अर्थात् जोड़ निकालने के लिए घटाई जाने वाली मदों तथा जोड़ में से निकाली जाने वाली मदों का दिखाने के लिए भी किया जाता है।

स्तंभ में मदों की व्यवस्था तथा शीर्षक—एकत्र किए जा सकने वाले सांख्यिकीय आँकड़ों के मूलभूत स्वभाव का विचार करके यह नोट किया गया था (पृष्ठ 3) कि आँकड़े भौगोलिक, तैथिक, गुणात्मक या मात्रात्मक वर्गों की ओर संकेत कर सकते हैं। अब हमारी रुचि उन विधियों में है जिन्हें सारणी के स्तंभ या बक्स शीर्ष में मदों की व्यवस्था करने में प्रयुक्त किया जा सकता है। व्यवस्था की विधि का आंशिक रूप से आँकड़ों के स्वभाव (मसलन भौगोलिक, तैथिक, गुणात्मक या मात्रात्मक) से तथा आंशिक तौर पर इस विचार से कि आँकड़े संदर्भ सारणी में प्रकट होते हैं अथवा सारांश सारणी में, निर्धारण होगा। *व्यवस्था की कई विभिन्न विधियाँ प्रयोग में लाई जा सकती हैं।*

वर्णानुक्रमिक—व्यवस्था की यह विधि एक सामान्य सारणी में प्रयोग के लिए प्रशंसनीय ढंग से लागू की जाती है क्योंकि इससे वैयक्तिक मदों को आसानी से ढूँढा जा सकता है। स्पष्ट ही मूल पाठ सारणियों के लिए यह उपयोगी विधि नहीं है। इसका केवल उन श्रेणियों के लिए प्रयोग हो सकता है जिनका भौगोलिक या गुणात्मक दृष्टि से वर्गीकरण हुआ है।

भौगोलिक—व्यवस्था की भौगोलिक विधि का भौगोलिक दृष्टि से वर्गीकृत श्रेणियों के लिए प्रयोग किया जा सकता है, परन्तु इसका केवल तभी अनुप्रयोग किया जा सकता है जब एक मान्य प्रयोग स्थापित हो चुका हो और केवल तभी इसका प्रयोग किया जाना चाहिए जब सांख्यिकीविद को विश्वास हो कि उसके पाठक वर्गीकरण से परिचित हैं। संयुक्त राज्य और विभिन्न राज्यों के भौगोलिक विभागों का प्रथागत क्रम 1960 के संयुक्त राज्य जनगणना के भाग I में संयुक्त राज्य सारांश की बहुत सी सारणियों में देखा जा सकता है। यद्यपि जनगणना में राज्यों के लिए व्यवस्था की भौगोलिक विधि का प्रायः प्रयोग किया गया है, तथापि इसमें किसी राज्य की काउंटियों की लगभग निरपवाद रूप से वर्णानुक्रम सूची बनाई गई है। संदर्भ की सुविधा के लिए एक सामान्य सारणी में भौगोलिक व्यवस्था

मुश्किल से ही उतनी सन्तोषजनक होती है जितनी कि वर्णक्रम की व्यवस्था। यद्यपि यह दलील दी जा सकती है कि भौगोलिक व्यवस्था मे प्राय साथ लगने वाले, और तुलना योग्य क्षेत्रो को साथ-साथ रखा जाता है अत यह स्पष्ट होना आवश्यक है कि भौगोलिक व्यवस्था मे सदा ऐसा नही होता। यह एक साराश सारणी के लिए प्राय व्यवस्था की अच्छी विधि नहीं है क्योकि इस व्यवस्था मे महत्त्वपूर्ण मदो को महत्त्वपूर्ण स्थितियो मे नहीं रखा जाता।

परिमाण—एक साराश सारणी में मदो की व्यवस्था की एक अति सन्तोषजनक विधि उन्हें आकार के अनुसार सूची में रखने की है ताकि प्राय. सबसे बडी मद सर्वप्रथम हो परन्तु कभी-कभी इसमे विपरीत क्रम मे भी रखा जाता है। सारणी 3 3 के स्टब मे दिखाए गए राज्य 1950 मे परिमाण के क्रम से दिए गए है। जब सबसे बडी मद सर्वप्रथम रखी जाती है तो (सख्या की दृष्टि से) सबसे महत्त्वपूर्ण मदो को सबसे अधिक महत्त्व की स्थितियो में रखा जाता है। एक सामान्य सारणी मे आकार के अनुसार मदो की व्यवस्था उपयोगी नहीं है क्योकि इससे वैयक्तिक मदो को ढूँढना उतना सरल नही होता जितना वर्णानुक्रम व्यवस्था मे होता है। भौगोलिक या गुणात्मक दृष्टि से वर्गीकृत आँकडो की परिमाण के अनुसार व्यवस्था की जा सकती है। इसी प्रकार कालक्रम से वर्गीकृत आँकडों की भी व्यवस्था की जा सकती है, परन्तु जब उनकी परिमाण के अनुसार व्यवस्था की जाती है तो उनका कालक्रम नष्ट हो जाता है।

ऐतिहासिक—कालक्रम के आधार पर वर्गीकृत आँकडो की प्राय कालक्रमानुसार या ऐतिहासिक दृष्टि से व्यवस्था की जाएगी। जब वर्षों की सूची बनाई जाती है तो सबसे हाल की या सबसे पहले की तिथि सर्वप्रथम दिखाई जा सकती है। परन्तु महीनो की सूची प्रथानुसार सबसे पहले जनवरी से बनाई जाती है। जब ऐतिहासिक व्यवस्था की आवश्यकता होती है तो यह या तो सामान्य या मूल पाठ सारणियो में प्रयोग की जा सकती है। ऐतिहासिक व्यवस्था का प्रयोग अध्याय 12 की विभिन्न सारणियो के स्टब मे किया गया है।

प्रथागत—कुछ आँकडो की जो मौलिक तौर पर गुणात्मक होते हैं, प्राय प्रथागत वर्गों के अनुसार व्यवस्था की जाती है। निर्यातो और आयातो का प्राय पाँच श्रेणियो में वर्गीकरण किया जाता है—कच्चा माल, कच्चा खाद्य, विनिर्मित खाद्य, अर्ध-विनिर्माण तथा अन्तिम विनिर्माण। सयुक्त राज्य अमरीका की जनसख्या को जब तथाकथित "जाति के मूलस्थान" के आधार पर वर्गो मे बाँटा जाता है तो इसका प्राय निम्न वर्गो म उपविभाजन होता है : देशज गोरे, विदेश मे जन्मे गोरे नीग्रो, भारतीय, जापानी, चीनी, तथा "शेष सब"। इनकी प्राय दिए गए क्रम से सूची बनाई जाती है। जब सारणी मे एक "शेष सब" वर्ग आता है तो यह प्राय स्टब मे सबसे नीचे या बक्स शीर्ष में दाईं ओर रखा जाता है। अच्छा सांख्यिकीय व्यवहार कहता है कि "शेष सब", "मिश्रित", या "अप्रतिवेदित" वर्ग मे अपेक्षाकृत छोटी सख्याएँ सम्मिलित होनी चाहिएँ, अन्यथा वर्गीकरण की पर्याप्तता या आँकडो के एकत्रीकरण की यथार्थता पर प्रश्न उठाया जा सकता है। प्रथागत वर्गो के अनुसार व्यवस्था या तो मूल पाठ सारणी या सकेत सारणी के लिए उचित है। परिमाणात्मक आँकडो की वर्गों मे व्यवस्था की जा सकती है, जैसा कि सारणी 8.6 के स्टब मे दिखाया गया है। ऐसी व्यवस्थाएं प्राय सबसे छोटी सख्या के मूल्य के वर्ग से प्रारम्भ होती हैं और मूल पाठ सारणी या सकेत सारणी मे प्रयुक्त की जा सकती है।

क्रमिक—मदो को इस प्रकार रखा जाता है कि अन्तिम अक पहले दिए गए अकों से तर्कसगत ढग से विकसित होता है। उत्तरोत्तर व्यवस्था का एक उदाहरण एक सारणी

के बक्स शीर्ष में दिखाया गया था जिसमें एक वर्ष में संयुक्त राज्य में हड़तालों की संख्या के मासिक आँकड़े प्रस्तुत किए गए। बक्स शीर्ष में उत्तरोत्तर शीर्षक थे

पूर्व मास से चालू	मास में प्रारम्भ	मास के दौरान चल रही	मास में समाप्त	मास के अन्त में शेष

उत्तरोत्तर व्यवस्था मूल पाठ या संकेत सारणी दोनों के लिए उपयुक्त है।

संख्यात्मक—नगरों के वार्डों का नाम प्राय वार्ड 1, वार्ड 2, इत्यादि रखा जाता है। जब ऐसे उपविभागों के लिए आँकड़े दिखाए जाते हैं तो प्राय संख्यात्मक व्यवस्था का अनुसरण किया जाता है। कभी-कभी काउन्टियों की प्रसीमाएँ और जिलों की संख्याएँ लगी होती है, कारखाने के विभागों और विक्रेताओं के इलाकों या विक्रय क्षेत्रों को भी संख्यात्मक नामों से पहचाना जा सकता है। *यह विधि मूल पाठ या संकेत सारणी किसी में भी आ सकती है।* श्रेणियों को दी गई संख्याएँ किसी आधारभूत व्यवस्था को पहचानने में सहायक प्राय लेबल मात्र होती हैं। उदाहरणार्थ, एक जूते के कारखाने में, विभाग 1 कटाई विभाग था, विभाग 2 फिटिंग विभाग, विभाग 3 लास्टिंग विभाग, इत्यादि।

व्यवस्था की विभिन्न विधियाँ प्रयोग करते समय याद रखिए कि संकेत सारणी में संकेत की अधिकतम सुविधा की दृष्टि से मदों की व्यवस्था होनी चाहिए, जब कि मूल पाठ सारणी में महत्त्वपूर्ण मदों पर बल देने और उचित तुलनाओं पर बल देने की दृष्टि से व्यवस्था होनी चाहिए।

सारणी निर्माण का ब्यौरा

शीर्षक तथा पहचान—प्रत्येक सारणी के साथ एक शीर्षक होना चाहिए और यह रीति के तौर पर सारणी के ऊपर रखा जाता है। शीर्षक की शब्द-रचना स्पष्ट होनी चाहिए और इसे संक्षेप में यह बताना चाहिए कि अधिक महत्त्वपूर्ण बातें पहले कही जाएँ और मदों की किस प्रकार व्यवस्था की गई है और कौन-सी कालावधि ली गई है इनसे संबधित वक्तव्य अन्त की ओर रखे जाएँ। प्राय शीर्षक क्रम से बताता है : क्या, कहाँ, कैसे वर्गीकृत, और कब। शीर्षकों के उदाहरण इस अध्याय की विभिन्न सारणियों में दिखाए गए हैं। यह ध्यान दिया जाए कि जब शीर्षक में कई पंक्तियों के प्रयोग की आवश्यकता होती है तो एक *विपर्यस्थ सूची-स्तम्भ व्यवस्था का प्रयोग किया जाता है।*

यदि शीर्षक लम्बा है तो प्रमुख शीर्षक के ऊपर "सूचक शीर्षक" रखना, या कभी-कभी पूर्ण शीर्षक के स्थान पर सूचक शीर्षक रखना लाभकारी हो सकता है। यह छोटा शीर्षक सारणी में आँकड़ों के केवल मात्र सामान्य स्वभाव को बताता है। सारणी 7 1 के लिए एक सूचक शीर्षक "1963 और 1964 में संयुक्त राज्य में नए निर्माण" हो सकता है।

जब किसी अध्ययन में एक से अधिक सारणियाँ सम्मिलित हों तो सारणियों को लगातार संख्याएँ देना वांछित है ताकि प्रत्येक को शीर्षक के स्थान पर संख्या से पहचाना जा सके।

प्रारम्भिक तथा पाद-टिप्पणियाँ—एक सारणी के साथ एक प्रारम्भिक टिप्पणी, एक *या अधिक पाद-टिप्पणियाँ* और एक स्रोत टिप्पणी संलग्न हो सकती है। प्रारम्भिक टिप्पणी ठीक शीर्षक के नीचे और छोटे-मोटे कम महत्व के टाइप में रखी जाती है। प्रारम्भिक

टिप्पणी मे सम्पूर्ण सारणी या इसके महत्त्वपूर्ण भाग के सम्बन्ध मे व्याख्या होती है, जैसा कि सारणी 3 5 मे है।

वैयक्तिक अको या एक कॉलम या अको की पक्ति के सबध की व्याख्या पाद-टिप्पणियो मे दी जानी चाहिए। स्टब प्रविष्टियो और कालम शीर्षको के सबध की पाद-टिप्पणियो का सकेत सख्याओ द्वारा किया जा सकता है, परन्तु अको से सम्बन्धित पाद-टिप्पणियो की पहचान किसी चिह्न (*, †, ‡, ‡, इत्यादि) से होनी चाहिए, जैसा कि सारणी 3 2 मे है, या किसी अक्षर से, परन्तु अधिमानत किसी सख्या द्वारा नही। इस पुस्तक मे अको, स्टब प्रविष्टियो, कॉलम शीर्षको और सारणी शीर्षको से सबधित पाद-टिप्पणियो के लिए चिह्न प्रयुक्त किए गए है।

स्रोत-टिप्पणियाँ—जैसे पहले सकेत किया गया है, स्रोत टिप्पणी शीर्षक के नीचे या पाद-टिप्पणियो के नीचे आ सकती है। इस पाठ मे प्राय दूसरी कार्य-प्रणाली का अनुकरण किया गया है। सारणी मे रखे गए आँकडे प्राय वही सामग्री नही होगी जो अन्वेषक ने इकट्ठी की है। प्राय अक एक या अधिक प्रकाशित या अप्रकाशित स्रोतो से लिए गए होगे। स्रोत-टिप्पणी पूर्ण होनी चाहिए और इसमे लेखक, शीर्षक, ग्रथ, पृष्ठ, प्रकाशक, तथा तिथि देने चाहिएँ। उद्धृत आँकडो के स्रोत का उल्लेख करना शिष्टता मात्र ही नही है, वरन् इस जानकारी मे पाठक को आँकडो की विश्वस्तता का कुछ विचार प्राप्त होता है और उसके लिए उद्धृत अको की यथार्थता आँकडो के लिए या अतिरिक्त जानकारी प्राप्त करने के लिए मौलिक स्रोत देखना सभव हो जाता है।

कभी-कभी आँकडे प्राथमिक स्रोत की अपेक्षा गौण स्रोत से लिए जाते है, क्योकि गौण स्रोत अधिक सुविधाजनक हो सकता है। ऐसी स्थिति मे दोनो स्रोतो का उल्लेख करना वाछित हो सकता है, उदाहरण के लिए, ' स्रोत : नेशनल बोर्ड ऑफ फायर अडरराइटर्ज, जैसाकि *स्टैटिस्टिकलऐब्स्ट्रैक्ट ऑफ दि यूनाइटेड स्टेट्स*, 1964 मे पृष्ठ 482 पर उद्धृत है।" सारणी 3 5 देखिए।

एक सारणी के लिए आँकडे कभी-कभी दो या अधिक विभिन्न स्रोतो से लिए जा सकते हैं। जब ऐसा किया जाता है तो यह सावधानी रखना आवश्यक है कि आँकडे तुलना योग्य हो। आँकडो की तुलनात्मकता के महत्त्व का विवरण अध्याय 2 मे दिया गया है। इस विषय पर इस समय अधिक कहना आवश्यक नही है।

जब किसी स्रोत मे स्पष्ट अशुद्धियाँ मिलती है तो तथ्य की ओर ध्यान देना अच्छा है। एक बार मासिक लेबर रिव्यू मे दि ओरियन्टल ईकानोमिस्ट से एक सारणी छापी गई जिसमे दिखाया गया कि एक वर्ष मे जापान मे 10 उद्योगो मे कुल वेतन 64,73,40,199 येन था, परन्तु एक पाद-टिप्पणी मे सकेत किया गया कि यदि 10 उद्योगो मे से प्रत्येक के लिए दिए गए अको को जोडा जाए तो परिणाम 64,74,30,199 येन है।

प्रतिशतताएँ—जब किसी सारणी मे प्रतिशतता का प्रयोग होता है तो स्टब या शीर्षक प्रविष्टि मे स्पष्ट सकेत होना चाहिए कि प्रतिशतता का सबध किन आँकडो से है। इस प्रकार केवल "प्रतिशत" शब्द का परिहार होना चाहिए, इसके स्थान पर "योग का प्रतिशत" "वृद्धि या कमी का प्रतिशत," इत्यादि कहे। कभी कभी सारणियों को "संख्या" विभाग (पूर्ण अको को दिखाने वाला) और "प्रतिशत" विभाग मे बाँटा जाता है, जैसा सारणी 8 6 मे है। इस सारणी और सारणी 7 2 मे प्रतिशतताओ की ओर सकेत करने वाले पर्याप्त शीर्षको के प्रयोग का उदाहरण है।

जब अलग अलग प्रतिशतताएँ एक प्रतिशत के दसवें भाग तक ठीक लिखी जाती हैं, जैसाकि रिवाज है, तो जोड प्राय 100 0 से थोडा सा अधिक या कम होगा क्योंकि पूर्णांकन करते समय धनात्मक या ऋणात्मक शेप इकट्ठे किए जाते है। यदि प्रतिशतताएँ एक प्रतिशत के सौवे या हजारवे भाग तक दर्ज की जाएँ तो जोड 100 0 के अधिक निकट होगा। यद्यपि "योग का प्रतिशत" कालम का जोड 100 0 से थोडा अधिक या कम हो तो भी जोड 100 0 के बराबर दिखाया जाता है, क्योंकि यदि विस्तार मे हिसाब किया जाए तो अलग-अलग प्रतिशतता का यही परिणाम होगा। यदि कोई जोड 99 8 से कम या 100 2 से अधिक बनता है तो गलती देखने के लिए गणनों को पुन देखना उचित होता है।

सख्याओ का पूर्णांकन—भ्राति दूर करने और तुलनाएँ सरल बनाने के लिए बहुत से अको की सख्याओ का पूर्णांकन किया जा सकता है। सख्याओ का उस समय भी पूर्णांकन किया जा सकता है जबकि सकलनकर्ता यह अनुभव करता है कि वे अतिम अक तक सही न होकर केवल हजारो या लाखो के रूप मे सही है। इस तथ्य की ओर ध्यान दिलाने के लिए कि वे *अनुमान थे सारणी 17.2 मे दिखाए गए उत्पादन अको का पूर्णांकन किया गया (परन्तु कोई अक छोड़े नही गए)।*

जब सख्याओ का पूर्णांकन किया जाता है तो इस सबध का कथन प्रारम्भिक टिप्पणी मे या स्टब मे अथवा बक्स शीर्ष मे किया जाना चाहिए। शब्दावली हो सकती है, " , दस लाखो मे," "0,00,000 छोड कर," इत्यादि। सारणी 3 6, 7.1 तथा 7 2 मे पूर्णांकित सख्याएँ है और इस तथ्य का उल्लेख प्रारम्भिक टिप्पणी मे या उचित बक्स-शीर्ष मे किया गया है।

उदाहरण के लिए, यदि किन्ही आँकडो की श्रेणी को हजार डालरो मे व्यक्त करना है तो पूर्णांकन निकटतम हजार मे किया जाता है। इस प्रकार 2,648,302 डालर, 2,648 (हजार) डालर हो जाएगा और 7,226,782 डालर 7,227 (हजार) डालर बन जाएगा। यदि शीर्षक "हजार डालरो मे" सारणी के बक्स शीर्ष (या स्टब) मे प्रारम्भिक टिप्पणी के रूप मे आ जाता है तो डालर चिह्न आवश्यक नही रहता।

प्राय पूर्णांकन से कोई बडी त्रुटि *नही आ जाती। यदि सख्याओ की प्रत्येक श्रेणी* का पूर्णांकन किया जाए तो कुछ बढ जाएँगी और कुछ कम हो जाएँगी, परन्तु इस प्रकार आई हुई त्रुटियो मे एक दूसरे का प्रतिसतुलन करने की प्रवृत्ति होती है। साथ ही यह अनुभव किया जा सकता है कि किसी बडी सख्या के सब अको को दिखाना भ्रामक शुद्धता का आभास देता है। उदाहरणार्थ, 1960 मे सयुक्त राज्य की जनसख्या 17,93,23,175 व्यक्ति आँकी गई। परन्तु ये आँकडे इकाइयो तक या सैकडो तक भी कठिनाई से ही ठीक हो सकते थे। तो भी यह कहा जा सकता है कि 17,93,23,175 आँकडे वे है जो सर्वोत्तम प्राप्त विधियो से प्राप्त किए गए है और इसलिए सभवत किन्ही भी पूर्णांकित आँकडो से अधिक सही हैं। इन दो दृष्टिकोणों के गुण-दोषो से निरपेक्ष छ (या कम) महत्त्वपूर्ण अक वाछित तुलनाओ के लिए प्राय. काफी सही हो सकते है। पूर्णांकन (तथा महत्त्व-पूर्ण अको) का अधिक उल्लेख पृष्ठ —126—127 पर तथा परिशिष्ट न मे किया गया है।

जब परिकलित मूल्यो, जैसे जोडो, प्रतिशतताओ, और औसतो को पूर्णांकित आँकडो की सारणियो म दिखाया जाता है ता यदि सभव हो तो इन मूल्या का पूर्णांकन करने से पूर्व मूलभूत आँकडो से इनका गणन किया जाना चाहिए।

योग—हमने पहले देखा है कि योग जब अत्यधिक महत्त्व के हो तो वे स्तंभ मे ऊपर की ओर और शीर्षक मे बाई ओर रखे जा सकते हैं। जब जोडो पर बल देना वाछित न हो, तो उन्हे स्तंभ मे नीचे की ओर तथा शीर्षक मे दाई ओर रखा जा सकता है।

सारणी 3 5 मे जोड के कॉलम तथा जोड पक्ति दोनो है। इस प्रकार की व्यवस्था के परिणामस्वरूप एक सख्या प्राप्त होती है जिसे कभी-कभी "कुल जोड" या "जाँचा हुआ कुल जोड" कहा जाता है। यह तथ्य कि आँकडो से जब उन्हे ऊपर से नीचे तथा समस्तर पर जोडा गया एक ही जोड प्राप्त होना है, कोई निश्चित जाँच नही है, क्योकि हो सकता है कि दो या अधिक परिपूरक गलतियाँ हो गई हो। परन्तु यह प्राय नही होता। हमारे पास निश्चित प्रमाण है कि या तो गलतियाँ की नही गई या एक मे अधिक की गई।

इकाइयाँ—सारणी के एक स्तम्भ या पक्ति मे सख्याओ के माप की इकाइयाँ प्राय स्वत स्पष्ट हो सकती है। यदि ऐसा न हो तो सारणी 7 2 के समान तो इकाई की प्रकृति

सारणी 3.6

जनवरी—दिसम्बर 1964 मे स्टाक बाजार ग्राहक ऋण*

(10 लाखों मे)

मास	सयुक्त राज्य सरकार के अतिरिक्त अन्य कुल ऋणपत्र	न्यूयार्क स्टाक बाजार की फर्मों पर शुद्ध ऋण शेष		क्रय करने और रखने के लिए दलालो एव व्यापारियो के अतिरिक्त अन्यो को बैंक ऋण	
		स० रा० सरकार ऋणपत्र	अन्य ऋणपत्र	स० रा० सरकार ऋणपत्र	अन्य ऋणपत्र
जनवरी ...	$7,250	$22	$5,524	$108	$1,726
फरवरी	7,120	21	5,384	97	1,736
मार्च	7,141	21	5,366	97	1,775
अप्रैल........	7,314	21	5,510	101	1,804
मई	7,277	19	5,439	96	1,838
जून........	7,229	18	5,370	94	1,859
जुलाई..	7,160	25	5,289	70	1,871
अगस्त.......	7,096	21	5,187	69	1,909
सितम्बर.....	7,142	19	5,221	81	1,921
अक्तूबर .. .	7,101	20	5,185	69	1,916
नवम्बर.... ...	7,108	20	5,160	64	1,948
दिसम्बर.......	7,053	21	5,079	72	1,974

* प्रथम तीन स्तम्भों मे मास के अन्त के लिए आँकडे हैं, शेष अन्तिम बुधवार के लिए हैं।

फेडरल रिजर्व बुलेटिन, वाशिंगटन, डी० सी०, जनवरी 1965, पृष्ठ 143 से लिए आँकडे।

का पाद-टिप्पणी या स्तम्भ शीर्षक में स्पष्ट कर देना चाहिए। यदि व्याख्या सारणी की सब संख्याओं पर लागू होती हो तो उसे प्रारम्भिक टिप्पणी के रूप में दिया जा सकता है। डालर-चिह्न के प्रयोग के कारण अधिक इकाइयों के आँकड़े सामान्यतः स्वतः स्पष्ट होते हैं। ध्यान दीजिए कि सारणी 3 6 में यह चिह्न स्तम्भ में केवल प्रथम प्रविष्टि के साथ ही आया है।

सारणी का आकार और स्वरूप—प्रायः सारणी इस प्रकार अभिकल्पित की जानी चाहिए कि वह न बहुत लम्बी और सकुचित हो, न बहुत छोटी और चौडी हो। सारणी को जिस स्थान पर आना है उसके अनुसार ढाला जाना भी आवश्यक है। प्रायः यह परिसीमा पुस्तक या रिपोर्ट के पृष्ठ के रूप में आती है। हाँ, सारणी के लिए पृष्ठ की सारी लम्बाई या चौडाई घेरना आवश्यक नहीं। यदि दिए हुए स्थान की अपेक्षा सारणी बहुत बडी है तो उसे कई छोटी सारणियों में डाला जा सकता है। टाइप के आकार को छोटा करके सारणी को पृष्ठ पर लाना सभव हो सकता है, परन्तु छोटा करना सुवाच्यता की कीमत पर नहीं होना चाहिए। यदि मुडे हुए पृष्ठ का प्रयोग वाछित नहीं है तो सारणी की दो आमने सामने के पृष्ठों पर व्यवस्था की जा सकती है। जिल्द बाँधने में पृष्ठों की पूर्णतया सीध मिलाने की कठिनाई के कारण, दूसरे पृष्ठ पर प्रायः स्टब दोहराया जाता है। जब सकेत सारणियाँ कई पृष्ठों पर चालू रहती हैं तो उन्हें ऊर्ध्वाधर या क्षैतिज रूप से जोडा जा सकता है। दोनों में से कोई भी स्थिति हो, प्रत्येक पृष्ठ पर पूर्ण स्टब और शीर्षक प्रविष्टियाँ आनी चाहिएँ, शीर्षक प्रत्येक पृष्ठ पर दोहराया जाना चाहिए और पाद-टिप्पणियाँ समुचित पृष्ठ के नीचे आ सकती हैं, या सारणी के अन्त में इकट्ठी की जा सकती हैं।

किसी सारणी के क्षैतिज विस्तार का निर्धारण निम्न बातों को ध्यान में रखकर किया जा सकता है

(1) *स्टब की चौडाई, जिसका निर्धारण सबसे दीर्घ प्रविष्टि से होता है। (स्थान बचाने के लिए एक बहुत दीर्घ प्रविष्टि का दो या अधिक पक्तियों में रखा जा सकता है, सारणी 3 5 के स्टब को देखिए।)*

(2) *प्रत्येक कॉलम की चौडाई, जिसका निर्धारण प्रत्येक वक्स शीर्ष में सबसे बडी सख्या या प्रविष्टि से होता है। (शब्दों के बीच में हाइफन लगाकर, स्तम्भ शीर्षक में किसी प्रविष्टि को क्षैतिज रूप से छोटा और ऊर्ध्वाधर रूप से बडा किया जा सकता है।)*

(3) रेखाकन।

(4) हाशिए।

ऊर्ध्वाधर विस्तार को निम्न बातों का विचार करके निश्चित किया जा सकता है.

(1) शीर्षक, प्रारम्भिक टिप्पणी, पाद टिप्पणियों, और स्रोत-टिप्पणी के लिए अपेक्षित स्थान। क्योंकि शीर्षक की पहली पक्ति चौडाई में सारणी से नहीं बढनी चाहिए, इसलिए लम्बे शीर्षक के लिए कई पक्तियों की आवश्यकता हो सकती है।

(2) स्टब या बक्स शीर्ष में शीर्षक के लिए आवश्यक पक्तियों की सख्या, जिसके लिए सबसे अधिक ऊर्ध्वाधर स्थान की आवश्यकता होती है।

(3) सारणी के पिण्ड में पक्तियों की सख्या।

(4) रेखाकन।

(5) हाशिए।

रेखांकन—इस पाठ मे अधिकतर सारणियाँ एक रेखा से रेखांकित दिखाई गई है और दोनो ओर खुली है। कभी-कभी दो रेखाओ का रेखाकन प्रयोग मे आता है, परन्तु दोहरी रेखाओ से हस्तरेखाकित या छपी सारणियाँ कुछ जटिल प्रतीत होती है। दोनो दिशाओं की ओर से सारणियो को विरल ही बन्द किया जाता है और कभी-भी उनकी एक दिशा खुली और एक बन्द नही होनी चाहिये। ऐसा प्रतीत होता है कि मूल पाठ सारणियो को बिना रेखाकन के, चाहे वह ऊर्ध्वाधर हो या क्षैतिज, प्रयोग करने की प्रवृत्ति बढ रही है।

इस पुस्तक मे तथा अन्यत्र सारणियो के परीक्षण से पता चलेगा कि

(1) सारणी के पिण्ड मे क्षैतिज रेखाएँ प्रयुक्त नही की जाती, सिवाय उस स्थिति के जब जोड अलग करने हो और प्राय जब सारणी को भिन्न भागो मे अलग करना हो।

(2) प्रमुख और गौण बक्स शीर्षो को अलग करने वाली क्षैतिज रेखाएँ स्टब शीर्षक मे चालू नही रहती।

(3) बक्स शीर्षो को अलग करने वाली सभी ऊर्ध्वाधर रेखाएँ केवल उन बक्स शीर्षों के बीच मे आती है जिन्हे वे अलग करती हैं, वे इन बक्स शीर्षों के ऊपर नही जाती।

आँख का मार्गदर्शन—प्रत्येक तीन, चार, या पाँच पक्तियो के बाद एक रेखा छोड देने से, जैसा कि सारणी 3 6 मे है, आँख के लिए सारणी मे पक्तियों का अनुसरण करना आसान बन जाता है। सारणी के स्टब मे सकेतको का प्रयोग भी सहायक होता है।

शून्य—सारणी मे शून्य दिखाने की प्रथा नही है (परिकलन प्रपत्र को छोडकर)। जब किन्ही मामलो का अस्तित्व न मिला हो या जब किसी मद का मूल्य शून्य हो तो इस तथ्य का सकेत बिन्दुओ (.) या छोटे डैशो (- - -) से किया जा सकता है। जब सूचना की कमी के कारण प्रविष्टि के लिए कोई मद न हो तो उस तथ्य के सकेत के लिए पाद-टिप्पणी का प्रयोग करना चाहिये।

टाइप का आकार और प्रकार—टाइप (या अक्षरो) के आकार और प्रकार मे बहुत अधिक भिन्नता वाछित नही है। प्रायः शीर्षक सबसे प्रमुख होना चाहिए और यह प्राय अग्रेजी की स्थिति मे बडे और छोटे कैपिटल अक्षरो मे या मोटे टाइप मे रखा जाता है। स्टब और शीर्षक मे सूचित मदे और सारणी के पिण्ड मे अक प्रायः एक ही आकार के टाइप मे रखे जाते हैं। पाद-टिप्पणियाँ, प्रारम्भिक टिप्पणी और स्रोत-टिप्पणी प्राय सारणी के पिण्ड मे प्रयुक्त टाइप से छोटे टाइप मे रखी जाती है।

सांख्यिकीय रिपोर्टें

साख्यिकीय रिपोर्टें बनाते समय, सारणियो को तैयार करने का ढग आंशिक रूप से रिपोर्ट की आवश्यक प्रतियो की सख्या और अशतः उन पर आने वाले खर्च मे तय होगा। सारणियाँ हस्तलिखित, टाइप की हुई, अनुलेखाचित्रित, बहुलेखाचित्रित, हस्तलिखित या टाइप की गई सारणियो से फोटोस्टैट या फोटोग्राफ के ढग से पुन तैयार की गई प्रतिकृति, या छपी हुई हो सकती हैं।

अपेक्षाकृत सरल सारणियो को छोडकर अन्य सारणियाँ तैयार करने के लिए अन्तर छोडने की लोच और टाइप के आकार के कारण साधारण टाइप की मशीन के

प्रयोग मे विशिष्ट असुविधा है। एक 'पाइका' टाइप वाली और एक 'इलाइट' टाइप वाली दो टाइप की मशीनें प्रयोग करके अधिक लोच लाई जाती है। स्टब प्रविष्टियो और पिण्ड के लिए इलाइट' टाइप का प्रयोग करके कुछ स्थान बचाया जा सकता है। चर अन्तर छोडने वाली और विभिन्न प्रकार और आकार की टाइप वाली टाइप की मशीन प्रयोग करके सारणी की योजना मे कुछ अधिक लोच लाई जा सकती है।

यदि किसी रिपोर्ट की केवल कुछेक ही प्रतियाँ चाहिएँ और यदि सारणियाँ सरल हैं ता सारणियाँ और सलग्न पाठ टाइप किया जा सकता है तथा कार्बन प्रतियाँ बनाई जा सकती है। यदि कई दर्जन प्रतियाँ चाहिएँ तो खुले हाथ मे लिखी या टाइप की गई सामग्री की फोटोस्टैट प्रतियाँ बनाई जा सकती है। इस विधि से छोटा करना या बडा करना सभव है और प्रतियाँ कुछ शीघ्र प्राप्त हो सकती है क्योंकि इसमे कोई प्लेट बनाने की आवश्यकता नही होती। यदि इससे अधिक प्रतियाँ चाहिएँ तो अनुलेखाचित्रण या बहुलेखाचित्रण की विधि अपनायी जा सकती है। सारणियाँ फोटो-ऑफसेट ढंग से भी बनाई जा सकती हैं जो काफी सन्तोषजनक और प्राय. छपाई से सस्ती होगी, क्योंकि इसमे टाइप सैट करने की जरूरत नही होती। इसम बडा या छोटा करना भी सभव है तथा टाइप की हुई सामग्री कम की जा सकती है जिससे $8\frac{1}{2}\times 11$ इच के 4 साधारण पृष्ठ (पाइका टाइप के) एक पृष्ठ पर आ जाएँगे। यह ध्यान देने की बात है कि यदि सन्तोषजनक प्रतियाँ प्राप्त करनी हैं तो टाइप की हुई प्रति श्रेष्ठ होनी चाहिए।

4

लेखाचित्री निरूपण I :
अंकगणितीय पैमानों के प्रयोग वाले वक्र

लेखाचित्रीय विधि

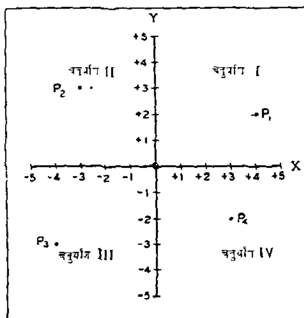
मूलपाठ, सारणी, और अर्ध-सारणी की विधियो द्वारा साख्यिकीय आँकडो के निरूपण की ओर पहले ही ध्यान दिया जा चुका है। साधारणतया साख्यिकीय आँकडे सारणी के रूप म या चार्ट के रूप मे प्रस्तुत किए जाएँगे। इस अध्याय और इसके बाद के दो अध्यायो म लेखाचित्री विधियो द्वारा साख्यिकीय आकडो के चित्रण का विवरण दिया गया है। जैसा कि इस पुस्तक के पृष्ठो को देखने से तुरन्त ही दिखाई देगा, चार्ट और लेखाचित्र ध्यान आकर्षण करने मे आकडे प्रस्तुत करने के किन्ही भी अन्य ढगो से अधिक प्रभावी है। अत पाठकों द्वारा चार्ट को छोड जाने की उतनी सभावना नही है जितनी सारणी को छोड जाने की है। एक सरल, आकर्षक, अच्छी प्रकार बनाए हुए लेखाचित्र को, जिसमे सीमित तथ्य दिखाए गए हों, समझने म भी सारणी की अपेक्षा अधिक आसानी है।

सीमित मात्रा मे आँकडे प्रस्तुत करने के लिए अपने महत्त्वपूर्ण प्रभाव के कारण चार्ट एक अत्यधिक उपयोगी साख्यिकीय साधन बन जाता है। ता भी कुछ परिसीमाओं की ओर ध्यान देना चाहिए। प्रथम तो चार्टों मे उतने तथ्य नही दिखाए जा सकते जितने सारणी म दिखाए जा सकते हैं। सारणी मे अनेक कॉलम और पक्तियाँ आ सकती है, परन्तु चार्ट 4 2 की कल्पना कीजिए जिसमे छ या आठ आडी-तिरछी और अन्तर्वलित करने वाली रेखाएँ है और यह तुरन्त स्पष्ट हो जाता है कि क्यो चार्ट म केवल सीमित मात्रा मे जानकारी दिखानी चाहिए। दूसरे, यद्यपि सारणी म यथाथ मूल्य दिए जा सकते है, चार्ट मे साधारणत केवल सन्निकट मूल्य ही दिखाए जा सकते है। सारणी मे हम जितने चाहे उतने अधिक अक दर्ज कर सकते हैं परन्तु चार्ट पर हम केवल सन्निकट मूल्य लगा सकते है। उदाहरणार्थ, वे आँकडे जिन पर चार्ट 4 2 आधारित है, सारणी म ट्रको और बसो की ठीक सख्या के रूप मे दिखाए जा सकते थे, जबकि चार्ट मे केवल हजारो मे, या अधिक से अधिक सैंकडो मे दिखाए जा सकते है। इस प्रकार चार्ट सामान्य स्थिति की एक स्पष्ट झाँकी देने के लिए उपयोगी हैं, परन्तु तफसील की नही। तीसरे, चार्टों को बनाने मे

कुछ समय लगता है क्योंकि प्रत्येक चार्ट मौलिक चित्र होता है। परन्तु यह कठिनाई चार्ट के उस अधिक प्रभाव से समाप्त हो जाती है जो उसमें सारणी की तुलना में होता है।[1]

चार्टों के प्रकार

इस पाठ में हम निम्न का विवेचन करेंगे वक्र या रेखा आरेख ; दंड चार्ट जिनमें एक विम तुलनाएँ आती हैं, क्षेत्रफल आरेख, जिनमें द्वि-विम तुलनाएँ आती हैं (विशेषकर वृत्ताकार आरेखों को मिलाकर जिनमें एक या द्वि-विम तुलनाएँ या कोणों की



चार्ट 4 1. वक्र आलेखन के लिए अक्ष

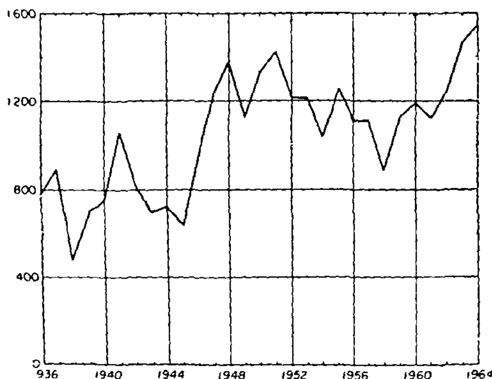
तुलनाएँ आती हैं), आयतन आरेख जिनमें तृतीय विमीय के प्रत्यक्षीकरण और त्रिविम तुलनाओं की आवश्यकता होती है, चित्र लेख, जिनमें आयतन आरेख और दण्ड चार्ट दोनों के रूप आते हैं, तथा सांख्यिकीय मानचित्र। अन्य विशिष्ट प्रकार के चार्टों और कुछ उन चार्टों का जो कि लेखाचित्री हैं परन्तु सांख्यिकीय नहीं हैं (उदाहरणार्थ, संगठन एवं प्रक्रिया चार्ट), यहाँ वर्णन नहीं किया गया है परन्तु उनका विवेचन लेखाचित्री विधियों पर लिखी गई पुस्तकों में आता है। इस अध्याय में केवल अंकगणितीय पैमानों का प्रयोग करने वाले वक्रों पर विचार किया जाएगा। अगले अध्याय में लघुगणकीय ऊर्ध्वाधर पैमाने और

1 विलियम प्लेफ़यर, जिसे 18वीं सदी के उत्तरार्द्ध में लेखाचित्री विधि का "तत्काल आविष्कारक" समझा जाता है, कहता है "इस विधि में प्रस्तावित लाभ अंकों की अपेक्षा अधिक यथार्थ विवरण प्रस्तुत करने में नहीं है वरन नेत्र के सामने एक चित्र [चार्ट] प्रस्तुत करके, विभिन्न समयों पर, क्रमिक प्रगति और सापेक्ष परिमाणों का अधिक सरल और स्थायी विचार प्रस्तुत करने में है, जिसके अनुपात अभिव्यक्ति के लिए अभिप्रेत राशियों के योग से मेल खाते हैं।' ईकनामिक हिस्ट्री, फरवरी 1935, पृष्ठ 103—109 पर एच० जे० फ़ुकॉर्न्ज तथा हलन एम० वाकर का "प्लेफेयर एंड हिज चार्ट्स" लेख देखिए।

अकगणितीय क्षैतिज पैमाने का प्रयोग करने वाले वक्रो की ओर ध्यान दिया जाएगा। अध्याय 6 मे दण्ड चार्टों, क्षेत्रफल आरेखो, आयतन आरेखो, चित्रलेखो, तथा सांख्यिकीय मानचित्रो के सक्षिप्त विवरण सम्मिलित किए जाएँगे।

वक्र आलेखन

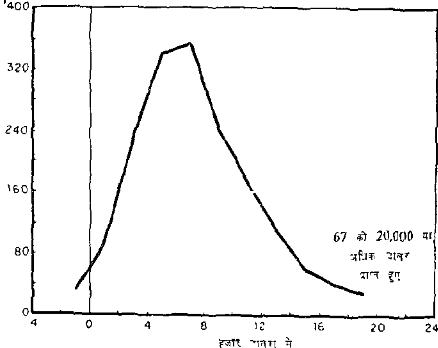
जब सांख्यिकीय आँकडो को वक्रो के रूप मे दिखाया जाता है तो एक दूसरी को काटती हुई दो रेखाओ के सकेत से बिन्दुओ का आलेखन किया जाता है। ये रेखाएँ अक्ष कहलाती हैं और चार्ट 4 1 मे दिखाई गई हैं। क्षैतिज रेखा "*X*-अक्ष" के रूप मे पहचानी



चार्ट 4 2 1963—64 मे संयुक्त राज्य के कारखानो द्वारा मोटर ट्रको और बसो का फैक्टरी विक्रय। मोटर गाडी निर्माता एसोसिएशन के आटोमोबाइल फैक्ट्स एन्ड फिगर्ज, *1965* पृष्ठ 3 से लिए गए आकडे।

जाती है और ऊर्ध्वाधर रेखा "*Y*-अक्ष" कहलाती है। धनात्मक मूल्य *X* अक्ष पर शून्य के दाईं ओर और *Y*-अक्ष पर शून्य के ऊपर की ओर रखे जाते है, ऋणात्मक मूल्य *X*-अक्ष पर शून्य के बाईं ओर रखे जाते हैं तथा *Y* अक्ष पर शून्य के नीचे की ओर जिस बिन्दु पर दोनो अक्ष एक दूसरे को काटते हैं वह *X* तथा *Y* दोनो के लिए शून्य है और "शून्य बिन्दु," "उद्गम बिन्दु" या केवल "मूल बिन्दु" कहलाता है। जैसे-जैसे हम इस मूल बिन्दु से परे हटते हैं, अक्षों पर धनात्मक या ऋणात्मक मूल्य बढ़ते हैं।

चार्ट 4.1 के दो अक्ष आलेखन क्षेत्रफल को चार भागों में बाँटते हैं जो "चतुर्थांश" कहलाते हैं। संकेत के लिए इन चतुर्थांशों को I, II, III तथा IV कहा गया है। चतुर्थांश I में वे मूल्य आते हैं जो X-तथा Y- अक्ष दोनों पर धनात्मक हैं। चतुर्थांश II में वे मूल्य आते हैं जो Y-अक्ष पर ऋणात्मक और Y-अक्ष पर धनात्मक हैं। चतुर्थांश III में वे मूल्य आते हैं जो दोनों अक्षों पर ऋणात्मक हैं। चतुर्थांश IV उन मूल्यों के लिए है जो X-अक्ष पर धनात्मक और Y-अक्ष पर ऋणात्मक है।



चार्ट 4.3—1,764 ऑप्टोमीट्रिस्टों की नेट आय अमेरिकन आप्टोमीट्रिक एसोसिएशन से लिए हुए आंकड़े। अन्तिम तीन आलेखित श्रेणियों के लिए बारंबारताएँ आकलित हैं।

चतुर्थांशों में से किसी एक में आलेखित किसी बिन्दु का स्थान इसके वियोजक मूल्य के संकेत से, जो शून्य से इसकी क्षैतिज या X दूरी है, और इसके कोटि मूल्य के संकेत से, जो शून्य से इसकी ऊर्ध्वाधर या Y दूरी है, मालूम किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, चार्ट 4.1 में, प्रत्येक चतुर्थांश में एक के हिसाब से, चार बिन्दु आलेखित किए गए हैं: P_1, $X=+4$, $Y=+2$ का प्रतिनिधि है, P_2, $X=-3$, $Y=+3$ का संकेत करता है; P_3 $X=-4$, $Y=-3$ है, P_4, $Y=+3$, $Y=-2$ दिखाता है।

जब समीकरणों के आलेखन के लिए संकेत के आधार के तौर पर अक्षों का प्रयोग किया जाता है तो कोई या सभी चतुर्थांश प्रयोग में लाए जा सकते हैं क्योंकि बहुत से समीकरणों के लिए X या Y, या दोनों के ऋणात्मक मूल्यों की आवश्यकता हो सकती है। परन्तु इस समय हमारी रुचि समीकरणों के माप द्वारा प्रतिनिधित्व में नहीं है बल्कि प्रेक्षित

साख्यिकीय आँकडो के आलेख द्वारा चित्रण मे है। जब हमारा सबध साख्यिकीय आँकडों से है तो यह स्पष्ट होना चाहिए कि दोनो X तथा Y चर प्राय धनात्मक सख्याएँ हैं और इसलिए हम आम तौर पर केवल चतुर्थांश I का प्रयोग करेंगे। चार्ट 4 2 जिसमे कुछ वर्षों के समय मे सयुक्त राज्य मे मोटर ट्रको और बसो का फैक्टरी विक्रय दिखाया गया है, एक ऐसे वक्र का उदाहरण है जो पूर्णरूपेण चतुर्थांश I मे आता है।

कभी-कभी चतुर्थांश I के साथ चतुर्थांश II तथा IV का प्रयोग किया जाता है। चार्ट 4 3 मे एक ऐसा वक्र दिखाया गया है जो चतुर्थांश I तथा II का प्रयोग करता है. चार्ट 4.4 का वक्र कुछ चतुर्थांश I मे और कुछ चतुर्थांश IV मे आता है। क्योकि चतुर्थांश III मे दोनो X तथा Y मूल्य ऋणात्मक होते है, इसलिए उस चतुर्थांश का बहुत ही कम प्रयोग होता है।

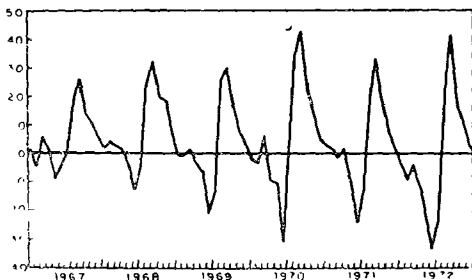
वक्रों द्वारा प्रदर्शित आंकड़ो के प्रकार

पहले यह ध्यान मे आ चुका है कि साख्यिकीय आँकडो का वर्गीकरण कालानुक्रमी, भौगोलिक, सख्यात्मक, या गुणात्मक विशेषताओ के अनुसार किया जा सकता है। वक्रो का प्राय काल श्रेणियो के चित्रण और बारबारता बटनो के प्रदर्शन के लिए प्रयोग किया जाता है (जो सख्यात्मक दृष्टि से वर्गीकृत आँकडो मे सबसे कही अधिक महत्त्वपूर्ण है), हाँ यद्यपि, जैसा कि अगले अध्यायो मे दिखाया गया है, अन्य प्रकार के आलेख भी लागू होते हैं। गुणात्मक दृष्टि से और विशेषकर भौगोलिक दृष्टि से वर्गीकृत आँकडे वक्रो द्वारा विरले ही चित्रित किए जाते हैं, इनके स्थान पर, जैसा कि आगे सकेत किया जाएगा, दड चार्टों और अन्य विधियों का प्रयोग किया जाता है।

काल श्रेणी वक्र—काल श्रेणी के आलेखन की विधि दिखाए जाने वाले आँकडो के प्रकार पर निर्भर करती है। हम कालावधि आँकडों और कालबिन्दु आँकडों मे भेद कर सकते हैं। कालावधि आँकडे, जैसा कि प्रति मास कुल बिक्री, प्रति वर्ष औसत मासिक बिक्री, तथा वर्ष भर मे औसत मूल्य, समय की अवधि की ओर सकेत करते है। कालबिन्दु आँकडे, जैसे कि सूची मूल्य, मूल्य दरें, या तापमान अक, वे होते है जो समय के निश्चित बिन्दु की ओर सकेत करते है। जब कभी कालानुक्रमी आँकडे वक्र के द्वारा दिखाए जाते हैं तो वर्ष, मास, सप्ताह, दिन या अन्य कालानुक्रमी इकाइयां क्षैतिज अक्ष पर दिखाई जाती हैं, अन्य श्रेणी जो समय के साथ बदलती है, ऊर्ध्वाधर अक्ष पर रखी जाती है।

चार्ट 4 2 तथा 4 18 मे कालावधि आँकडे दिखाए गए हैं। जब इस प्रकार के वार्षिक आँकडो का आलेखन होता है तो क्षैतिज पैमानो पर तिथियाँ ऊर्ध्वाधर रेखाओ के नीचे रखी जा सकती हैं, जैसा कि चार्ट 4 2 मे है, या स्थानो के नीचे, जैसा कि चार्ट 4 18 के बाएँ हाथ के भाग मे है। दोनो मे से कोई भी विधि प्रयोग मे लाई जा सकती है। स्थानो पर लेबल लगाने के लिए एक तर्क यह है कि इसमे समय की अवधि की दृष्टि-धारणा मिलती है। जब कई एक वर्षो के लिए मासिक (और दैनिक, साप्ताहिक, या त्रैमासिक) आँकडो का आलेखन होता है तब प्रत्येक वर्ष का प्रतिनिधित्व करने वाले स्थानो पर लेबल लगाने के अतिरिक्त कोई चारा नही होता, क्योकि यदि रेखाओ पर लेबल लगाए गए हो तो सब पाठको को यह तुरन्त स्पष्ट नही होगा कि लेबल रेखा से पूर्व के स्थान की ओर सकेत करता है, या रेखा के बाद के स्थानो की ओर, या सभवत दोनो ओर आधे-आधे स्थान पर। प्रत्येक क्षैतिज वर्ष-स्थान मासिक अको के आलेखन के लिए 12 भागों मे बांटा गया है और

इन अंकों का आलेखन 12 स्थानों में से प्रत्येक के बीच में हो सकता है। चार्ट 4.4 में मासिक आधार पर कालावधि आँकड़ों के लिए इसका उदाहरण प्रस्तुत है।



चार्ट 4 4 जनवरी 1967 और दिसम्बर 1972 के बीच संयुक्त राज्य के नागरिकों के नेट आगमन और निर्गमन। काल्पनिक आँकड़े।

जब कालबिन्दु आँकड़े वक्र द्वारा दिखाए जा रहे हैं तो क्षैतिज अक्ष पर स्थानों पर लेबल लगाने चाहिएँ, न कि रेखाओं पर, और प्रेक्षणों का आलेखन स्थानों के बीच में उस कालबिन्दु पर, जिसकी ओर आँकड़ों का संकेत होता है, होना चाहिए। यह बाद का विचार मासिक आँकड़ों की अपेक्षा वार्षिक आँकड़ों के लिए अधिक महत्त्व का है। तो भी मासिक आँकड़ों के लिए आदर्श यह है कि हमें (1) मास के प्रारम्भ के आँकड़ों का आलेखन (जैसे प्रत्येक मास की एक तारीख को शीतागार के माल के अंक) मास के प्रतिनिधि प्रत्येक स्थान के प्रारम्भ में करना चाहिए, (2) मास के मध्य के आँकड़ों का आलेखन (उदाहरणार्थ प्रत्येक मास की पन्द्रह तारीख के निकटतम वेतन चिट्ठे के लिए वेतन चिट्ठे के आँकड़े) प्रत्येक स्थान के मध्य में, और (3) मास के अन्त के आँकड़ों का आलेखन (जैसे प्रत्येक मास के अन्त में संचलन में मुद्रा) प्रत्येक स्थान के अन्त में करना चाहिए। यदि इस विधि का अनुसरण नहीं किया जाता तो मासिक आँकड़ों के वक्र का रूप नहीं बदलता, वक्र केवल बाईं ओर या दाईं ओर सरक जाता है।

बारंबारता बटनों के वक्र—चार्ट 4 3 का वक्र बारंबारता बटन का ग्राफ के द्वारा चित्रण है। बारंबारता बटन प्राय दूसरे चतुर्थांश में चालू नहीं रहेंगे जैसा कि यह चालू रहता है। परन्तु इस उदाहरण में कुछ ऋणात्मक आय थी।

सारणी 4 1 रूजर्स राज्य विश्वविद्यालय की 1965 में स्नातक परीक्षा में बैठने वाली कक्षा के 409 शिष्ट कला विद्यार्थियों के ग्रेडों का बारंबारता बटन[2] दिखाया गया है। बारंबारता बटन वक्र की उत्पत्ति दिखाने के लिए आँकड़ों को पहले चार्ट ग्रेड 4 5 के

2 अध्याय 8 में बारंबारता बटनों का विवरण दिया गया है।

सारणी 4 1

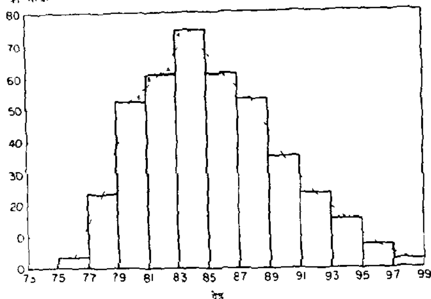
रूजर्स राज्य विश्वविद्यालय की 1965 मे स्नातक परीक्षा मे बैठने वाली कक्षा के 409 शिष्ट कला विद्यार्थियो द्वारा चार वर्षीय कोर्स के लिए प्राप्त ग्रेडो का वारवारता बटन

ग्रेड	विद्यार्थियो की सख्या
75 0—76 9	3
77 0—78 9	23
79 0—80 9	52
81 0—82 9	61
83 0—84 9	74
85 0—86 9	61
87 0—88 9	53
89 0—90 9	35
91 0—92 9	23
93 0—94 9	15
95 0—96 9	7
97 0—98 9	2
योग	409

आंकड रूजर्स राज्य विश्वविद्यालय के नेवाक कला एव विज्ञान कालेज से लिए गए।

''कॉलम आरेख' म आयतो या दण्डो की श्रेणी से दिखाया गया है। आप यह देखगे कि ग्रेड क्षैतिज अक्ष के साथ रखे गए है और वारवारताऐं (विद्यार्थियो की सख्या) ऊर्ध्वाधर अक्ष के साथ। चार्ट मे उतने ही कालम है जितनी कि सारणी मे श्रेणियाँ थी और प्रत्येक कॉलम की ऊँचाई तदनुरूप श्रेणी के लिए वारवारता का प्रतिनिधित्व करती है। प्रत्येक आयत की चोटी के मध्य बिन्दु को प्रत्येक साथ वाली आयत की चोटी के मध्य बिन्दु से मिलाकर इस कालम आरेख को वक्र म बदला गया है, जैसा कि चार्ट 4 5 म टूटी रेखा द्वारा दिखाया गया है। यह इस कल्पना के आधार पर किया गया है कि एक श्रेणी मध्यान्तर मे मूल्यो का श्रेणी भर मे बराबर वितरण हुआ है। परिणामस्वरूप एक श्रेणी का मध्य-मूल्य उस श्रेणी[3] का प्रतिनिधि माना गया है। आप देखेंगे कि बिन्दुरेखा ने प्रारम्भिक आयतो के कुछ छोटे त्रिकोण भाग छोड दिए है और इसने कुछ ऐसे छोटे त्रिकोण जोड भी लिए हैं जो पहले सम्मिलित नही थे। परन्तु यह स्पष्ट है कि त्रिकोण A=त्रिकोण A', त्रिकोण B=त्रिकोण B', इत्यादि। कभी कभी वक्र के प्रत्येक सिरे को अगली सम्भावित श्रेणी के मध्य मूल्य पर X-अक्ष को मिलाने के लिए (शून्य की वारवारता की ओर जिसका सकेत है) बढा दिया जाता है। इस विधि का परिणाम यह होता है कि वक्र के अन्दर उतना ही क्षेत्र आता है जितना कि आयतो म सम्मिलित है। परन्तु कभी-कभी एसा वक्र प्राप्त हो सकता

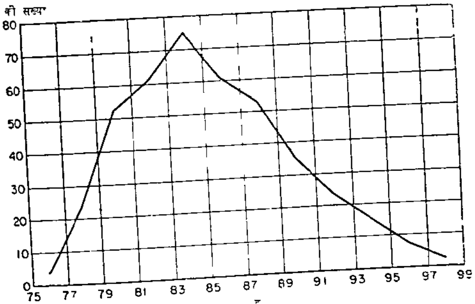
3 इस बिन्दु का अधिक विस्तृत विवरण अध्याय 9 मे दिया गया है।



चार्ट 4 5 रूजर्स राज्य विश्वविद्यालय की 1965 मे स्नातक परीक्षा में बैठने वाली कक्षा के 409 शिष्ट कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षीय कोस के लिए प्राप्त स्तर जो एक स्तम्भ आरेख और एक बारबारता वक्र द्वारा दिखाए गए हैं। सारणी 4 1 के आकड़े।

है जो X-अक्ष पर शून्य मे आगे जाता है और यह अर्थहीन हो सकता है। किसी भी स्थिति मे बढाने मे पाठक को यह मालूम होना है कि मदें प्रेक्षित आँकड़ो की सीमाओं से परे थी। विशिष्ट प्रयोजनों को छोड़कर (चार्ट 23 14 देखिए), वक्र को X-अक्ष तक न बढ़ाना अधिक अच्छा है। बारबारता बटन को या तो कालम आरेख के तौर पर या बारबारता वक्र (बारबारता बहुभुज) के रूप म दिखाया जा सकता है। दूसरा ढग अधिक सामान्य है और वक्र का आलेखन, स्तम्भ बनाने के बीच के पग के बिना ही, सीधा होता है जैसा कि चार्ट 4 6 म है।

कभी-कभी ऐसे बारबारता बटन मिलते हैं जिनका सकेत इस प्रकार की जानकारी की ओर होता है जैसे कुटुम्ब मे बच्चो की सख्या, एक ब्लाक मे खडी की गई मोटर गाडियों की सख्या, या अन्य आँकड़े जिनके मूल्य केवल पूर्ण सख्याएँ (0, 1, 2, 3, आदि) ही हो सकती हैं। इस प्रकार के चरो से सम्बन्ध रखने वाले बारबारता बटनो को, जिन्हे हम अध्याय 8 म विविक्त के रूप म पहचानेंगे, प्राय वक्र की बजाय कॉलम आरेख द्वारा दिखाया जाता है। चार्ट 23 12, जिसमें सारणी 23 7 के आँकड़े दिखाए है, इस बात का उदाहरण है। दण्डो का अलग होना सातत्य के अभाव पर, जो कि उपस्थित है, जोर देने का काम करता है।



चार्ट 4 6 टेक्सास राज्य विश्वविद्यालय की 1965 में स्नातक परीक्षा में बैठने वाली कक्षा के 409 शिष्ट कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त स्तर। सारणी 4 1 के आंकड़े।

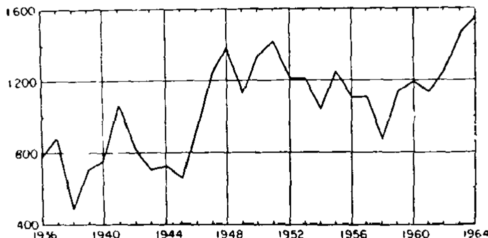
वक्र आलेखन के नियम

जबकि सांख्यिकीविद् किसी एक ऐसी मानक विधि पर एकमत नहीं हुए हैं जिसमें विस्तार से ठीक ठीक यह बताया जाए कि रेखा आरेख कैसे बनाए जाने चाहिएँ तो भी कुछ स्पष्ट महत्व के विचार हैं। जो विद्यार्थी चार्ट बनाने की तकनीक के संबंध में अधिक विस्तार में पढ़ने की रुचि रखता है वह केवल उन विषय से संबंधित पुस्तक देख ले।[4]

ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य — वक्र के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य को सम्मिलित करना संभवतः सबसे अधिक महत्वपूर्ण नियमों में से एक है। चार्ट बनाने वाले अधिकतर इस नियम के पालन की उपेक्षा कर देते हैं और परिणाम सदा पथभ्रष्ट करने वाला होता है क्योंकि दृष्टि धारणा अशुद्ध होती है। चार्ट 4 2 में शून्य से प्रारम्भ होने वाले ऊर्ध्वाधर पैमाने के संकेत से 1936 से 1964 तक मोटर ट्रकों और बसों की फैक्टरी बिक्री का आलेखन किया गया। आँकड़ों की वही श्रेणियां चार्ट 4 7 में हैं परन्तु इस चार्ट में ऊर्ध्वाधर पैमाना 4 00,000 से प्रारम्भ होता है। चार्ट 4 7 से पाठक को ऐसा दृष्टि धारणा मिलती है जो तथ्यों के बिल्कुल विपरीत है। उदाहरणार्थ 1960 में विक्रय 1938 का लगभग 8 गुना हुआ प्रतीत होता है, जबकि चार्ट 4 2 में स्पष्ट रूप में दिखाया गया है कि 1960 में विक्रय 1938 के विक्रय का केवल लगभग अढ़ाई गुना था। बहुत कम पाठकों का ध्यान ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य की लुप्ति की ओर जाता है और वक्र की व्याख्या करते समय तो पाठकों की लुप्ति

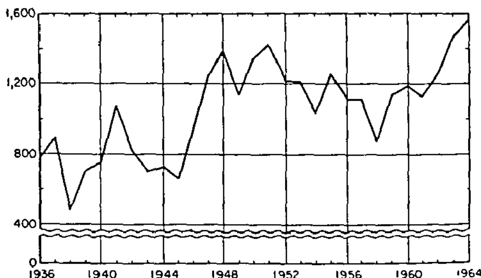
---

4 उदाहरणार्थ, ल्सा फ्रामिस, यूजिंग चार्ट्स टु इम्प्रूव प्राफिट्स, प्रेन्टिस हाल एंग्लवुड क्लिफ्स, 1962।

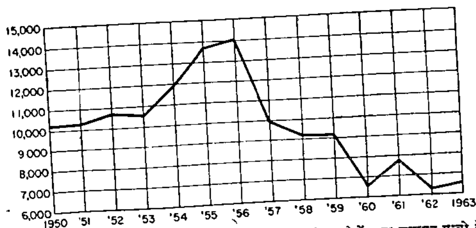


चार्ट 4 7 सयुक्त राज्य के कारखानो द्वारा 1936 से 1964 तक मोटर ट्रको और बसो का फैक्टरी विक्रय। यह चार्ट अशुद्ध बनाया गया है क्योकि ऊर्ध्वाधर पैमाना 400 से प्रारम्भ होता है और शून्य की लुप्ति का कोई स्पष्ट सकेत नही है। आँकड़े चार्ट 4 2 के नीचे दिए गए स्रोत से लिए गए हैं।

की ओर उचित ध्यान दिए जाने की और भी कम सभावना है। मोटी तुलनाएँ करने के लिए पैमाने के सदर्भ की पाठक को आवश्यकता नही होनी चाहिए। चार्ट इस प्रकार से बनाना चाहिए कि दृष्टि तुलनाएँ जितनी शीघ्र सभव हो की जा सकें।



चार्ट 4 8 सयुक्त राज्य के कारखानों द्वारा 1936 से 9164 तक मोटर ट्रको एव बसो का फैक्टरी विक्रय। आकड़े चार्ट 4 2 के नीचे दिए स्रोत से लिए गए।

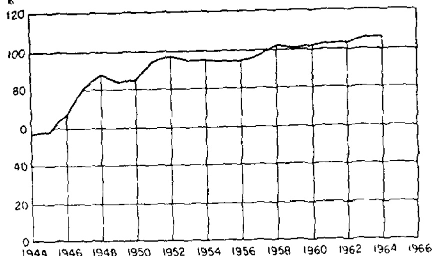


चार्ट 4 9 1950 से 1963 तक संयुक्त राज्य संघीय एजेंटों द्वारा आसवन यन्त्रो के अभिग्रहणों की प्रवृत्ति । लाइसेंस प्राप्त पेय उद्योगो की फैक्ट्स बुक *1964*, पृष्ठ 36 से । मूल चार्ट में दिखाई गई तीन सांख्यिकीय श्रेणियो मे से यह एक है, स्पष्टता के लिए अन्य दो छोड दी गई हैं । ऊर्ध्वाधर अक्ष पर इकाइयो के लिए लेबल की अनुपस्थिति की ओर ध्यान दीजिए । मूल स्रोत के साथ दिए पाठ से यह स्पष्ट है कि इकाई "आसवन-यन्त्रो के अभिग्रहणों की सख्या" है ।

चार्ट 4.2 के समान शून्य की अभिव्यक्ति का कभी-कभी परिणाम यह होगा कि वक्र ग्रिड पर बहुत ऊँचा हो जाएगा और इसके वक्र की गतियो को जानना कठिन भी हो सकता है । अत चार्ट के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य की लुप्ति प्राय इसलिए होती है क्योंकि चार्ट बनाने वाला व्यक्ति वक्र की गतियो पर जोर देना चाहता है और अनुभव करता है कि वक्र और अक्ष के बीच का स्थान अनुपयोगी है । कई तरीके हैं जिनसे शून्य को दिखाना (या स्पष्टतया इसकी लुप्ति की ओर सकेत करना) और चार्ट मे वक्र को बहुत ऊँचे रखने का निवारण करना भी सभव है । चार्ट 4 8 मे एक तरीका दिखाया गया है । जिसमे चार्ट मे एक निश्चित विच्छेद किया गया है । कभी-कभी समानान्तर रेखाएँ लहरदार होने के स्थान पर दाँतेदार होती हैं । वे खुले हाथ से या, जैसा कि चार्ट 4 8 मे है, डबल रोटी काटने के चाकू के रूलर के रूप मे प्रयोग करके खीची जा सकती हैं । चार्ट 4.15, 11 1 तथा 11.3 मे अन्य विधियाँ दिखाई गई हैं जो प्राय प्रयोग मे आती हैं । ध्यान दीजिए कि चार्ट 4 8 तथा 4.15 मे शून्य और पैमाने का विच्छेद दिखाया गया है जबकि चार्ट 11.1 तथा 11.3 मे शून्य दिखाया नही गया, परन्तु केवल इस तथ्य की ओर ध्यान आकर्षित किया गया है कि ऊर्ध्वाधर पैमाना अपूर्ण है ।

चार्ट 4.9 एक व्यापार एसोसिएशन की वार्षिक रिपोर्ट मे छपा था । क्योंकि उर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य की लुप्ति की कोई चेतावनी नही दी गई इसलिए इस चार्ट से, बकाया सघीय एजेंटो द्वारा आसवन-यन्त्रो के अभिग्रहणो मे कमी की भ्रामक दृष्टि-धारणा बनती है । जब तक कि ऊर्ध्वाधर पैमाना न देखा जाए तब तक पाठक यह परिणाम निकाल सकता है कि सघीय एजेन्टो द्वारा आसवन-यन्त्रो के अभिग्रहण लगभग समाप्त हो गए हैं ।

कभी-कभी ऐसे वक्र दिखाई देगे जिनमे ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य नही होता और जिनमे एक वस्तु के विक्रयो की वृद्धि, एक सगठन की सदस्यता, एक सामाजिक पत्र का परिचालन या अन्य आँकडे दिखाए जाते हैं । शून्य की लुप्ति के कारण वृद्धि उससे बहुत अधिक शीघ्र हुई प्रतीत होती है जितनी कि वास्तव मे हुई है ।



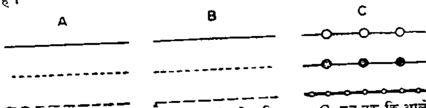
चार्ट 4 10 संयुक्त राज्य मे 1944 से 1964 तक भोजन का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक । 1957—1959 = 100 आंकड़े *स्टैटिस्टिकल एब्स्ट्रैक्ट आफ दि यूनाइटिड स्टेट्स, 1964* पृष्ठ 356 से लिए गए । 1964 का सूचकांक मार्च 1964 का है।

चार्ट 4 0. म भोजन के खुदरा मूल्यो के सूचकांक दिखाए है । यह चार्ट दो दृष्टियों से असाधारण है । प्रथम तो इसके ऊर्ध्वाधर पैमाने मे शून्य आता है जो यद्यपि अशुद्ध नही, वरन् आवश्यक नही है, जबकि मूल्य सूचकांको का आलेखन किया जा रहा हो, क्योकि यह मुश्किल से ही सोचा जा सकता है कि मूल्य कभी भी शून्य के निकट पहुँचेंगे और क्योंकि 100 सूचकांक का आधार है । 100 की रेखा पर सर्वदा जोर डालना चाहिए जबकि यह आधार है जैसा कि इस चार्ट मे है । इसी प्रकार शून्य की रेखा पर जोर डालना चाहिए जबकि यह चार्ट का आधार है जैसाकि चार्ट 4 8 मे है । सूचकांको को चार्टो द्वारा दिखाते समय कुछ व्यक्ति 100 के ऊपर और नीचे के उतार चढावों को धनात्मक और ऋणात्मक *मूल्यों के रूप म दिखाना पसन्द करते है । चार्ट 4 10 के सबध म 100 शून्य बन जाएगा, 105 बन जाएगा +5 तथा 85 बन जाएगा —15 ।* चार्ट 4 10 का ऊर्ध्वाधर पैमाना इस प्रकार बदल जाएगा कि *+20 0,—20 —40 —60,—80, तथा —100 पढा जाए ।* वक्र स्वय अपरिवर्तित रहेगा । चार्ट 4 10 का दूसरा असामान्य लक्षण क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर निर्देशक रेखाओ का प्रतिपादन है जिसका परिणाम वक्र को एक असामान्य तौर पर स्पष्ट रूपरेखा देना है । यह भी ध्यान दीजिए कि बाद के आंकडे जोडने के लिए स्थान छोड दिया गया है । इस प्रणाली से उसी मौलिक चार्ट की, जैसे नये आंकडे प्राप्त होते है, केवल मात्र वक्र को बढाकर (बार-बार) प्रतिकृति प्रस्तुत करना स्वीकृत हो जाता है ।

वक्रो का रेखांकन—आंकडो का प्रतिनिधित्व करने वाले वक्र चार्ट की पृष्ठभूमि से स्पष्टत. अलग दिखाई देने चाहिएँ । अत वक्र का रेखांकन निर्देशाको की अपेक्षा अधिक गहरा होना चाहिए । (जब दो या अधिक ऐसे वक्र दिखाए जाते है जो निकट से एक दूसरे *का अनुसरण करते हैं या जो एक दूसरे को काटते हैं तो कभी कभी कुछ वक्रो के लिए अधिक हल्की रेखाओ का प्रयोग आवश्यक होता है ।* उदाहरण के लिए चार्ट 17 3 देखिए।)

जैसाकि इस पाठ मे विभिन्न वक्रो से दिखाई देगा, आलेखित बिन्दु प्राय दिखाए नही जाते क्योकि प्रयत्न यह है कि सामान्य स्थिति प्रस्तुत की जाए न कि अलग-अलग अध्ययन ।

जब एक ही अक्ष पर कई एक वक्र खीचे जाते है तो प्रत्येक वक्र को पहचान सकना पाठक के लिए महत्त्वपूर्ण है । इस प्रकार हम ठोस, बिन्दुयुक्त और डैशयुक्त रेखाओ का प्रयोग कर सकते है और हम गहरी और हल्की रेखाओ का प्रयोग कर सकते है । यदि वक्र के लिए हल्की रेखा का प्रयोग किया जाता है तो यह साधारण तौर पर इतनी हल्की नही होनी चाहिए जितने निर्देशाक । सुझाए गए रेखाकन नीचे A और B के रूप मे सूचीबद्ध है ।



A यदि तीन से अधिक वक्र नहीं खीचने है तो इन रेखाओ की सिफारिश की जाती है ।

B यदि तीन से अधिक वक्र खीचने है तो हल्की रेखाओ का प्रयोग किया जा सकता है ।

C जब तक कि आलेखित बिन्दुओ को मडलो या बिन्दुओ से न दिखाना हो, इन रेखाओ की सिफारिश नही की जाती ।

जब एक चार्ट मे दो या अधिक वक्र दर्शाए जाते है तो प्रत्येक की स्पष्ट रूप से पहचान होनी चाहिए । यह कार्य वक्रो को लेबल लगाकर सम्पन्न हो सकता है, जैसा कि चार्ट 4 13, 4 17, तथा 17 3 म है ।

सामान्यतया एक चार्ट मे दो या तीन वक्रो से अधिक के प्रयोग से बचना अच्छा है ।
विशेष रूप से यदि वे एक दूसरे को काटते और पुन काटते है तो भ्राति उत्पन्न होने की
सभावना है। जब एक बडे दीवार चार्ट म जिसे किसी एक समूह को प्रस्तुत करना हो, कई
वक्र दर्शाए जाने है तो कभी कभी विभिन्न रग प्रयुक्त किए जा सकते है, यद्यपि प्राय यह
अधिक अच्छी प्रणाली है कि रग का प्रयोग उन अवसरो के लिए सुरक्षित रखा जाए जब
एक या दो वक्रो पर विशिष्ट बल दिया जाना हो । काले, लाल हरे, हल्के या मध्यम नीले,
तथा मध्यम या गहरे नारगी रग तुरन्त पहचाने जाते है । यदि ऐसी सभावना हो कि दीवार
चार्ट को फोटोस्टैट करना है, उसका फोटो लेना है या छपाई के लिए प्रतिकृति करनी हो
तो काले और लाल का घने और बिखरे हुए हल्के और गहरे तथा सम्मिश्रणो मे प्रयोग
किया जा सकता है क्योकि लाल रेखा की प्रतिकृति काली के समान होगी । नीले, पीले
और कुछ प्रकार के हरे का या तो बिल्कुल कोई फोटो नही आता या मन्द फोटो आता
है । प्राय रग इतना महँगा होता है कि उसका पुस्तक मे प्रयोग नहीं किया जा सकता ।

निर्देशाक—चार्ट बनाने वाले शून्य की रेखा को अन्य सीमान्त रेखाओ की अपेक्षा
कुछ अधिक गहरा बना कर उस पर बल डालते है । इसी प्रकार 100 प्रतिशत की रेखा
(या अन्य आधार जिससे तुलनाएँ की जाती है) पर जोर डाला जा सकता है । सीमान्त ऊर्ध्वा
धर और क्षैतिज रेखाएँ अन्य निर्देशाक रेखाओ की अपेक्षा कुछ गहरी बनाई जा सकती हैं ।

निर्देशाक रेखाएँ बहुत हल्की खीचनी चाहिएँ । चार्ट पढने म सहायता के लिए
आवश्यकता से अधिक निर्देशाक रेखाएँ नही होनी चाहिएँ । कभी-कभी सब निर्देशाको को

छोड दिया जाता है, जैसा चार्ट 4 4 मे है जिसमे निर्देशाक रेखाओ के स्थान पर 'टिको' का प्रयोग है। *यदि आलेखन सरल बनाने के लिए सन्निकट रेखाओ वाला 'ग्रिड' वाछित है तो* चार्ट अनुरेखन वस्त्र या अनुरेखन कागज पर खीचा जा सकता है जो एक ऐसे ग्रिड पर रखा गया हो जिसकी निर्देशाक रेखाएँ वाछित अतर पर पास-पास हैं। इसके विकल्प के रूप मे जब एक चार्ट की प्रतिकृति करनी हो तो एक हल्के नीले रग के सन्निकट रेखाओ वाले ग्रिड का प्रयोग किया जा सकता है। वे रेखाएँ जो प्रतिकृति मे रहनी चाहिएँ काले रग मे खीची जाती है। सामान्य स्थितियो मे पृष्ठभूमि की नीली रेखाएँ प्रतिकृति मे स्पष्ट नही आती। इस पाठ मे कुछ चार्ट ऐसी हल्की नीली पृष्ठभूमि पर खीचे गए थे।

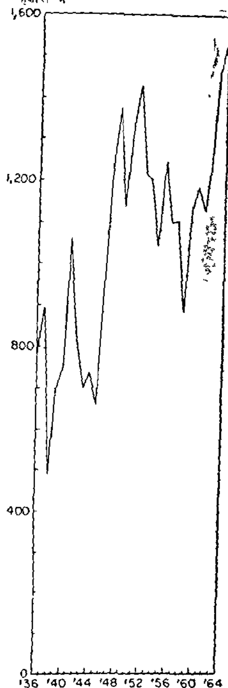
चार्ट की उचित समझ निश्चित करने के लिए दोनो पैमानो पर स्पष्ट रूप मे लेबल लगाने चाहिएँ। न केवल आँकडो के स्वरूप का सकेत करना चाहिए वरन् प्रयुक्त इकाइयाँ भी बतानी चाहिएँ। उदाहरणार्थ, चार्ट 4 3 म क्षैतिज अक्ष पर आय दिखाई गई हैं, इकाई हजार डालर है। कभी-कभी लम्बी समय श्रेणी के वक्र को क्षैतिज रूप मे बढाया जा सकता है। ऐसे उदाहरणा मे कभी-कभी चार्ट के दाइ ओर भी ऊर्ध्वाधर पैमाना बनाना वाछित होता है।

चार्ट अनुपात—एक वक्र चित्र के लिए उचित अनुपातो की दृष्टि से कोई वस्तुनिष्ठ नियम देना कठिनाई से ही सभव है। फिर भी यह ध्यान देना चाहिए कि वक्र के लिए प्रयुक्त अत्यधिक फैलने वाले या अत्यधिक सिकुडने वाले किसी भी पैमाने से बेतुके प्रभाव उत्पन्न होने हैं। चार्ट 4 11 मे क्षैतिज पैमाने के सबध मे ऊर्ध्वाधर पैमाना बढा-चढा दिया है, चार्ट 4 12 मे *क्षैतिज पैमाना बढा-चढा दिया है। पहले से अत्यधिक* उतार-चढावो का प्रभाव उत्पन्न होता है, बाद वाले से यह विचार मिलता है कि ट्रक और बस विक्रय मे *अपेक्षाकृत महत्त्वहीन उतार-चढाव हुए हैं। इन दो चार्टो म चार्ट 4 2 मे उचित प्रकार* से दिखाए गए आँकडो के पुनरालेखन के विकृत परिणाम मिलने है। दृढ नियम प्राय *असन्तोषजनक होते हैं क्योकि उन्हे अधाधु ध अपनाया जा सकता है। परन्तु यह सुझाव दिया* गया है कि उचित अनुपात वे है जिनमे वक्र की उन गतियो के लिए जिन पर बल दिया जाता है, 45 दर्जे *का कोण प्राप्त होता है।*

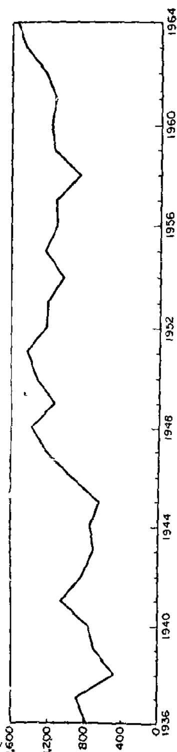
जैसाकि पैमानो के निकम्मे चुनाव से उतार-चढावो पर अत्यधिक जोर देना या उन्हे कम करना सभव है, वैसे ही वृद्धि के सम्बन्ध मे अशुद्ध भाव उत्पन्न करना सभव है। चार्ट 5 3 का वक्र सयुक्त राज्य मे 1928 से 1964 तक मोटर गाडियो का रजिस्ट्रेशन दिखाता है ऊर्ध्वाधर पैमाने को फैलाने और क्षैतिज पैमाने को सकुचित करने से संयुक्त राज्य मे मोटर गाडियो के रजिस्ट्रेशन की बहुत तीव्र वृद्धि का प्रत्यक्ष भाव मिलेगा। ऊर्ध्वाधर पैमाने को संकुचित करने तथा क्षैतिज पैमाने को फैलाने से वृद्धि बहुत धीमी हुई प्रतीत होगी।

यद्यपि पूर्व के दो अनुच्छेदो मे काल श्रेणी के वक्रो की ओर सकेत था तो भी यह समझना चाहिए कि यदि एक पैमाने को दूसरे पैमाने के सबध म अत्यधिक फैला दिया जाए या अनुचित ढग से सकुचित कर दिया जाए तो वारवारता बटनो के वक्रो से और कल्पित तौर पर किसी भी अन्य प्रकार के चार्ट से भ्रामक प्रत्यक्ष प्रभाव उत्पन्न हो सकते हैं।

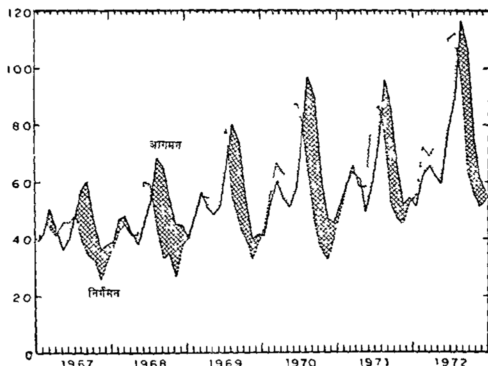
अक्षर लेखन—यदि सभव हो तो चार्ट पर सपूर्ण अक्षर-लेखन, पैमाने के लेबलो, पैमाने के मूल्यो, मुद्रा-लेख, वक्र के लेबलो तथा किन्ही अन्य शब्दो या अको सहित क्षैतिज रूप मे रखने चाहिएँ। कभी-कभी स्थानाभाव से ऊर्ध्वाधर पैमाने के लेबल को ऊर्ध्वाधर स्थिति मे रखना आवश्यक हो सकता है, परन्तु ऐसी सीमा प्राय उपस्थित नही होती। यह कहने की



चार्ट 4.1। 1936 से 1964 तक संयुक्त राज्य के कारखानों द्वारा मोटर ट्रकों और बसों का फैक्टरी विक्रय। चार्ट 4.2 के नीचे दिए स्रोत से लिए आँकड़े।



चार्ट 4 12 1936 से 1964 तक संयुक्त राज्य के कारखानों द्वारा मोटर ट्रकों और बसों का फैक्टरी विक्रय । आकड़े चार्ट 4 2 के नीचे दिए स्रोत से लिए गए ।



चार्ट 4 13 संयुक्त राज्य के नागरिकों के जनवरी 1967 से दिसम्बर 1972 तक आगमन और निर्गमन । *आंकिड काल्पनिक है जैसा कि चार्ट 4 4 में है*

आवश्यकता नही है कि संपूर्ण अक्षर लेखन स्पष्ट दिखाई देना चाहिए । खुले हाथ से लिखे शब्द और अंक बहुत आकर्षक बनाए जा सकते है यदि एक निपुण व्यक्ति द्वारा लिखे जाएं। परन्तु कलाकारो या नक्शानवीसो के पूर्तिगृहो से प्राप्त स्टैंसिल द्वारा अक्षर लेखन की विधिया के प्रयोग से थोडे से अभ्यास से अव्यवसायी व्यक्ति भी उत्तम औपचारिक अक्षर एव अंक बना सकता है। इस पाठ मे लगभग सभी चार्टों का अन्य प्रकाशनो से प्रतिकृति को छोडकर, ऐसी ही विधिया द्वारा अक्षर-लेखन किया गया है ।

शीर्षक—प्रत्येक सारणी के समान प्रत्येक चार्ट का एक शीर्षक होना चाहिए जिसमे स्पष्ट रूप से और ठीक ठीक यह बताना चाहिए कि चार्ट क्या दिखाना चाहता है। छपे हुए चार्ट का शीर्षक चार्ट के ऊपर या नीचे हो सकता है परन्तु नीचे अधिक अच्छा है। बडे दीवार चार्टो के शीर्षक प्राय ग्रिड से ऊपर या कभी-कभी उस पर रख जाते है।

स्रोत—पुनश्च जैसा कि सारणी के सबध म है प्रत्येक चार्ट म स्रोत की ओर सकेत होना चाहिए जिससे जहा से आकडे लिए गए उसके लेखक शीर्षक ग्रन्थ पृष्ठ प्रकाशक तथा प्रकाशन की तिथि का सकेत हो। स्वाभाविक तौर पर एक ही स्रोत या विभिन्न स्रोतो से लिए आकडो की तुलनात्मकता के सबध मे जो सावधानिया अध्याय 2 म बताई गई हैं वे चार्ट बनाने के लिए प्रयुक्त किए गए अंको पर पूर्ण मान्यतापूर्वक लागू होती हैं।

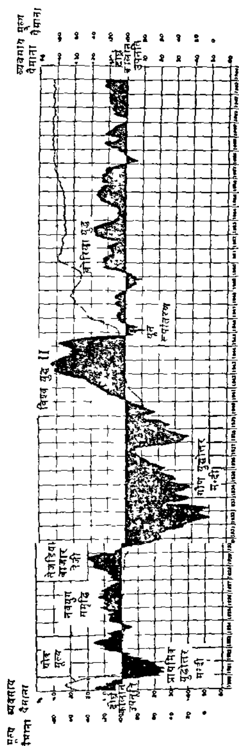
विशेष प्रयोजनो के लिए रेखा आरेख

शुद्ध शेष चार्ट—चार्ट 4 4 मे दो श्रेणियो के नेट जोड को बताने वाला एक तरीका दिखाया है। प्रत्येक मास के लिए निर्गमनो को आगमनो मे से घटा लिया गया और परिणाम का आलेखन धनात्मक या ऋणात्मक अक के रूप मे किया गया। इसी ढग से व्यापार सतुलन (निर्यातो के मूल्य मे से आयातो का मूल्य घटाकर) दिखाया जा सकता है तथा लाभ और हानि भी दर्शाए जा सकते हैं। आगमन और निर्गमन आंकडो को दिखाने के एक वैकल्पिक तरीके का उदाहरण चार्ट 4 13 मे है। *यहाँ आगमनो और निर्गमनो के लिए वक्र दिए गए है, आगमनो की अधिकता, काटन वाली तिरछी रेखाओ के क्षेत्रफल की ऊँचाई से* दिखाई गई है, जब कि निर्गमनो की अधिकता बिन्दु-चिह्नित भाग की ऊँचाई के द्वारा दिखाई है।

छाया-चित्र चार्ट—चार्ट 4 13 (जिसकी ओर पूर्वगामी अनुच्छेद मे सकेत किया गया है) न केवल कुल राशि के स्थान पर शुद्ध राशि को दिखाने का, बल्कि समान रूप से बल प्राप्ति के लिए दो वक्रो के बीच के क्षेत्रफल को छायायुक्त करने के *अभ्यास का उदाहरण प्रस्तुत करता है। चार्ट 4 14 इस दृष्टि मे चार्ट 4 4 के समान है।* इसमे आधार रेखा के ऊपर और नीचे उतार-चढाव दिखाए गए है। परन्तु चार्ट 4 14 मे वक्र के क्षेत्रफलो पर काले रग भर कर जोर डाला गया है। परिणाम यह है कि वक्र के "धनात्मक" और "ऋणात्मक" भागो का अधिक प्रभावपूर्ण चित्रण है। इस प्रकार का चार्ट और भी अधिक प्रभावशाली होता है जब "धनात्मक" क्षेत्र काले से भरे जाते है और ऋणात्मक क्षेत्र लाल से भरे जाते हैं।

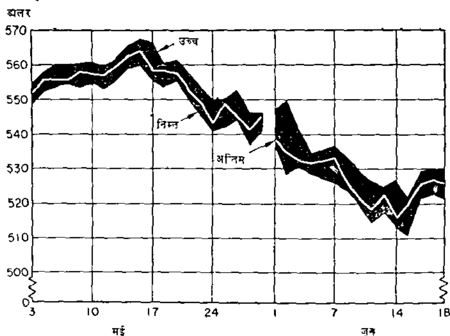
परिसर चार्ट—*चार्ट 4 15 मे एक विधि दिखाई गई है जिसके द्वारा स्टाक मूल्यो का परिसर चित्रित किया जा सकता है। आप यह देखेंगे कि जब परिसर बडा हो, तो काली* पट्टी फैल जाती है और जब छोटा तो सिकुड जाती है। सफेद रेखा अन्तिम मूल्य बताती है। इन्ही आँकडो को दिखाने के एक वैकल्पिक तरीके का उदाहरण चार्ट 4 16 मे है। यहाँ प्रत्येक दड की चोटी उस दिन के लिए उच्चतम का प्रतिनिधित्व करती है जब कि प्रत्येक दड का तल दिन के लिए निम्नतम का प्रतिनिधित्व करता है। दडो को मिलाने वाली रेखा *अन्तिम मूल्य की प्रतिनिधि है। यदि एक कालावधि मे परिवर्तन का परिसर दिखाना* वाछनीय हो तो इस प्रकार के चार्टों का प्रयोग पदार्थ मूल्यो और अन्य प्रकार के आँकडो को दिखाने के लिए किया जा सकता है।

जैंड-चार्ट—जैसा कि चार्ट 4 17 मे दिखाया गया है जैड-चार्ट मे एक ही अक्ष पर तीन वक्र है। प्राय चार्ट मासानुसार एक वर्ष की अवधि के लिए है। एक वक्र मासिक अको को दिखाता है दूसरा *वर्ष के प्रारभ से सचयी अकों को दिखाता है,* जब कि तीसरा प्रत्येक मास के साथ समाप्त होने वाले बारह मास के लिए जोड दिखाता है। *यह अन्तिम वक्र प्राय. गतिमान वार्षिक जोड वक्र कहलाता है,* अधिक विशिष्ट तौर पर, यह प्रत्येक निर्दिष्ट मास के साथ समाप्त होने वाले बारह मास के लिए 12 मास का गतिमान जोड है। जैड चार्ट के साथ दो ऊर्ध्वाधर पैमानो का प्रयोग किया गया है क्योकि यदि उसी पैमाने के साथ मासिक आँकडो का दूसरे आँकडो के रूप मे आलेखन होता तो मासिक आँकडो के उतार-चढाव स्पष्ट नही होते। *जैड-चार्ट का प्रयोग प्राय. आन्तरिक व्यापार प्रयोजनो के लिए किया जाता है,* उदाहरणत. उत्पादन और विक्रय के आँकडे दिखाने के लिए। हाँ, यह उन स्थितियो तक सीमित है जिनमे चार्ट बनाने वाला (1) एक निर्दिष्ट मास के लिए अक, (2) कैलेन्डर (या वित्त) वर्ष के बीते हुए भाग के लिए प्रत्येक मास के अक, और (3) प्रत्येक

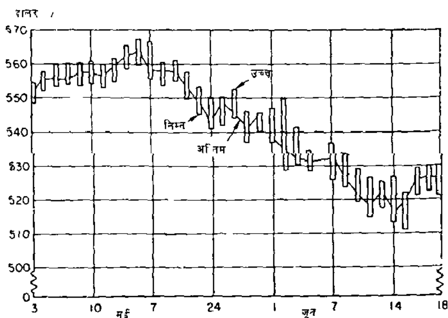


चार्ट 4.14. क्लीवलैंड ट्रस्ट कम्पनी के 1790 से अमरीकी व्यवसाय क्रिया के चार्ट का एक भाग। क्लीवलैंड ट्रस्ट कम्पनी द्वारा अप्रैल 1964 में निर्गमित उस चार्ट के 35वें सस्करण से लिया गया।

निर्दिष्ट मास के साथ समाप्त होने वाले बारह मास के लिए अंक के प्रत्यक्षीकरण में रुचि रखता है।

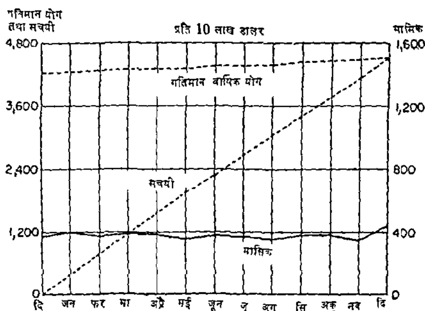


चार्ट 4 15. न्यूयार्क टाइम्स औसतों द्वारा दिखाई गई 3 मई से 18 जून, 1965 तक 50 स्टाकों की उच्च, निम्न, और अन्तिम कीमतें। आंकड़े न्यूयार्क टाइम्स के विभिन्न संस्करणों से।



चार्ट 4 16 न्यूयार्क टाइम्स औसतों द्वारा दिखाए गए 3 मई से 18 जून 1965 तक 50 स्टाकों के उच्च, निम्न, और अन्तिम मूल्य। आंकड़े न्यूयार्क टाइम्स के विभिन्न संस्करणों से।

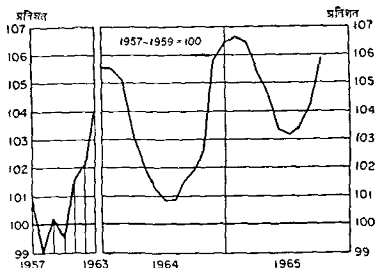
इस प्रकार के विशिष्ट प्रयोजनो को छोडकर, इस अध्याय में वर्णित प्रकार के चार्ट पर दो या अधिक ऊर्ध्वाधर पैमानो का प्रयोग करना (जो कभी-कभी "बहु पैमाने" कहलाता है) प्राय: वाछित नही है। विभिन्न इकाइयो मे वर्णित दो श्रेणियो मे हुए उतार-चढावो की (परन्तु उनके आकारो की नही) तुलना कभी-कभी दो भिन्न ऊर्ध्वाधर पैमानो वाले चार्ट पर की जा सकती है। परन्तु दो या अधिक भिन्न ऊर्ध्वाधर पैमानो के प्रयोग से विभिन्न श्रेणियो मे होने वाले परिवर्तनो के तुलनात्मक आकारो के अशुद्ध प्रत्यक्ष प्रभाव प्राप्त होने की सभावना है।



चार्ट 4.17 सयुक्त राज्य मे कुल मृत्यु लाभ अदायगियाँ : मासिक, सचयी तथा गतिमान तथा वार्षिक योग, 1964 आँकडे जीवन बीमा सस्था, साख्यिकी एव अनुसधान विभाग से प्राप्त।

परिवर्ती क्षैतिज-पैमाना चार्ट—कभी-कभी कई वर्षो के लिए वार्षिक आँकडे और अधिक हाल के वर्षों के लिए एक या दो मासिक आँकडे दिखाना वाछित होता है। यह चार्ट 4.18 के समान किया जा सकता है, जिसमे मासिक आँकडो को अधिक विस्तार से दिखाने के लिए क्षैतिज पैमाना विस्तृत कर दिया गया है। ध्यान दीजिए कि चार्ट के दोनो भाग एक विच्छेद द्वारा अलग किए गए है। इसी प्रकार क्षैतिज पैमाने मे परिवर्तन तब उचित हो सकता है यदि हम वार्षिक या मासिक आँकडो का साप्ताहिक आँकडो के साथ सयोग या वार्षिक, मासिक अथवा साप्ताहिक आँकडो का दैनिक आँकडो मे सयोग दिखाना चाहते है।

बहु-अक्ष चार्ट—कभी-कभी यह वाछनीय होता है कि कई वक्रो के उतार-चढाव की तुलना की जाए और फिर भी प्रत्येक वक्र स्पष्ट दिखाई पडे। इस परिणाम को प्राप्त करने का एक सादा तरीका यह है कि विभिन्न क्षैतिज अक्षो के साथ भिन्न वक्रो का आलेखन किया जाए (और) इन विभिन्न अक्षो को सुविधाजनक ऊर्ध्वाधर दूरियो द्वारा कृत्रिम रूप से अलग किया जाए। एक उदाहरण चार्ट 14 4 है, जो "वर्षानुवर्ष चार्ट" भी कहा जाता है। यहाँ विभिन्न वक्र तुलना की सरलता के लिए साथ-साथ समीप बनाए गए हैं, परन्तु रेखाओ को लाँघा नही गया। यद्यपि भिन्न क्षैतिज अक्षो का प्रयोग किया गया है तो भी



चार्ट 4 18 ईंधन तेल और कोयले का उपभोक्ता मूल्य सूचकांक, वार्षिक 1957—1963 तथा मासिक 1964—1965। आंकड़े फेडरल रिजर्व बुलेटिन, सितम्बर 1965, पृष्ठ 1334, तथा नवम्बर 1965 पृष्ठ 1604 से, लिए गए।

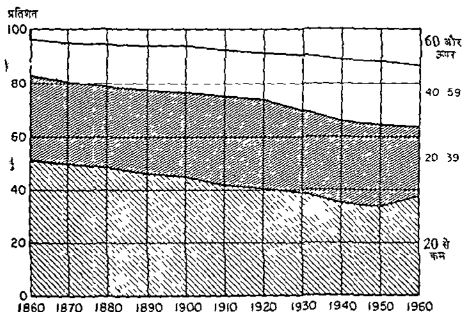
प्रति 10 लाख व्यक्ति

200
160
120
80
40
0

60 और ऊपर
40-59
20-39
20 से कम

1860 1870 1880 1890 1900 1910 1920 1930 1940 1950 1960

चार्ट 4 19 1860 से 1960 तक प्रत्येक विशिष्ट वय श्रेणी में संयुक्त राज्य की जनसंख्या। आंकड़े संयुक्त राज्य जनगणना विभाग, *फिफ्टीन्थ सेन्सस आफ दि युनाइटिड स्टेटस,* 1930, जनसंख्या खंड II, पृष्ठ 576 ; *सेन्सस आफ पापूलेशन, 1950,* खंड II, *कैरेक्ट्रिस्टिक्स आफ दि पापूलेशन,* भाग 1, यू० एस० सम पृष्ठ 1—93 तथा *सेन्सस आफ पापूलेशन,* 1960, खंड II *कैरेक्ट्रिस्टिक्स आफ दि पापूलेशन, भाग I यू०एस० समरी,* पृष्ठ 1—199 से।

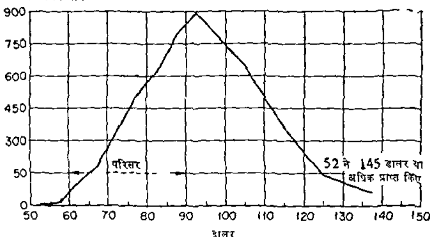


चार्ट 4 20 1860 से 1960 तक सयुक्त राज्य की जनसख्या का प्रत्येक विशिष्ट वय श्रेणी मे अनुपात । आकडे चार्ट 4 19 के नीचे दिए स्रोतो से लिए गए।

ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज पैमाने वही रहते हैं। अकगणित ग्राफ कागज पर इस प्रकार के चार्ट की व्याख्या करते समय (अगले अध्याय मे वर्णित अर्ध लघुगणकीय ग्राफ कागज से भिन्न) यह स्मरण रखना चाहिए कि प्राप्त तुलना निरपेक्ष परिवर्तनो की है और सापेक्ष परिवर्तनो की नही। यह सभाव्य नही कि इस प्रकार के चार्ट का प्रयोग सामान्य पाठक के सामने प्रस्तुति के लिए वाछनीय माना जाएगा जब तक कि रेखाचित्र के साथ एक स्पष्ट व्याख्या न हो।

सघटक भाग चार्ट—चार्ट 4 19 मे 1860 से 1960 तक सयुक्त राज्य मे प्रत्येक जनगणना के समय चार सामान्य वय श्रेणियो मे से प्रत्यक मे व्यक्तियो की सख्या दिखाई है। प्रत्येक पट्टी की ऊँचाई एक अमुक जनगणना के समय देश म प्रत्यक वय की सख्या बताती है। इस प्रकार के चार्ट से यह देखना सभव है कि एक अमुक श्रेणी बढ रही है या घट रही है अथवा नही, तथा सभी श्रेणियो का जोड बढ रहा है या घट रहा है अथवा नही। चार्ट 4 19 से किसी विशेष श्रेणी का सापेक्ष महत्त्व नही देखा जा सकता, परन्तु चार्ट 4 20 मे वय श्रेणियाँ उन्ही अनुपातो के अनुसार दिखाई गई है जितना उनका और कुल जनसख्या का है। यहाँ यह स्पष्ट देखा जा सकता है कि जनसख्या म छोटी आयु के व्यक्तियो के अनुपात मे कमी हुई है और बडी आयु के व्यक्तियो के अनुपात म वृद्धि। जब कुछ वर्षों के सघटक भाग आंकडो को ग्राफ द्वारा दिखाया जाना हो तो चार्ट 6 17 या 6 18 के ऊपरी भाग के समान एक दड चार्ट का प्रयोग किया जा सकता है। जब कई वर्ष दिखाए जान हो तो साधारण प्रवृत्ति का वक्रो द्वारा अधिक आसानी से चित्रण किया जा सकता है।

बारबारता बटन तथा परिसर चार्ट—कभी-कभी यह लाभदायक होता है कि आंकडो के एक समुच्चय के लिए बारबारता बटन वक्र दिखाया जाए और एक अन्य बटन के लिए मूल्यो के परिसर की उस वक्र से तुलना की जाए। चार्ट 4,21 मे अक्तूबर 1964 मे बोस्टन



चार्ट 4 21 काल्पनिक आंकडो के लिए अक्तूबर 1964 मे बोस्टन, मैसाचुसेट्स, मे 7,011 महिला सचिवों की साप्ताहिक आय तथा वेतन परिसर। साप्ताहिक आय के आंकडे सारणी 8 5 में से हैं और वे "बारबारता घनत्व" हैं जिनकी व्याख्या चार्ट 8 5 से सबंधित चर्चा मे की गई है।

मे 7,011 महिला सचिवों की औसत साप्ताहिक आय का एक बारबारता बटन दिखाया गया है। एक गैर व्यापारी सगठन के लिए सचिव आयो का एक काल्पनिक परिसर भी दिखाया गया है। विकल्प से दो बारबारता बटन दिखाए जा सकते थे, जैसा कि चार्ट 8 7 मे है।[5]

---

5 अधिक उन्नत चार्टों के लिए देखिए डब्ल्यू० सी० स्केटर तथा पी० ओ० टॉमस, "सम ग्राफ्स यूजफुल फॉर स्टैटिस्टिकल इन्फरेंस", जर्नल ग्राफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, खड 360, न० 309, मार्च 1965, पृष्ठ 334—343।

5

लेखाचित्री निरूपण II: अर्ध-लघुगणकीय अथवा अनुपात चार्ट

परिवर्तन की मात्रा बनाम परिवर्तन का अनुपात

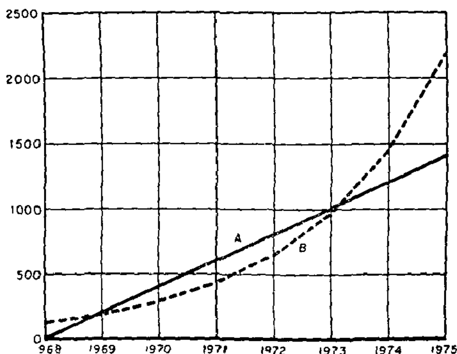
किसी कालावधि मे सांख्यिकीय आँकड़ो की श्रेणी के विकास का विचार करते समय कभी-कभी हमारी रुचि हो चुके परिवर्तन की मात्रा मे होती है, परन्तु प्राय अधिकतर हम उस परिवर्तन के अनुपात के सम्बन्ध मे कुछ जानना चाहते है जो दो तिथियो के बीच मे हुआ है। अध्याय 4 के समान आरेख इस प्रकार के हैं जिनसे हम परिचित है तथा जिनमे अकगणितीय कहलाने वाले पैमाने हैं और जो प्राथमिक तौर पर Y अक्ष पर दिखाए जाने वाले कारक मे निरपेक्ष परिवर्तनों को दिखाने के लिए उपयोगी है। इस विवेचन का प्रयोजन कुछ भिन्न प्रकार से ग्रिड की व्याख्या करना है जिससे आरेखित श्रेणी मे परिवर्तन के अनुपात पर दृष्टिपात किया जा सके।

सारणी 5 1

एक समान्तर श्रेढी

वर्ष (X मूल्य)	Y मूल्य	वृद्धि की मात्रा
1968	0	
1969	200	200
1970	400	200
1971	600	200
1972	800	200
1973	1 000	200
1974	1 200	200
1975	1,400	200

चार्ट 5 1 मे सामान्य प्रकार के चार्ट की प्रत्यक्ष प्रभाव को दिखाने की सन्तोषजनक क्षमता का दिग्दर्शन है, परन्तु परिवर्तन के अनुपात को दिखाने की नही। वक्र उन प्रतिवर्ष 200 इकाइयो की लगातार वृद्धि का प्रतिनिधित्व करता है (सारणी 5 1 देखिए), और यह या कोई अन्य, समान्तर श्रेढी (वृद्धि या कमी की समान रहने वाली मात्रा) जबकि वह रूढ या अकगणितीय ग्रिड पर आरेखित की जाए, एक सीधी रेखा द्वारा चित्रित की जाएगी। परन्तु, वक्र B अंको की उस श्रेणी को आरेखित करने का परिणाम है जो



चार्ट 5 1 एक अ कगणितीय ग्रिड पर आरेखित एक समान्तर श्रेढ़ी । (*A*) तथा एक गुणोत्तर श्रेढ़ी (*B*) । सारणी 5 1 तथा 5 2 के आंकड़े ।

128 से प्रारंभ होती है और प्रति वर्ष 50 प्रतिशत बढ़ती है (सारणी 5.2 देखिए)। आप यह देखेंगे कि यह वक्र सीधी रेखा नहीं है, जैसे-जैसे समय बीतता है वैसे-वैसे वक्र अधिकाधिक ऊपर की ओर झुकता जाता है।

सारणी 5.2

एक गुणोत्तर श्रेणी

वर्ष (*X* मूल्य)	*Y* मूल्य	प्रतिशत वृद्धि
1968	128	.
1969	192	50
1970	288	50
1971	432	50
1972	648	50
1973	972	50
1974	1,458	50
1975	2,187	50

समान रूप से बढ़ने वाले या घटने वाले अनुपात को दिखाने वाली श्रेढ़ी गुणोत्तर श्रेढ़ी कहलाती है और किसीभी गुणोत्तर श्रेढ़ी से जब उसे अकगणितीय ग्रिड पर आरेखित

किया जाए, एक वक्र रेखा उत्पन्न होगी।[1] एक बढती हुई गुणोत्तर श्रेणी एक वक्र द्वारा दिखाई गई है जिसकी ढलान ऊपर की ओर है और जो ऊपर की ओर अवतल है जैसा कि चार्ट 5.1 वक्र *B* मे है। एक घटती हुई गुणोत्तर श्रेढी एक वक्र द्वारा दिखाई गई है जिमकी ढलान नीचे की ओर है और जो ऊपर की ओर अवतल है। परन्तु इस प्रकार के वक्रो की व्याख्या करने मे एक गम्भीर कठिनाई इस बात की है कि आँख यह स्पष्ट जाँच नही कर सकती कि एक विशिष्ट वक्र रेखा समान अनुपात के परिवर्तन का प्रतिनिधित्व करती है अथवा नही। चार्ट 5 2 मे एक श्रेणी का चित्रण है जो न समान्तर श्रेढी है न ही गुणोत्तर श्रेढी है। सारणी 5 3 के आँकडो से पता चलता है कि श्रेढी समान्तर

सारणी 5 3

बढते हुए मूल्यो की श्रेणी

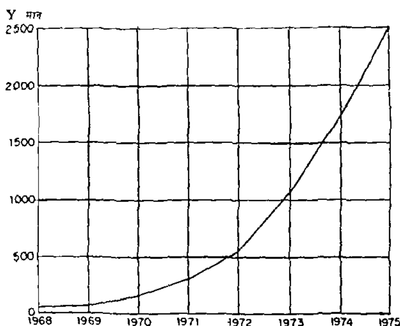
वर्ष (X मूल्य)	Y मूल्य	वृद्धि की मात्रा	प्रतिशत वृद्धि
1968	50		...
1969	80	30	60 0
1970	160	80	100 0
1971	300	140	87 5
1972	550	250	83 3
1973	1 080	530	96 4
1974	1,730	650	60 2
1975	2 500	770	44 5

श्रेढी से अधिक तीव्रता के साथ बढती है और आँख इस तथ्य को समझ सकती है क्योकि वक्र का झुकाव ऊपर की ओर है। सारणी इस ओर भी संकेत करती है कि श्रेणी की वृद्धि का अनुपात स्थिर नही है। परन्तु प्रत्यक्ष तौर पर यह तथ्य स्पष्ट नही है। एक अकगणितीय चार्ट के पाठक के लिए यह निश्चित करना सभव नही है कि इस प्रकार की वक्र रेखा वृद्धि के स्थिर अनुपात का प्रतिनिधित्व करती है या वृद्धि के उस अनुपात का जो घट रहा है अथवा वृद्धि के उस अनुपात का जो आरोही है। अको की कोई श्रेणी जो एक समान्तर श्रेढी की अपेक्षा अधिक तीव्र गति से बढती है (उदाहरणार्थ, 10, 12, 15, 19, 24, 30), ऊपर की ओर झुकती है और जब उसे अकगणितीय ग्रिड पर आरेखित किया जाता है तो वह ऊपर को अवतल हो जाती है। अको की किसी श्रेणी की ढलान, जो समान्तर श्रेढी की अपेक्षा कम तीव्रता से घटती है (उदाहरणार्थ, 100, 91, 83, 76, 70, 65) नीचे को होती है और जब उसे अकगणितीय निर्देशाको पर दिखाया जाता है तो वह ऊपर को अवतल हो जाती है।

अर्ध-लघुगणकीय या अनुपात ग्रिड के लिए आधार का विकास प्रारम्भ करने से पूर्व, जिससे हम परिवर्तन के अनुपातो का प्रत्यक्षीकरण कर पाएँगे, आइए हम अकगणितीय

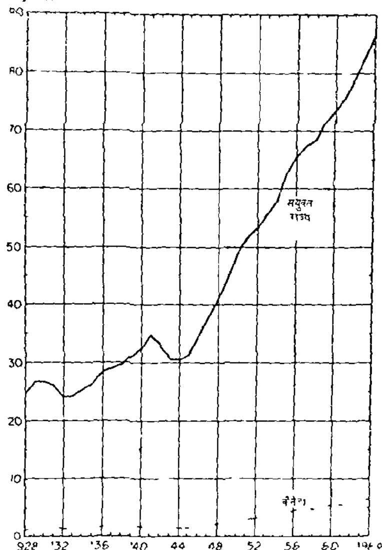
1. गुणोत्तर श्रेढी का प्रतिनिधित्व करने वाला वक्र 'घातीय वक्र' कहलाता है और समीकरण $Y=ab^x$ द्वारा दिखाया जाता है। पाठक इस समीकरण से $P_n=P_o(1+r)^n$ के रूप मे परिचित हो सकते हैं जो चक्रवृद्धि ब्याज समीकरण है और जिसका अध्याय 9 मे विवेचन है। समान्तर श्रेढी का प्रतिनिधित्व करने वाली सीधी रेखा $Y=a+bX$ द्वारा दिखाई जाती है।

पिंड की आगे परीक्षा करें। चार्ट 5 3 म 1928 से 1964 तक सयुक्त राज्य और कैनेडा मे मोटर गाडियो के पजीकरण की वृद्धि दिखाई गई है। इस चार्ट से हम देख सकते हैं कि सयुक्त राज्य म पजीकरण 1928 से 1935 तक अस्थिर थे, 1937 और 1938 के बीच मामूली कमी को छोडकर 1935 और 1941 के बीच बढ, 1941—1945 म गिरे, तथा 1946 स 1964 तक गति तीव्रता से बढे। कैनेडा म पजीकरण के परिवर्तनो को देखना कठिन है क्योकि वह पमाना जिसका प्रयोग करना सयुक्त राज्य को सम्मिलित करने के लिए आवश्यक है कनेडा क लिए वक्र को आधार रेखा के कुछ समीप गिरा देता है। फिर भी प्रतीत होता है कि कनेडा म पजीकरण 1928 से 1948 तक अपक्षाकृत स्थिर थे और फिर उसके बाद क्रमश बढने लगे। यह बिल्कुल स्पष्ट है कि प्रति वष वृद्धि और कमी की मात्राएँ सयुक्त राज्य के लिए कनेडा की अपेक्षा बडी थी परन्तु वक्रो के स्वरूप से यह जानने का कोई ढग नहा है कि वर्षानुवष किस देश मे वृद्धि और कमी के अनुपात वृहत्तर थे।



चार्ट 5 2 बढती हुई मात्राओं (द्वारा बढते हुए अकों की एक श्रेणी। *यह श्रेणी गुणोत्तर श्रेढी नहीं है परन्तु देखने मे ऐसा प्रभाव हो सकता है। सारणी 5 3 के आँकड़े।*

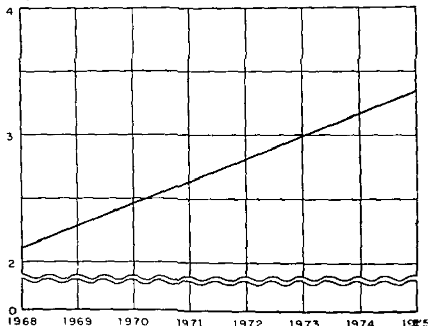
कनेडा के लिए वक्र की गतियों का आवधन करने के लिए सयुक्त राज्य के लिए एक ऊर्ध्वाधर पमाने का और कनेडा के लिए दूसरे का प्रयोग करके चार्ट 5 3 के आँकड़ो को पुन आरेखित करना पर्याप्त नहीं होगा। यह तथ्य कि एक अकगणितीय ग्रिड पर एक वक्र दूसरे के नीचे है एक ही दृष्टि म हम यह बताता है कि नीचे का वक्र ऊपर के वक्र की अपेक्षा छोटे आकार की श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है। यदि दो ऊर्ध्वाधर पैमानो का प्रयोग किया जाए तो हमारे पास वास्तव म दो भिन्न अतुलनीय चार्ट होते हैं और निम्न दृष्टि से सन्तोषजनक चाक्षुष तुलनाएँ न की जा सकेंगी (1) दो आरेखित श्रेणियो का आकार, (2) दूसरी श्रेणी म हुई परिवतन की मात्रा की तुलना मे परिवतन की जो मात्रा एक श्रेणी मे हो चुकी है, अथवा (3) दोनो श्रेणियो के परिवतन के अनुपात।



चार्ट 5 3 1928 से 1964 तक संयुक्त राज्य और कैनेडा मे मोटर गाड़ियों के पंजीकरण । आंकडे *हिस्टारिकल स्टैटिस्टिक्स ऑफ दि यूनाइटिड, स्टेट्स,* पृष्ठ 564 *स्टैटिस्टिकल एब्स्ट्रैक्ट आफ दि युनाइटिड स्टेट्स,* 1963, पृष्ठ 564, मोटरगाडी निर्माता एसोसिएशन, *ऑटोमोबाइल फैक्ट्स एन्ड फिगर्ज* 1965, पृष्ठ 19 29 तथा सांख्यिकी का डोमिनियन ब्यूरो, *कैनेडा ईयर बुक्स,* 1937, पृष्ठ 668, 1946, पृष्ठ 663, 1950, पृष्ठ 755, 1954, पृष्ठ 252, तथा 1964, पृष्ठ 774 से प्राप्त ।

परिवर्तन के अनुपात दिखाने के लिए ग्रिड

जो पहले कहा जा चुका है उससे यह अवश्य स्पष्ट हो गया होगा कि यदि हम एक ऐसे ग्रिड का प्रयोग कर सकें जिससे वृद्धि (या कमी) का एक स्थिर अनुपात एक सीधी रेखा के तौर पर प्रतीत होगा तो परिवर्तन के अनुपातों से सम्बन्धित लेखाचित्री तुलनाएँ आसान हो जाएँगी। सारणी 5.4 में सारणी 5.2 तथा चार्ट 5.1 की गुणोत्तर श्रेढी पुन



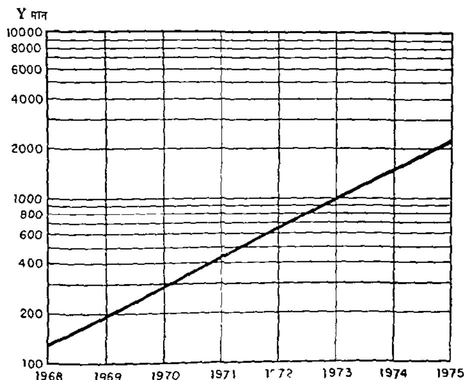
चार्ट 5.4. एक अंकगणितीय ग्रिड पर आरेखित गुणोत्तर श्रेढी के लघुगणक। सारणी 5.4 के आँकड़े।

सारणी 5.4

एक गुणोत्तर श्रेढी तथा गुणोत्तर श्रेढी के लघुगणक

वर्ष (X मूल्य)	Y मूल्य	Y मूल्य का लघुगणक	लघुगणकों की वृद्धि की मात्रा
1968	128	2 107210	..
1969	192	2 283301	.176091
1970	288	2 459392	.176091
1971	432	2 635484	176092*
1972	648	2 811575	.176091
1973	972	2 987666	176091
1974	1,458	3 193758	176092*
1975	2,187	3 339849	.176091

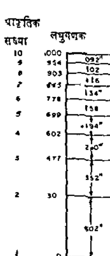
* *ये मूल्य थोड़े से भिन्न हैं क्योंकि लघुगणक निकटतम दस लाखवें भाग तक पूर्णांकित किए गए।*



चार्ट 5 5 एक अर्ध लघुगणकीय अथवा अनुपात ग्रिड पर आरेखित गुणोत्तर श्रेढी। सारणी 5 2 के आंकडे। छपे हुए अर्ध लघुगणकीय फार्मों में इस चार्ट मे दिखाई गई बीच की रेखाओ से अधिक रेखाएँ होती हैं। ये पास पास खिंची रेखाए आरेखन मे सहायक होती हैं परन्तु इस पुस्तक के अधिकतर चार्टों मे छोड दी गई हैं, क्योकि पृष्ठ के आकार के अनुसार छोटा करने से परिणाम यह होगा कि ये रेखाएँ एक दूसरी के बहुत निकट आ जाएँगी।

दिखाई गई है और इसके साथ विभिन्न अंको के लघुगणक दिए गए है। इन लघुगणको की जाँच से पता चलता है कि उनसे एक समान्तर श्रेढी बनती है। अत. यदि ये लघुगणक एक अंकगणितीय ग्रिड पर आरेखित किए जाएँ तो एक सीधी रेखा प्राप्त होगी, जैसा कि चार्ट 5 4 मे देखा जा सकता है। अपने उद्देश्य को पूर्ण करने का यह एक मार्ग है, परन्तु इसमे इससे पूर्व कि आंकडे आरेखित किए जा सके लघुगणक देखने का अतिरिक्त पग आता है। परन्तु एक श्रेणी के मूल्यों के लघुगणको को आरेखित करने की अपेक्षा हम एक ऐसे ग्रिड का प्रयोग कर सकते है जो एक लघुगणकीय ऊर्ध्वाधर पैमाने के साथ बनाया गया है, जैसाकि चार्ट 5 5 मे है। यहाँ पुन हम देखते है कि गुणोत्तर श्रेढी एक सीधी रेखा के तौर पर दिखाई देती है। इस प्रकार का ग्रिड अर्ध लघुगणकीय कहलाता है क्योकि एक पैमाना लघुगणकीय है और दूसरा अंकगणितीय।

लघुगणकीय पैमाना—लघुगणकीय पैमाने के निर्माण म केवल मात्र इतनी बात है कि ऊर्ध्वाधर पैमाने के मूल्यो के बीच म उनके लघुगणको के बीच के अन्तरो के अनुपात म स्थान छोडा जाता है। चार्ट 5 6 की ओर संकेत से यह पता चलेगा कि पैमाने पर 2 से 3 तक दूरी 0 352 इंच है और 3 से 4 तक 0 250 इंच है। तब हमारे पास निम्नलिखित आ जाता है



चार्ट 5 6 लघुगणकीय पैमाना। ऊर्ध्वाधर दूरियाँ लघुगणकों के बीच के अन्तरों के समानुपातिक है। प्रत्येक ऊर्ध्वाधर दूरी इंचों में माप गए लघुगणकों के बीच के अन्तर से दुगुनी है।

$$\frac{\text{लघु } 3 - \text{लघु } 2}{\text{लघु } 4 - \text{लघु } 3} = \frac{0\ 35\text{' इंच}}{0\ 250 \text{ इंच}}$$

$$\frac{0\ 477 - 0\ 301}{0\ 602 - 0\ 477} = \frac{0\ 352 \text{ इंच}}{0\ 250 \text{ इंच}}$$

और अनुपात है

0 176 0 125 · 0 352 इंच 0 250 इंच।

लघुगणकीय पैमाने को समझने के एक वैकल्पिक तरीके में लघुगणक नही आते। चार्ट 5 1 के संकेत से स्मरण हो जाएगा कि एक अंकगणितीय ग्रिड ऊर्ध्वाधर पैमाने पर समान दूरियाँ समान मात्राओं का प्रतिनिधित्व करती है। परन्तु एक लघुगणकीय पैमाने के साथ मापी गई समान दूरियाँ समान अनुपातों का प्रतिनिधित्व करती है। चार्ट 5 5 के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर यह देखा जा सकता है कि 100 से 200 तक दूरी 0 48 इंच है, इसी प्रकार 300 से 600 तक दूरी 0 48 इंच है। माप से पता चलेगा कि इस पैमाने पर अनुपात 1 2 की किन्ही भी दो संख्याओं में 0 48 इंच का अन्तर किया गया है। इसी पैमाने पर 200 से 800 तक दूरी 0 9 'इंच है और यह परिणाम निकलता है कि अनुपात 1 4 की किन्ही दो संख्याओं के बीच 0 96 इंच का अन्तर होगा। इस प्रकार हम देखते हैं कि अर्ध-लघुगणकीय चार्ट प्राय अनुपात चार्ट क्यो कहलाता है।

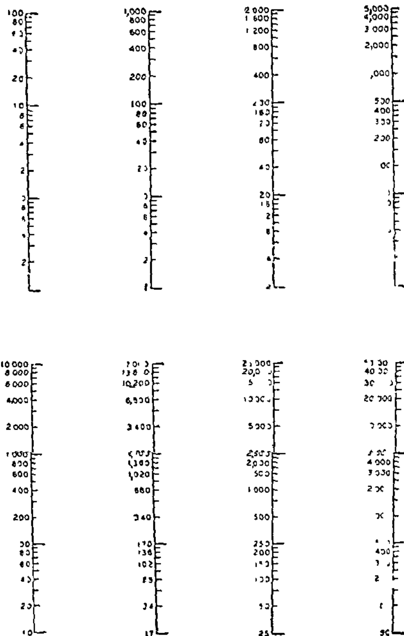
चार्ट 5 5 का ऊर्ध्वाधर पैमाना दो भागो मे बाँटा गया है जो प्राय चक्र कहलाते है। अत हम उस कागज़ को जिस पर चार्ट 5 5 खींचा गया है "द्वि-चक्र अर्ध लघुगणकीय कागज़" कहते है। एक अर्ध लघुगणकीय चार्ट के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर लेबल लगाने मे हम किसी भी धनात्मक मूल्य से प्रारम्भ कर सकते हैं। प्रथम चक्र के शीर्ष पर अक, चक्र के तल के अक से दस गुना होगा, द्वितीय चक्र के शीर्ष पर अक, द्वितीय चक्र (प्रथम चक्र का शीर्ष) के तल के अक से दस गुना होगा इत्यादि।[2] चार्ट 5 7 मे क्रमश 0 1, 1, 2,⁵, 10, 17, 25 तथा 50 से प्रारम्भ होने वाले 8 भिन्न लघुगणकीय पैमानो के उदाहरण है। यद्यपि गणित की दृष्टि से किसी धनात्मक मूल्य से लघुगणकीय पैमाने को प्रारम्भ करने की अनुज्ञा है तो भी एक एसा पैमाना चुनना उचित है जिससे बीच के मूल्यो का तुरन्त अन्तर्वेशन किया जा सके। 17 से प्रारम्भ होने वाले पैमाने का प्रयोग करना बहुत कठिन होगा। यदि 0 5 से प्रारम्भ होने वाला त्रि-चक्रीय पैमाना लेना वाछनीय हो तो प्रथम पैमाने के विभिन्न मूल्यो को 5 से गुना किया जा सकता है। अधिकतर लाइन लगे हुए अर्ध लघुगणकीय कागज़ मे ग्रिड के दाएँ किनारे के साथ पैमाने के पदनाम होते हैं। ये गुना करने वाले कारक हैं और ये सकेत करते हैं कि बाएँ पैमाने पर प्रत्येक क्षैतिज रेखा के सामने लिखा जाने वाला

---

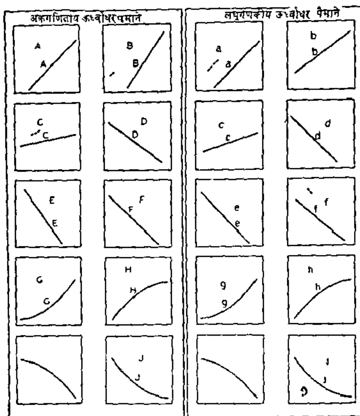
2 एक सामान्य लघुगणक वह शक्ति है जिसस दी हुई सख्या प्राप्त करने के लिए 10 को उठाना आवश्यक है। इस प्रकार, $100=10^2$ और 100 का लघुगणक 2 0 है, $10{,}000=10^4$, तथा 10 000 का लघुगणक 4 0 है।

मूल्य वह मूल्य होना चाहिए जो उस चक्र के नीचे लिखे मूल्य को दाईं ओर के पैमाने पर उस क्षैतिज रेखा के सामने दिखाए अंक से गुना करके आएगा।

यदि लघुगणकीय पैमाना शून्य से प्रारम्भ किया जाए तो प्रथम चक्र का शिखर $10 \times 0 = 0$ होगा और पैमाने पर सभी मूल्य भी शून्य होगे। कल्पना कीजिए कि त्रि-चक्रीय लघुगणकीय पैमाने का सर्वोपरि मूल्य 0.01 है। तब तीसरे चक्र का तल 0.01 का $\frac{1}{10}$ या 0.001 है, दूसरे चक्र का तल 0.0001 है, और पहले चक्र का तल 0.00001 है।



चार्ट 5.7. लघुगणकीय ऊर्ध्वाधर पैमाने। 17 से प्रारम्भ होने वाले पैमाने का प्रयोग करना कठिन होगा।



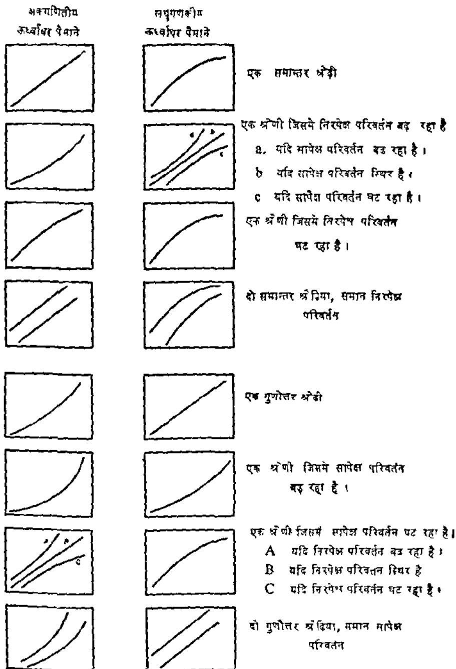
अंकगणितीय ऊर्ध्वाधर पमाने

A A —वृद्धि की स्थिर मात्राए दोनो वक्रो के लिए एकसमान
B B —वृद्धि की भिन्न स्थिर मात्राए B के लिए अधिक।
C C —वृद्धि की भिन्न स्थिर मात्राए C के लिए अधिक।
D D —घटने की स्थिर मात्राए दोनो वक्रो के लिए एकसमान।
E E —घटने की भिन्न स्थिर मात्राए E के लिए अधिक
F F —घटने की भिन्न स्थिर मात्राए F के लिए अधिक।
G G —वृद्धि की मात्राए बढ़ती हुई दोनो वक्रो के लिए एकसमान।
H H —वृद्धि की मात्राए घटती हुई दोनो वक्रो के लिए एकसमान।
I I —घटने की मात्राए बढ़ती हुई दोनो वक्रो के लिए एकसमान
J J —घटने की मात्राए घटती हुई दोनो वक्रो के लिए एकसमान।

लघुगणकीय ऊर्ध्वाधर पमाने

a a —वृद्धि की स्थिर प्रतिशतताए दोनो वक्रो के लिए एकसमान।
b b —वृद्धि की भिन्न स्थिर प्रतिशतताए b के लिए अधिक।
c c —वृद्धि की भिन्न स्थिर प्रतिशतताए c के लिए अधिक।
d d —घटने की स्थिर प्रतिशतताए दोनो वक्रो के लिए एकसमान।
e e —घटने की भिन्न स्थिर प्रतिशतताए e के लिए अधिक
f f —घटने की भिन्न स्थिर प्रतिशतताए f के लिए अधिक।
g g —वृद्धि की प्रतिशतताएँ बढ़ती हुई दोनो वक्रो के लिए एकसमान
h h —वृद्धि की प्रतिशतताए बढ़ती हुई दोनो वक्रो के लिए एकसमान।
i i —घटने की प्रतिशतताए बढ़ती हुई वक्रो के लिए एकसमान
j j —घटने की प्रतिशतताए घटती हुई वक्रो के लिए एकसमान।

चार्ट 5 8 क अंकगणितीय तथा अर्ध लघुगणकीय ग्रिड पर वक्र। नीचे के आठ वर्गों मे से प्रत्येक मे दो वक्र ऊर्ध्वाधर रूप से एक दूसरे से समान अन्तर पर हैं।



58 ख—अंकगणितीय तथा लघुगणकीय ऊर्ध्वाधर पैमानों के संबंध में आरेखित विभिन्न प्रकार की श्रेणियों की तुलनाएँ। एक पैमाने पर दिखाई गई आरेखित श्रेणियां दूसरे पर दिखाई गई के समान बन जाती हैं। ऊपर की तुलनाएं केवल बढ़ती हुई श्रेणियों की ओर संकेत करती हैं। सुझाव दिया जाता है कि पाठक घटती हुई श्रेणियों वाली कुछ तुलनाओं का रेखाचित्र खींचें।

इस प्रकार कोई शून्य आधार रेखा नही हो सकती और अर्ध-लघुगणकीय चार्ट आधार रेखा के ऊपर दूरियों के रूप मे वक्रो की व्याख्या की अनुमति नही देता, जैसे कि अकगणितीय चार्ट देता है, यद्यपि आरेखित मूल्य ऊर्ध्वाधर लघुगणकीय पैमाने के साथ पढा जा सकता है, आरेखित निरपेक्ष परिमाणों का कोई प्रत्यक्ष मत नही बनाया जा सकता। अर्ध-लघुगणकीय चार्ट मे इस प्रकार दिखाया जाता है (1) एक समान अनुपात का परिवर्तन एक सीधी रेखा के तौर पर, (2) वृद्धि या कमी का अनुपात रेखा के झुकाव से, तथा (3) दो या अधिक रेखाओ मे अनुपातो की तुलना इन रेखाओ के समान्तरण या इसके अभाव द्वारा।

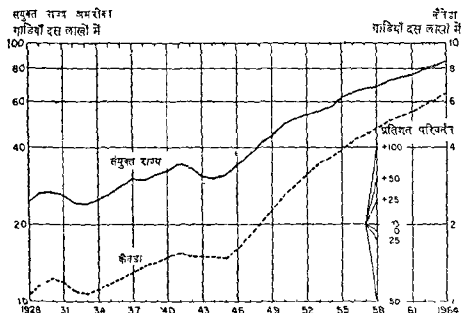
जब भी लघुगणकीय पैमाने का प्रयोग किया जाता है तो पर्याप्त रेखाएँ या रेखाएँ और टिक दिखाएँ जाने चाहिए ताकि पाठक को यह जानकारी रहे कि वह अकगणितीय ग्रिड पर खीचे गए चार्ट को नही देख रहा है। क्योकि लघुगणकीय पैमाने के अतिरिक्त अन्य असमान अन्तर वाले पैमाने (उदाहरणार्थ, व्युत्क्रम पैमाना) है, अत कभी-कभी यह कहना भी वाछनीय है· "अनुपात चार्ट", "अर्ध-लघुगणकीय चार्ट", या "लघुगणकीय ऊर्ध्वाधर पैमाना"।

नोट कीजिए कि लघुगणकीय पैमाने मे एक समाकल सख्या मे चक्र आ सकते हैं, जैसा कि चार्ट 5 5 मे है, जिसमे दो चक्र हैं और चार्ट 5 9 मे, जिसमें एक चक्र है। दूसरी ओर हम एक चक्र के भाग का प्रयोग कर सकते हैं, जैसा कि चार्ट 13.1 मे है, अथवा हम एक या अधिक चक्र तथा दूसरे चक्र के भाग का प्रयोग कर सकते हैं, जैसा कि चार्ट 11.4B मे है।

वक्रो की व्याख्या—अर्ध-लघुगणकीय चार्ट के अनुप्रयोगो का विचार प्रारम्भ करने से पूर्व, चार्ट 5 8 क तथा 5 8 ख और उनके नीचे की टिप्पणियो की ओर ध्यान दिया जाना चाहिए। जब अर्ध-लघुगणकीय कागज पर दो सीधी रेखाएँ समान्तर है (उदाहरणार्थ a, a'; d, d'), तो हम जानते हैं कि उनके परिवर्तन के स्थिर अनुपात है और यह भी कि दोनो के बीच अनुपात स्थिर रहा है। वक्र रेखाओ के बीच समान्तरण को आँख से आँकना बडा कठिन है। चार्ट 5 8 क के नीचे के भागो की ओर सकेत से पता चलेगा कि वक्र रेखाओ मे सदा एक समान ऊर्ध्वाधर अन्तर है और इस प्रकार प्रत्येक भाग मे दोनो वक्र X-अक्ष के सबध मे समान्तर हैं।

अनुप्रयोग

वृद्धि अथवा ह्रास के अनुपातो की तुलना क्योकि अर्ध-लघुगणकीय चार्ट के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य नही है और इसीलिए कोई आधार रेखा नही है और क्योकि समान ऊर्ध्वाधर दूरियाँ (उसी पैमाने पर) सदा एकसमान अनुपात का प्रतिनिधित्व करती हैं, (इसलिए) विभिन्न परिमाण के वक्रो को तुलना के लिए साथ-साथ लाने के लिए दो या अधिक भिन्न ऊर्ध्वाधर पैमानो के प्रयोग की अनुज्ञा है। ऐसा चार्ट 5 9 मे दिया गया है जो पहले चार्ट 5 3 मे अकगणितीय ग्रिड पर दिखाए गए मोटर गाडियो के पजीकरणो के आँकडे प्रस्तुत करता है। अर्ध-लघुगणकीय चार्ट के ऊर्ध्वाधर पैमाने के स्थानान्तरण से वक्र ऊपर या नीचे चला जाता है परन्तु झुकाव, जो कि अत्यन्त महत्वपूर्ण है इसमे नही बदलता। दो लघुगणकीय पैमानो का प्रयोग करते समय, जैसा कि चार्ट 5 9 मे है, छोटे परिमाण की श्रेणियो को बडे परिमाण के नीचे रखना वाछनीय है (यद्यपि पूर्णरूपेण आवश्यक नही)। इसी प्रकार यदि एक या अधिक भागो की कुल से तुलना की जा रही हो तो भागो के लिए वक्र कुल के लिये वक्र से नीचे होने चाहिएँ।



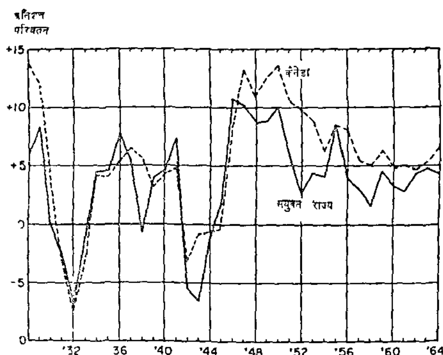
चार्ट 5 9 1928 से 1964 तक संयुक्त राज्य और कैनेडा में मोटर गाड़ियों के पंजीकरण। आँकड़े चार्ट 5 3 के नीचे दिए स्रोतों से।

चार्ट 5.3 से संयुक्त राज्य में या कैनेडा में मोटर गाड़ियों के पंजीकरणों की सापेक्ष वृद्धि का हमें कोई आभास नहीं हुआ। परन्तु चार्ट 5 9 में प्रत्येक श्रेणी के लिए सापेक्ष वृद्धि दिखाई गई है और इससे हम इन दो असमान आकार की श्रेणियों की वृद्धि के अनुपातों की तुलना करने के योग्य हो जाते है। सामान्य तौर पर, दोनों श्रेणियों में सारी अवधि में वृद्धि और कमी के लगभग समान अनुपात दिखाए गए हैं। तो भी 1947 से 1964 तक वृद्धि का अनुपात कैनेडा के लिए अधिक दिखाई पड़ता है। चार्ट 5 9 पर लेखन से किसी एक वर्ष से अगले वर्ष तक दिखाए गए वक्रों के लिए वृद्धि या कमी के अनुपात का अनुमान करना सम्भव हो जाता है। परन्तु यह बात अन्य चार्टों पर लागू नहीं होती, जिनके पैमाने भिन्न है।

संयुक्त राज्य और कैनेडा में मोटर गाड़ियों के पंजीकरणों में सापेक्ष परिवर्तन को दिखाने का एक वैकल्पिक ढंग प्रति वर्ष प्रतिशत परिवर्तन का हिसाब लगाना और परिणामों को एक अकगणितीय ग्रिड पर आरेखित करना है। ऐसा चार्ट 5 10 में किया गया है।

एक ही कालावधि में दो भिन्न श्रेणियों के प्रतिशत परिवर्तन की तुलना करने की अपेक्षा विभिन्न समयों पर उन्ही श्रेणियों की वृद्धि के अनुपातों की तुलना करने में हमारी रुचि हो सकती है। इस प्रकार चार्ट 5 9 में हम देख सकते हैं कि संयुक्त राज्य मोटर गाड़ी पंजीकरणों की प्रतिशत वृद्धि 1954 से 1955 तक 1955 से 1956 तक की अपेक्षा अधिक थी और साथ ही सापेक्ष कमी 1942 से 1943 तक 1937 से 1938 तक की अपेक्षा अधिक थी। इसी प्रकार के निष्कर्ष चार्ट 5 10 से निकाले जा सकते हैं।

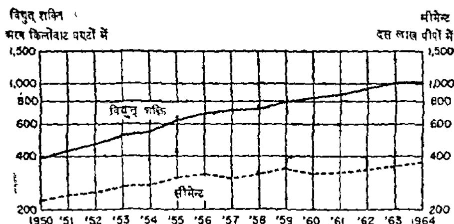
ऐसी श्रेणियों की तुलना करना बहुधा आवश्यक है जो भिन्न इकाइयों में व्यक्त की गई हो। उदाहरणार्थ, हम निम्न में से किन्ही दो या अधिक की तुलना कर सकते हैं व्यापारिक विफलताएँ, दस लाख डालरों में, स्टॉक बाजार में व्यापार की मात्रा, बेचे गए हिस्सों



चार्ट 5 10 1928 से 1964 तक सयुक्त राज्य और कैनेडा मे मोटर गाड़ियों के पजीकरणों मे वृद्धि या कमी का वार्षिक प्रतिशत। चार्ट 5 3 के नीचे दिए गए स्रोतो से लिए आँकडे।

की सख्या मे, कोयला उत्पादन, 2,000 पाउड टनो मे, पैट्रोल का उत्पादन, 42 गैलन के बैरलो मे, इमारती लकडी का उत्पादन, बोर्ड फुटो मे, सीमेन्ट उत्पादन, 376-पाउड बैरलो मे, उत्पादित विद्युत् शक्ति, किलोवाट घण्टों मे, निर्मित गैस, घन फुटो मे। 376-पाउंड बैरलो को टनो मे परिवर्तित करना सभव है, परन्तु किलोवाट घटो को बोर्ड फुटो मे बदलना या इसके विपरीत सभव नही है।

विभिन्न इकाइयो मे अभिव्यक्त दो श्रेणियो को जब अकगणितीय ग्रिड पर आरेखित किया जा सकता है, तब बहुधा ऐसा नही है कि इस प्रकार की तुलना उपयोगी हो। दो श्रेणियाँ साथ साथ घटती-बढती है कि नही इतना निश्चित करने के अतिरिक्त हमारी रुचि किलोवाट घटो मे विद्युत् शक्ति उत्पादन के परिवर्तनो की बैरलो मे सीमेन्ट उत्पादन के परिवर्तनो से तुलना की सभावना नही है। इसके स्थान पर हमारी इच्छा विद्युत् शक्ति उत्पादन के प्रतिशत परिवर्तन की सीमेन्ट उत्पादन के प्रतिशत परिवर्तन से तुलना करने की हो सकती है। अर्ध-लघुगणकीय ग्रिड पर शून्य आधार रेखा नही है, केवल वक्र का झुकाव अर्थपूर्ण है, और हम इस प्रकार की असमान इकाइयो मे व्यक्त, जिनका अभी-अभी वर्णन हुआ है, दो श्रेणियो मे सापेक्ष परिवर्तनो की उचित तुलना करने के योग्य हो गए हैं। चार्ट 5 11 मे 1950 से 1964 तक विद्युत् शक्ति और पोर्टलैंट सीमेन्ट के उत्पादन की तुलना दिखाई है। अन्य रुचिकर तुलनाओ मे 1950 से 1957 तक विद्युत् शक्ति के उत्पादन मे वृद्धि के अधिक तीव्र अनुपात और 1956 और 1959 मे सीमेन्ट के उत्पादन मे दो शिखरो को नोट किया जा सकता है।

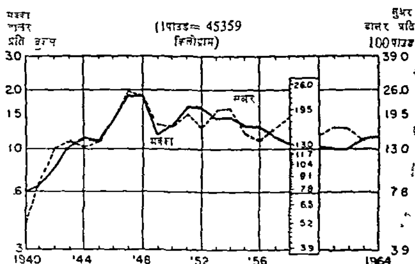


चार्ट 5.11 1950 से 1964 तक विद्युत् शक्ति तथा पोर्टलैंड सीमेन्ट का उत्पादन।
आंकड़े स्टेटिस्टिकल ऐब्सट्रैक्ट आफ दि यूनाइटिड स्टेट्स की विभिन्न प्रतियों और सर्वे आफ करन्ट बिजनेस, मई 1965, पृष्ठ एस 26 तथा एस 38 से। 1951 के लिए सीमेन्ट का उत्पादन अनुमानित है।

उतार-चढ़ावों की तुलना—दो भिन्न आकार की तैथिक श्रेणियों में हो रहे उतार-चढ़ावों की तुलना का उदाहरण चार्ट 5.3 तथा 5.9 में दिया जा सकता है, जिनमें 1928 से 1964 तक के लिए संयुक्त राज्य और कैनेडा में मोटर गाड़ी पंजीकरणों की संख्या दिखाई गई है। दोनों श्रेणियाँ दस लाख में व्यक्त की गई हैं, परन्तु संयुक्त राज्य के पंजीकरण कैनेडा से बहुत अधिक हैं। परिणाम यह है कि जब दोनों श्रेणियाँ अंकगणितीय ग्रिड पर दिखाई गई हैं, जैसाकि चार्ट 5.3 में है, तो बड़ी श्रेणी के उतार-चढ़ाव स्पष्ट रूप में देखे जा सकते हैं परन्तु छोटी श्रेणी के उतार-चढ़ाव दिखाई नहीं देते। जब दोनों समुच्चयों के आँकड़े अर्धगणकीय ग्रिड (चार्ट 5.9) पर चित्रित किए गए हैं तो न केवल दोनों श्रेणियों के उतार-चढ़ाव देखे जा सकते हैं, बल्कि उनकी सापेक्ष तीव्रता की तुलना की जा सकती है। उदाहरण के लिए, चार्ट 5.9 से यह स्पष्ट है कि 1949 से 1952 तक कैनेडा के पंजीकरणों की वृद्धि का अनुपात इन्हीं वर्षों के लिए संयुक्त राज्य के पंजीकरणों में वृद्धि के अनुपात से अधिक था, और यह भी कि 1941 से 1943 में कैनेडा की अपेक्षा संयुक्त राज्य में सापेक्ष कमी अधिक थी। ये आँकड़े उतार-चढ़ावों की तुलना में सन्निहित सिद्धांतों के उदाहरण हैं। अधिक सामान्य तौर पर विश्लेषणों का संबंध पंजीकरणों के आँकड़ों की अपेक्षा उत्पादन और उपभोग में उतार-चढ़ावों के साथ अधिक होगा।

दो श्रेणियों में रुचि लेने की बजाय हमारी इच्छा एक ऐसी अकेली श्रेणी की तरंगों की तुलना करने की हो सकती है जो एक कालावधि में अपेक्षाकृत छोटे मूल्यों के इर्द-गिर्द और अन्य समय में निश्चित तौर पर बड़े मूल्यों के इर्द-गिर्द घटी-बढ़ी। उदाहरणार्थ, 1921 से 1935 तक व्यापारिक दिक्कतें लगभग 22 हजार वार्षिक थीं। 1941 से 1950 तक वे लगभग 5,500 वार्षिक थीं। 1960 में उनकी औसत संख्या लगभग 16,000 वार्षिक रही। अर्ध-लघुगणकीय चार्ट की सहायता से इस प्रकार के विभिन्न समयों में उतार-चढ़ावों की सापेक्ष तीव्रता का हम अध्ययन करने के योग्य हो जाते हैं।

अनुपातों का दिग्दर्शन—चार्ट 5.12 में दिखाया है कि अर्ध-लघुगणकीय चार्ट पर अनुपात कैसे प्रस्तुत किए जा सकते हैं। दो प्रारंभित श्रेणियाँ किसानों द्वारा मक्का के लिए

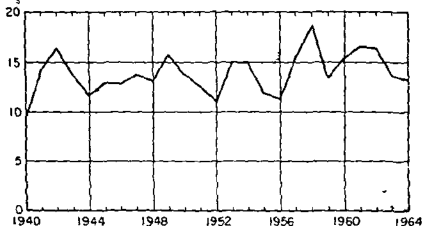


चार्ट 5 12 1940 से 1964 तक मक्का की प्रति बुशल और सुअरो की प्रति सौ पाउन्ड औसत फार्म कीमतें। पूरक पैमाने की सहायता से हम किसी वर्ष के लिए मक्का के मूल्य के सम्बन्ध मे सुअर की कीमतो का अनुपात पढ़ने के योग्य हो जाते हैं। मूल्य 13 मक्का की रेखा के सामने रखा गया है और सुअर की रेखा के सामने के मूल्य से प्रति बुशल मक्का की कीमत के सम्बन्ध मे प्रति सौ पाउड सुअर की कीमत का अनुपात प्राप्त होता है। 1958 के लिए अनुपात 19 से थोड़ा सा कम दिखाया गया है जिसका चार्ट 5 13 से सत्यापन किया जा सकता है। पूरक पैमाना उसी प्रकार अंशांकित किया गया है जैसे चार्ट के दाइं ओर का पैमाना। जब 13 मक्का की रेखा के सामने रखा गया है क्योंकि सुअर की कीमतों के लिए पैमाने पर ऐसे मूल्य हैं जो मक्का की कीमतो के लिए पैमाने पर तदनुसार मूल्यो से 13 गुना हैं। आंकड़े कृषि विभाग, एग्रीकल्चरल स्टैटिस्टिक्स, *1964*, पृष्ठ 330 तथा स्टैटिस्टिकल ऐब्स्ट्रैक्ट आफ दि युनाइटिड स्टेट्स, *1965*, पृष्ठ 651 से।

प्राप्त प्रति बुशल मूल्य और किसानो द्वारा सुअरो के लिए प्राप्त प्रति 100 पाउन्ड मूल्य हैं। जब मक्का के लिए सुअरो की कीमत से कम कीमत प्राप्त होती है तो किसानो को प्रायः नकदी के बदले मक्का बचने की अपेक्षा मक्का सुअरो को खिलाना लाभदायक प्रतीत होगा। दूसरी ओर, जब मक्का के लिए सुअरो के लिए प्राप्त कीमत से अधिक कीमत प्राप्त हो रही हो तब किसानो की प्रवृत्ति नकदी के बदले मक्का बचने की होगी। यदि किसान को 100 पाउन्ड सुअरो से, मक्का के एक बुशल से लगभग 13 गुना प्राप्ति होती है तो किसान के लिए यह बात प्रायः नगण्य होगी कि वह अपना मक्का नकदी के बदले मे बेचता है या मक्का अपने सुअरो को खिलाता है।[3] इस कारण चार्ट 5 12 के दो पैमाने 13 . 1 के अनुपात मे रखे गए हैं।[4] चार्ट मे न केवल सुअरों की कीमत और मक्का की कीमत मे उतार-चढ़ाव दिखाया गया है परन्तु इससे यह देखना भी सरल हो जाता है कि कब 100 पाउन्ड सुअरो की कीमत मक्का के 1 बुशल की कीमत से ठीक 13 गुना है, इससे अधिक

3 पृष्ठ 131 देखिये जहाँ सुअर-मक्का के अनुपात का विवरण दिया गया है।

4. सुअर की कीमतों का पैमाना अनुपयुक्त है परन्तु इस उदाहरण मे आवश्यक है।

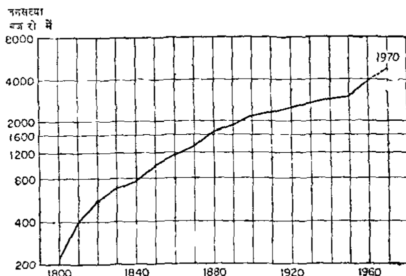


चार्ट 5.13 1940 से 1964 तक सुअर मक्का अनुपात। *सुअरों की प्रति सौ पाउन्ड औसत फार्म कीमत को मक्का की प्रति बुशल औसत कीमत से भाग करके अनुपात प्राप्त किया गया है। यह अनुपात बताए मूल्यों पर सौ पाउड जीवित सुअर खरीदने के लिए आवश्यक मक्का के बुशलों की संख्या है। आंकड़े चार्ट 5.12 के नीचे दिए गए स्रोतों से।*

है या कम है। जब 100 पाउन्ड सुअर मक्का के एक बुशल के 13 गुना से अधिक के लिए बिक रहा है तो सुअरों का वक्र मक्का के वक्र से ऊपर है, सुअर अपेक्षाकृत मूल्यवान् हैं और किसानों की प्रवृत्ति अपने सुअरों को मक्का खिलाने की है। जब 100 पाउड सुअर मक्का के एक बुशल के 13 गुना से कम के लिए बिक रहा है तो सुअरों का वक्र मक्का के के वक्र से नीचे है, मक्का अपेक्षाकृत मूल्यवान् है और किसानों की नकदी के बदले मक्का बेचने की प्रवृत्ति है। जब दोनों वक्र समानान्तर है, तो अनुपात स्थिर रहता है जब मक्का की कीमत का वक्र सुअर की कीमत के वक्र की अपेक्षा अधिक तीव्रता से ऊपर की ओर (अथवा कम तीव्रता से नीचे की ओर) झुका हुआ है तो मक्का सुअरों की अपेक्षा अधिक मूल्यवान् हो रहा है, जब मक्का के मूल्य का वक्र सुअर की कीमत के वक्र की अपेक्षा कम तीव्रता से ऊपर की ओर (या अधिक तीव्रता से नीचे की ओर) झुका हुआ है तो मक्का सुअरों की अपेक्षा कम मूल्यवान् हो रहा है। पूरक पैमाने से, जो कागज का अलग टुकडा है और जो चार्ट पर दिखाया गया है, पाठक किसी भी समय दोनों कीमत वक्रों के बीच अनुपात मापने के योग्य हो जाता है।

चार्ट 5.13 में सुअर और मक्का की कीमतों के बीच सम्बन्ध दिखाने के एक अन्य ढग का उदाहरण है। यहाँ मक्का की कीमतों के सम्बन्ध में सुअर की कीमतों के अनुपात का प्रत्येक मास के लिए परिकलन किया गया है और एक अलगणितीय ग्रिड पर (उसे) आरेखित किया गया है। अनुपात का पूरक पैमाने के प्रयोग के बिना अध्ययन किया जा सकता है, परन्तु मक्का कीमतों और सुअर कीमतों में परिवर्तन नहीं दिखाए गए हैं।

अन्तर्वेशन तथा बाह्यवेशन—जबकि एक अकगणितीय चार्ट पर अन्तर्वेशन एक अकगणितीय अन्तर्वेशन है, अर्ध-लघुगणकीय चार्ट पर अन्तर्वेशन एक लघुगणकीय अन्तर्वेशन है। इस प्रकार यदि हम चार्ट 5 5 की ओर निर्देश करें और ग्राफ के द्वारा 1972 और 1973 के बीच में Y मूल्य के लिए अन्तर्वेशन करें तो हमें लगभग 790 प्राप्त होता है,



चार्ट 5 14 संयुक्त राज्य के पूर्व दक्षिण केन्द्रीय मंडल मे 1800 से 1960 तक पुरुष जनसख्या तथा 1970 के लिए स्थुल अनुमान । अर्ध लघुगणकीय चार्ट का एक सदिग्ध प्रयोग। पूर्व दक्षिण केन्द्रीय विभाग मे अन्तर्भूत राज्य हैं अलबामा, केंटकी, मिसिस्सीपी और टैनेसी। आँकडे, सयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो, *यू० एस० सेंसस आफ पापूलेशन, 1950,* खण्ड I, *निवासियों की सख्या,* पृष्ठ *1—8 और 1—9 तथा 1960,* खण्ड I, *कैरेक्ट्रिस्टिक्स आफ दि पापूलेशन,* भाग I, *यू० एस० समरी,* पृष्ठ 1—264 से ।

जो लगभग वही वक्र है जो हमे तब प्राप्त होता है जब हम (लघु 648+लघु 972) —2 का प्रयोग करें और निष्कर्ष का प्रति-लघुगणक लें ।

बाह्यवेशन मे वक्र के एक सिरे को या दूसरे सिरे को बढाना होता है। यदि हम जिन वर्षों के लिए हमारे पास आँकडे हैं उनसे बाद के वर्षों के लिए अनुमान करने के लिए वक्र को बढावें तो हम पूर्वानुमान कर रहे हैं। अर्ध-लघुगणकीय चार्ट के इस प्रयोग का निश्चित तौर पर सदिग्ध मूल्य है यदि इसका तात्पर्य केवल एक ऐसे वक्र को बढाना है जो भूतकाल मे यह सकेत कर चुका हो कि आँकडे काफी स्थिर वृद्धि की दर का प्रदर्शन करते है। किसी भी पूर्वानुमान के ढग पर, जिसमे केवल मात्र एक वक्र का सातत्य या एक सूत्र का स्वय प्रयोग आता है (और) साथ-साथ अध स्थ एव सशोधक कारकों का ध्यानपूर्वक विचार आवश्यक नही है, कठिनता से ही निर्भर कर सकते हैं, विशेष तौर पर यदि आर्थिक स्थितियाँ परिवर्तन की स्थिति मे है। चार्ट 5 14 का वक्र 1800 से 1960 तक सयुक्त राज्य के पूर्व दक्षिण केन्द्रीय विभाग की चौदह वर्ष और अधिक आयु की पुरुष जनसख्या दिखाता है। यद्यपि वक्र का विस्तार 1970 के लिए सभावित अनुमान की ओर सकेत करता है तथापि यह अनुभव करना चाहिए कि केवल पहले की जनगणनाओं के ज्ञान पर आधारित 1970 की जनसख्या के किसी अनुमान की कोई मान्यता नही हो सकती। निम्न प्रकार के विचारो की उपेक्षा कर दी गई है मडल की ओर (या से) उद्योग की गतियाँ, अन्य कही स्थित नगरो के विकेन्द्रीकरण के कारण विभाग मे जनसख्या मे सभावित

वृद्धि, विभाग से नीग्रो लोगो की सतत गति या उस गति का वैपरीत्य, तथा अन्य कारक।[5]

अब जबकि पाठक को अर्ध-लघुगणकीय चार्ट के स्वरूप और प्रयोगो से परिचय है वह पुस्तकों, लेखो या प्रतिवेदनो मे अंकगणितीय चार्टों की कभी-कभी प्रस्तुति नोट कर सकता है जबकि अर्ध-लघुगणकीय चार्ट अधिक उपयुक्त होने है, इसके विपरीत गलती मुश्किल से ही की जाती है। प्रत्येक प्रकार के चार्ट से एक उपयोगी किन्तु बिल्कुल भिन्न प्रयोजन सिद्ध होता है। अंकगणितीय चार्ट उस समय प्रयोग मे लाना चाहिए जब निरपेक्ष तुलनाएँ वाछनीय हो (चार्ट 5 10 तथा 5 13 अनुपातो की निरपेक्ष तुलनाएँ हैं), अर्ध-लघुगणकीय चार्ट उस समय प्रयोग मे लाना चाहिए जब सापेक्ष तुलनाएँ करनी हो।

लघुगणकीय पैमानो का निर्माण

एक लघुगणकीय चक्र दस गुना वृद्धि को स्थान दे देगा, दो चक्र सौ गुना वृद्धि का प्रबन्ध कर देते है। इस अध्याय में समाविष्ट विभिन्न चार्टों की ओर निर्देश से पता चलेगा कि किसी ऊर्ध्वाधर लघुगणकीय पैमाने का विस्तार (चार्ट 5 7 म दिखाए पैमानो को छोडकर) दो चक्रो से अधिक नही होता। द्वि-चक्र अर्ध-लघुगणकीय कागज उन अधिकतर श्रेणियो के लिए पर्याप्त होगा जिनका चार्ट निर्माता से वास्ता पडने की सभावना है, उसे तीन चक्रो से अधिक वाले कागज की विरले ही आवश्यकता होगी क्योकि इसमे हजार गुना वृद्धि आ जाती है। उन स्थितियो मे भी जहाँ बहुत छोटे परिमाण की श्रेणी की बहुत बडे परिमाण की श्रेणी से तुलना करना आवश्यक है, कई एक चक्रो की आवश्यकता नही होती, क्योकि तुलना के लिए दो वक्रो को साथ लाने के लिए दो ऊर्ध्वाधर पैमानो का प्रयोग वाछनीय है, जैसा कि चार्ट 5 9 मे है। अनेक प्रकार के लाइन लगे अर्ध-लघुगणकीय कागज विभिन्न स्रोतो से प्राप्त है। तो भी यदि केवल द्विचक्र कागज ही प्राप्त हो और अधिक चक्रो वाले कागज की आवश्यकता हो तो केवल मात्र द्वि-चक्र कागज के तख्ते से नीचे का किनारा काटना और इसे अन्य तख्ते के ऊपर चिपकाना आवश्यक है।

कभी-कभी एक या द्वि-चक्र कागज का प्रयोग वाछनीय हो सकता है, परन्तु जो तुरन्त प्राप्त है उनसे बडे या छोटे आकार के चक्र के साथ। अर्ध-लघुगणकीय कागज को एक साधारण तख्ते का प्रयोग करके और इसकी चोटी पर सादे कागज का एक तख्ता तिरछा रख कर लघुगणकीय पैमाने का प्रसार किया जा सकता है। लघुगणकीय पैमाने को एक सादे कागज के टुकडे पर अर्ध-लघुगणकीय कागज के एक तख्ते को तिरछा रखकर और क्षैतिज रेखाएं लगाकर सिकाडा जा सकता है। हाँ, इस प्रकार से किसी भी सख्या मे चक्र निकाले जा सकते है। पैमाने के प्रसार, पैमाने के सकोच और पैमाने के परिवर्तन की विधियो के उदाहरणो के लिए मूल अंग्रेजी पुस्तक के द्वितीय सस्करण मे पृष्ठ 114–115 देखिए।

ऐसी अवस्था मे जब कोई उपयोगी लघुगणकीय कागज और किसी प्रकार के लघुगणकीय पैमाने प्राप्त न हों, किसी भी वाँछित आकार का लघुगणकीय पैमाना

---

5 जनसख्या का पूर्वानुमान करने मे आने वाली समस्याओ का विवरण सयुक्त राज्य व्यापार विभाग द्वारा परिचालित वान ब्योरेन स्टेनबरी द्वारा लिखित 'वेंटर पापूलेशन फोरकास्टिंग फार एरियाज एन्ड कम्युनिटीज" म दिया गया है।

लघुगणको की सारणी के निर्देश से बनाना सभव है। पैमाने के मूल्यो के बीच उनके लघुगणकों के बीच के अन्तरो के अनुपात मे अन्तर छोडकर किसी भी सुविधाजनक इकाई के रूप मे पैमाने का निर्माण किया जा सकता है। नीचे दिखाए गए अको से यह दिखाई पड़ता है कि 1 से 2 तक दूरी 0 301030 इकाइयाँ होगी, 2 से 3 तक दूरी 0 176091 इकाइयाँ होगी, इत्यादि। बीच के मूल्यो का इसी प्रकार स्थानाकन किया है।

पैमाने का मूल्य	लघुगणक	अन्तर
1	0	
2	0 301030	0 301030
3	0 477121	0 176091
4	0 602060	0 124939
5	0 698970	0 096910
6	0 778151	0 079181
7	0 845098	0 066947
8	0 903090	0 057992
9	0 954243	0 051153
10	1 000000	0 045757
20	1 301030	0 301030
30	1 477121	0 176091
40	1 602060	0 124939
50	1 698970	0 096910
60	1 778151	0 079181
70	1 845098	0 066947
80	1 903090	0 057992
90	1 954243	0 051153
100	2 000000	0 045757

लघुगणकीय पैमानो की उपयोगिता इस अध्याय मे दिखाए गए प्रयोगा तक सीमित नही है। अध्याय 23 मे हम एक क्षैतिक लघुगणकीय पैमाने और एक अकगणितीय ऊर्ध्वाधर पैमाने का प्रयोग करेंगे। अध्याय 20 मे हम दोनो क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अक्षो पर लघुगणकीय पैमानों का प्रयोग करेंगे।

6

लेखाचित्री निरूपण III : चार्टों के अन्य प्रकार

साख्यिकीय सूचना प्रस्तुत करने के लिए वक्रो के अतिरिक्त कई अन्य लेखाचित्रीय विधियाँ उपलब्ध हैं। इस अध्याय मे हम दड चार्टों, वृत्तारेखो, चित्रलेखो तथा साख्यिकीय नक्शो की ओर सक्षिप्त ध्यान देगे।

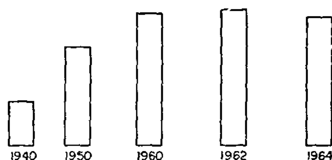
तुलना के आधार

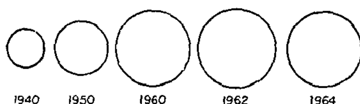
चार्ट 6.1 मे दिखाया गया है कि इन तीन प्रकार के चित्रो के द्वारा खेतो पर ट्रैक्टरो की सख्या की किस प्रकार तुलना की जा सकती है (A), दड चार्ट, जिसमे एक-विम तुलनाएँ आती है, (B) *तथा* (C), *वृत्त तथा वर्ग, जिनमे द्वि-विम तुलनाएँ आती है, तथा* (D) त्रि-विम तुलना, जिसका विभिन्न आकारो के ट्रैक्टरों से प्रतिनिधित्व होता है। चार्टों के पाठको पर दिखाए गए परिमाणो का सबसे अधिक ठीक प्रभाव उस समय पडता है जब आँकडो का दड चार्टों के द्वारा प्रतिनिधित्व होता है और सबसे कम ठीक प्रभाव उस समय जब आँकडो का प्रतिनिधित्व आयतन आरेखो द्वारा होता है। क्षेत्र आरेखो का निर्णय आयतन आरेखो की अपेक्षा अधिक सही होता है, परन्तु दड चार्टों की अपेक्षा कम सही।[1] *यह भी स्मरण* रखना चाहिए कि छपे हुए पृष्ठ पर *दिखाए आयतन आरेखों से पाठक के* लिए यह आवश्यक हो जाता है कि अपनी तुलना करने से पूर्व वह तृतीय विमीय प्रत्यक्षीकरण करे। वर्गों, वृत्तो, या विभिन्न आकार के चित्रो का प्रयोग करने वाले चार्टों की एक अन्य हानि यह है कि पाठक इस बारे म अनिश्चित हो सकता है कि ऊँचाइयो, क्षेत्रो, अथवा आयतनो की तुलना की जाए। किसी भी स्थिति मे जिस आधार पर चित्र खीचा गया या उसका सकेत देना चाहिए। *यदि यह तर्क प्रस्तुत किया जाए कि ट्रैक्टर जैसे पदार्थों के आकार की तुलना का ठीक आधार विभिन्न ट्रैक्टरो का आभासी भार है, और यदि चार्ट निर्माता ने* ट्रैक्टरो को इस प्रकार बनाया है ताकि विभिन्न वर्षो मे ट्रैक्टरो की सख्या ट्रैक्टरो की ऊँचाई या लम्बाई से दिखाई गई है, जैसा कि कभी-कभी किया जाता है, तब वह पाठक जो आभासी भार (आवश्यक तौर पर आयतन) के आधार पर आकारो का निर्णय करता है, विभिन्न वर्षों मे ट्रैक्टरो की सख्या मे परिवर्तन का बढा-चढा प्रभाव ग्रहण करेगा।

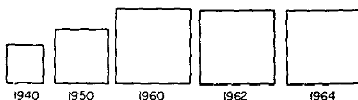
समाचार-पत्रो और पत्रिकाओ मे प्राय *आयतन तुलनाओ वाले चार्ट आते हैं।* इस अध्याय मे आगे हम यह देखेगे कि *चित्रलेखो की सहायता से चित्रो का ध्यानाकर्षक मूल्य*

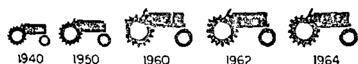
---

1. देखिए, "ग्राफिक कम्पैरिसन्ज बाई बार्स, स्क्वेयर्ज, सर्कल्ज, एन्ड क्यूब्ज", द्वारा फ्रेडरिक ई० क्रॉक्सटन तथा हेरोल्ड स्टीन, *जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन*, मार्च 1932, पृष्ठ 54—60।







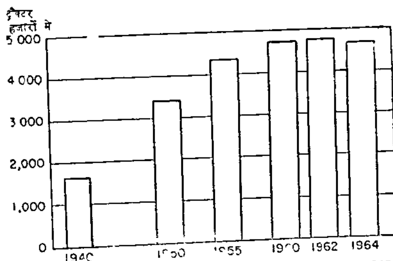


चार्ट 6 1 सयुक्त राज्य मे 1940, 1950 1960, 1962, तथा 1964 मे खेतो पर ट्रैक्टरो की सख्या । आंकडो का प्रतिनिधित्व (A) दडो, (B) वृत्तों, (C) वर्गो, तथा (D) ट्रैक्टरो के चित्रो द्वारा किया गया है। भाग A मे रेखीय तुलनाएं आती हैं, भाग B और C मे क्षत्रा की तुलनाओं की आवश्यकता है भाग D मे आयतनो की तुलनाएं आवश्यक हैं। आंकड एग्रीकल्चरल स्टैटिस्टिक्स, *1962*, पृष्ठ 520, *1963*, पृष्ठ 442, *1964* पृष्ठ 440 से लिए गए। 1964 के आंकडे प्रारम्भिक हैं।

प्राप्त करना तथा साथ ही, जितने दड चार्टों से प्राप्त किए जा सकते है, उतने सही प्रत्यक्ष प्रभाव प्राप्त करना कैसे सभव है ।

दंड चार्ट

चार्ट 6.1 के भाग A मे दिखाया गया दड चार्ट किसी पैमाने का प्रयोग न करने वाला एक सरल प्रकार है । चार्ट 6 2 मे वही आँकडे एक ऐसे दड चार्ट की सहायता से दिखाए गए हैं जिसका एक पैमाना है और जो इस तथ्य की ओर ध्यान आकर्षित करने के लिए कि कालावधियाँ बदलती हैं, दडो के बीच के स्थान मे भी परिवर्तन लाता है । जब



चार्ट 6 2 सयुक्त राज्य मे 1940, 1950, 1955, 1960, 1962, तथा 1964 मे खेतो पर ट्रैक्टरो की सख्या । चार्ट 6 1 के नीचे दिए स्रोतों से लिए आकडे ।

चार्ट से केवल बहुत सामान्य प्रभाव डालने की अपेक्षा होती है तो पैमाने के प्रयोग के बिना ही साधारण दड चार्ट बनाए जा सकते हैं, जैसा कि चार्ट 6 1 के भाग A मे है । परन्तु जब विभिन्न पैमाने प्रयोग करने वाले दो (या अधिक) दड चार्ट सन्निधि मे है और उनकी एक दूसरे से तुलना की जा सकती है तब पैमाने दिखाने चाहिएँ । एक अन्य सावधानी पैमाने पर शून्य की उपस्थिति से सबधित है, चार्ट 6 3 में जिसमे शून्य नही है यह दिखाया गया है कि इस प्रकार के चार्ट मे शून्य का लोप ठीक उतना ही भ्रामक है जितना कि अकगणितीय वक्रो के मामले मे । परन्तु चार्ट 6 4, भ्रामक छाप छोडे बिना, स्थान की बचत का एक अच्छा उदाहरण है । यह पैमाने के विच्छेद द्वारा सम्पन्न किया जाता है ।

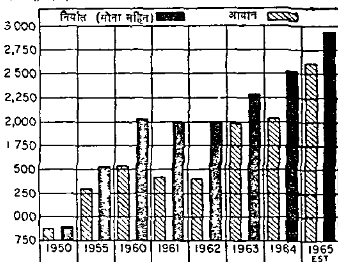
पहले के सभी दड चार्टो मे तैथिक आँकडे दिखाए गए थे और प्रथागत विधि का अनुकरण करके दडो की ऊर्ध्वाधर रूप से व्यवस्था की गई थी । सख्यात्मक दृष्टि से वर्गीकृत आँकडो के लिए ऊर्ध्वाधर दडो का भी प्रयोग करना चाहिए, उदाहरणार्थ, सयुक्त राज्य मे वय दलो की दृष्टि से या पढाई के वर्षों के अनुसार वर्गीकृत व्यक्तियो की सख्या के आँकडे । दूसरी ओर, गुणात्मक या भौगोलिक दृष्टि से वर्गीकृत आँकडो की तुलनाएँ करते समय, प्राय क्षैतिज दडो का प्रयोग किया जाता है । चार्ट 6 5 मे 1964 मे सयुक्त राज्य में चुने हुए नए निर्माण कार्य के मूल्यो की ऐसी तुलना दिखाई गई है ।

दड चार्टों के निर्माण म किसी निश्चित नियम का पालन नही करना होता। फिर भी कुछ विचार सहायक हैं।

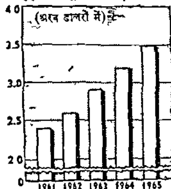
(1) अलग-अलग दड न तो बहुत अधिक छोटे और चौडे और न बहुत लम्बे और तग होने चाहिएँ।

(2) दडो को ऐसे स्थानो से अलग करना चाहिए जो एक दड की चौडाई के लगभग $\frac{1}{2}$ से कम अथवा एक दड की लगभग चौडाई से अधिक न हो।

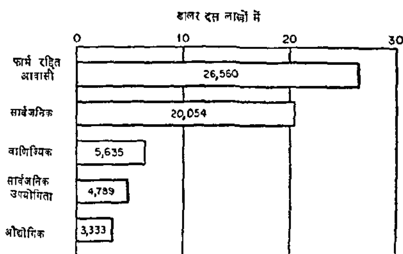
(3) पैमाना प्राय उपयोगी होता है। यह चार्ट के दड से (या बाईं ओर के दड से, यदि दड ऊर्ध्वाधर हैं) एक दड की चौडाई का लगभग $\frac{1}{4}$ होना चाहिए।



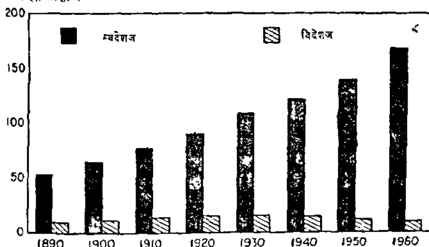
चार्ट 6 3 ऊर्ध्वाधर पैमाने पर शून्य के बिना एक दड चार्ट। आँकडो से 1950 से 1965 तक एक अफ्रीकी राष्ट्र के निर्यात (सोना मिला कर) तथा आयात दिखाए गए हैं। 1966 मे उस राष्ट्र के वाणिज्य दूतावास द्वारा दिए गए विज्ञापन से लिया गया चार्ट।



चार्ट 6 4 1951 से 1965 तक केन्द्रीय अमरीकन सामान्य मन्डी में कुल राष्ट्रीय उत्पाद। चार्ट अन्तर्राष्ट्रीय मुद्रा कोष तथा प्रथम राष्ट्रीय सिटी बैंक से लिया गया। पैमाने के विच्छेद से भ्रामक प्रभाव नही पडते।

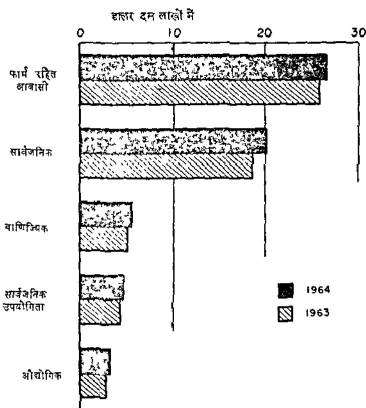


चार्ट 6 5 1964 मे सयुक्त राज्य मे चुने हुए नए निर्माण कार्य का मूल्य। आंकडे *फेडरल रिजर्व बुलेटिन*, अप्रैल 1965, पृष्ठ 597 से।



चार्ट 6 6 1890 से 1960 तक सयुक्त राज्य की स्वदेशज तथा विदेशज जनसख्या। इस प्रकार के चार्ट मे दोनो श्रेणियो की सापेक्ष वृद्धि स्पष्ट नहीं है। परन्तु अर्ध लघुगणकीय चार्ट के द्वारा दिखाई जा सकती है जैसा कि पूर्वगामी अध्याय मे वर्णित है। लघुगणकीय पैमाने पर शून्य के अभाव के कारण, दडो व स्थान पर वक्रो का प्रयोग किया जाएगा। आंकडे *स्टैटिस्टकल एब्स्ट्रेक्ट ग्राफ दि यूनाइटिड स्टेट्स, 1952*, पृष्ठ 31, 1965, पृष्ठ 25 तथा *यू० एस० सेन्सस ऑफ पापूलेशन 1950*, खड II, भाग 1, अध्याय B, पृष्ठ 1—87, तथा खड IV, भाग 3, अध्याय B, पृष्ठ 3 B—82 से।

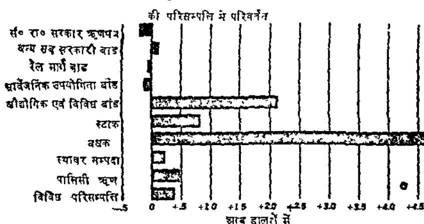
(4) चार्ट पढ़ने में निर्देशक रेखाएँ सहायक होती है। कभी-कभी चार्ट घिरा रहता है और निर्देशक रेखाओं का समस्त चार्ट में मे विस्तार होता है, जैसा कि चार्ट 6.5 मे है, कभी-कभी चार्ट घिरा नही रहता और निर्देशक रेखाएँ कटी होती हैं, जैसा कि चार्ट 6 7 में है।



चार्ट 6 7 1963 और 1964 मे सयुक्त राज्य मे चुने हुए नए निर्माण कार्य का मूल्य। *आकड़े चार्ट 6 5 के नीचे दिए गए स्रोत से।*

एक काल-श्रेणी को ग्राफ के द्वारा दिखाते समय हम या तो दंड चार्ट या वक्र का प्रयोग कर सकते है। वक्र से उस सामान्य परिवर्तन का अध्ययन सरल हो जाता है जो कि एक श्रेणी में आया है, जब कि दड चार्ट से विशिष्ट वर्षों की तुलनाएँ अधिक शीघ्र करने के योग्य हो जाते है। यदि श्रेणी मे बहुत से वर्षों का समावेश है तो दड चार्ट का प्रयोग करना, जिसका निर्माण परिश्रम मागता है, प्राय वाछनीय नही है। यदि केवल कुछेक वर्ष दिखाए जाने हो, जैसा कि चार्ट 6 2 मे है, तो इसके लिए दड चार्ट अधिक अच्छा है।

कभी-कभी हम आँकड़ो के दो समुच्चयो की कई वर्षों को अवधि के दौरान तुलना करना चाहते हैं। यह दो इकाई दड चार्ट के द्वारा किया जा सकता है, जैसा कि चार्ट 6 6 मे दिखाया गया है। इसी प्रकार हम दो वर्षों के लिए कई श्रेणियो की तुलना करने की इच्छा कर सकते है, इस प्रकार की तुलना चार्ट 6 7 मे दिखाई गई है।



चार्ट 6.8 द्वि दिशा दंड चार्टों का एक उदाहरण। लाइफ इन्शोरेन्स फैक्ट बुक, 1965, पृष्ठ 69 से।

एक द्वि-दिशा दंड चार्ट का प्रयोग, जैसा कि चार्ट 6.8 में है, वृद्धि और कमियों को दिखाने के लिए किया जा सकता है। इस प्रकार का चार्ट और भी अधिक प्रभावपूर्ण होता है यदि वृद्धि काले रंग में और कमियाँ लाल रंग में दिखाई जा सकें। कई वर्षों के लिए आंकड़ों की श्रेणी में वृद्धि और कमियों को क्षैतिज शून्य रेखा के ऊपर और नीचे ऊर्ध्वाधर दंडों के द्वारा दिखाया जा सकता है।

चित्रलेख

चार्ट 6.1 के भाग D में कुछ वर्षों के लिए खेतों पर ट्रैक्टरों की संख्या का प्रतिनिधित्व विभिन्न आकार के ट्रैक्टरों के चित्रों के द्वारा किया गया था। यद्यपि इस प्रकार का चार्ट पाठक के सामने संतोषजनक तुलना प्रस्तुत नहीं करता किन्तु उसका ध्यान अवश्य आकर्षित करता है। सब एक ही आकार के कई छोटे चित्रों का प्रयोग करके और उनकी इस प्रकार व्यवस्था करके कि एक दंड चार्ट बन जाए, चित्रीय प्रभाव बनाए रखा जा सकता है और एक संतोषजनक तुलना प्राप्त हो सकती है। इस प्रकार का ग्राफ चित्रलेख कहलाता है। चार्ट 6.9 में इस विधि के द्वारा खेतों पर ट्रैक्टरों की तुलना दिखाई गई है। जब कि चित्र आवश्यक तौर पर एक दंड चार्ट है, यह अधिक आकर्षक है और इसलिए पाठक द्वारा इसके परीक्षण की अधिक संभावना है। किसी पैमाने का प्रयोग नहीं किया गया परन्तु क्योंकि चित्र सभी एक आकार के हैं और क्योंकि प्रत्येक दस लाख ट्रैक्टरों का प्रतिनिधित्व करता है, इसलिए यदि वांछनीय हो तो चार्ट से सन्निकट संख्यात्मक मूल्य प्राप्त किए जा सकते हैं। यद्यपि काल-श्रेणी का दंड चार्ट प्रायः ऊर्ध्वाधर दंडों का प्रयोग करता है (तो भी) आप यह देखेंगे कि चार्ट 6.9 के रूप में प्रदर्शित चित्रलेख में क्षैतिज दंड हैं। चित्रलेख को प्रायः इस प्रकार से व्यवस्था की जाती है क्योंकि यह अधिक उचित लगता है कि ट्रैक्टरों को, लोगों को, घरों को (या जो कुछ भी चित्रित किया जा रहा है) एक दूसरे के ऊपर रखने की अपेक्षा साथ-साथ खड़ा किया जाए।

112

1940

1950

1960

1962

1964

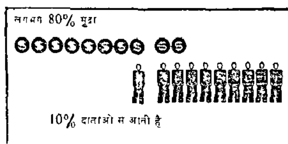
प्रत्येक प्रतीक 10,00,000 ट्रैक्टर प्रदर्शित करता है

चार्ट 6 9 संयुक्त राज्य मे 1940, 1950, 1960, 1962 तथा 1964 मे खेतों पर ट्रैक्टरों की सख्या। आंकडे चार्ट 6 1 के नीचे दिए स्रोतो से।

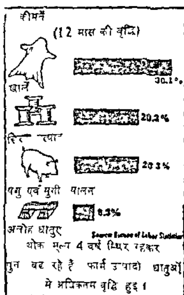
चित्रलेख का एक अन्य उदाहरण, चार्ट 6 10, यह दिखाने का एक रुचिकर तरीका है कि निधि के लिए अभियान अपेक्षाकृत कुछ उपहारों पर निर्भर करते है। चार्ट 6 11 चित्रलेखीय विचार के कुछ थोडे से भिन्न प्रयोग का प्रतिनिधित्व करता है। यहाँ चित्र तथा दड मात्रात्मक आंकडो को दिखाने वाले दडो के साथ साथ दिखाए गए है। यह स्पष्ट होना चाहिए कि चित्रलेख बनाते समय चित्र इस प्रकार चुना जाता है कि वह दिखाए जाने वाले आंकडो के स्वरूप का सुझाव दे। चित्रीय विधियो के प्रयोग के लिए कुछ आधारभूत नियम चार्ट 6.12 मे दिखाए गए है।

घटक-भाग चार्ट

योग के भाग, चार्ट 6 13 के समान दड के द्वारा या चार्ट 6.14 की तरह वृत्तारेख से दिखाए जा सकते हैं। दड चार्ट मे दड के भागो की लम्बाइयो की एक-विम तुलना आती है, जहाँ कि वृत्तारेख मे वृत्ताकार खडो की द्वि-विम तुलना अथवा वृत्ताकार भागों की चापों की एक विम-तुलना, अथवा केन्द्रीय कोणों की तुलना आती है। चाहे दड चार्ट पर आधारित



चार्ट 6.10 होबार्ट तथा विलियम स्मिथ कालेज द्वारा प्रयुक्त एक चित्र-लेख। लैंट अस लुक ऐट होबार्ट एन्ड विलियम स्मिथ, पृष्ठ 14 से। मूल दो रगों मे था।



चार्ट 6 11 चित्र तथा दंड। संयुक्त राज्य ब्यूरो आफ लेबर स्टैटिस्टिक्स से। ध्यान दीजिए कि क्षैतिज पैमाना छोड़ दिया गया है।

प्रतीक स्वयं स्पष्ट होने चाहिए





संख्या में परिवर्तन अधिक या कम प्रतीकों द्वारा दिखाए जाते हैं

प्रत्येक जलयान 50 लाख टन का

बड़े या छोटे प्रतीकों द्वारा नहीं



चार्ट समय चित्र दिखाते हैं

सूक्ष्म ब्योरा नहीं

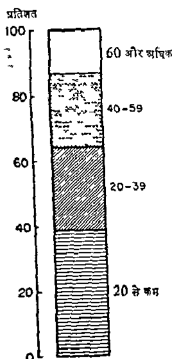
चित्रलेखों से तुलनाएं होती हैं

अपार विवरण नहीं

1910

चार्ट 6 12 मॉडले तथा लोवनस्टीन द्वारा सुझाए गए चित्रलेखों को खींचने के लिए आधारभूत नियम। रुडोल्फ माडले तथा डायनो लावनस्टीन के पिक्टोग्राफ्स एन्ड ग्राफ्स, हार्पर एन्ड रो, न्यूयार्क, 1952 पृष्ठ 25 तथा 26 से।

हो या वृत्तारेख पर, निर्णय की शुद्धता लगभग एकसमान होती है, अपवाद यह है कि वृत्तारेख द्वारा चित्रित किए जाने पर तो 25 प्रतिशत (90 दर्जे के कोण से प्रदर्शित) तथा 50 प्रतिशत (व्यास द्वारा प्रदर्शित) खंड अधिक ठीक ठीक मापे जाते हैं। वृत्तारेख का चित्रीय मूल्य सम्भवत दंड चार्ट के चित्रीय मूल्य से अधिक होता है और जब वृत्तारेख रजत डालर सुझाने के लिए निर्मित किया जाता है तब यह बढ जाता है। चार्ट 6 15 में इस प्रकार का एक प्रयोग दिखाया गया है। अकेला घटक भाग दंड कभी-कभी पैमाने के बिना खीचा जाता है और कभी-कभी क्षैतिज होता है। क्षैतिज दंड पर या वृत्तारेख पर ऊर्ध्वाधर दंड का एक लाभ यह है कि ऊर्ध्वाधर दंड के खडों पर लेबल लगाना अधिक सरल है।



चार्ट 6 13 1960 में प्रत्येक विशिष्ट वय समूह में सयुक्त राज्य की जनसख्या का अनुपात। आकड़े सयुक्त राज्य जनगणना ब्यूरो यू०एस० सेन्सस आफ पापूलेशन, *1960*, खड I, *कैरैक्टिरिस्टिक्स आफ दि पापूलेशन*, भाग I, *यूनाइटिड स्टेटस समरी*, पृष्ठ 1—199 से।

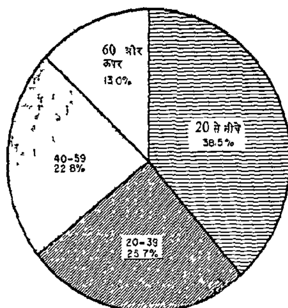
ग्राफ कागज के कई विक्रेता ऐसे कागज के ऐसे ताव देते हैं जिन पर 0 से 100 तक अशांकित परिधि वाले वृत्त दिखाए होते हैं इस प्रकार व्यक्ति वृत्तारेख तुरन्त खीचने के योग्य हो जाता है। *यदि ऐसे ताव प्राप्य नही हैं या यदि विभिन्न आकारो के वृत्त वांछित हैं तो वृत्तारेख परकार तथा प्रोटैक्टर के प्रयोग से बनाए जा सकते हैं। क्योकि रूढ़ प्रोट्रैक्टर वृत्त को 360 भागो या अशो मे विभक्त करता है,* अत दिखाई जाने वाली प्रतिशतताओ को 3 6 से गुणा करना चाहिए। वृत्त को 100 भागो में बाँटने के लिए अशशोधित प्रोट्रैक्टर[3] के प्रयोग से वृत्त को प्रतिशतताओ म बाँटना सरल हो जाता है, जैसाकि चार्ट 6 16 मे दिखाया गया है। इस प्रकार का पैमाना उत्कीर्ण किया जा सकता है, अथवा सामान्य प्रोट्रैक्टर के दूसरी ओर अकित किया जा सकता है।

चार्ट 6 17 मे यह दिखाया गया है कि घटक भागो के कई समुच्चयो की तुलना करने के लिए दंड चार्ट कैसे प्रयुक्त किए जा सकते है। यह स्पष्ट प्रतीत होता है कि वर्षों के बीच मे तुलनाएँ दंडों से वृत्तों की अपेक्षा अधिक सरलता से की जाती हैं। एक भाग से दूसरे भाग मे पहुँचने वाली निर्देशक रेखाएँ दंड चार्ट से तुलनाएँ करने मे सहायता करती हैं जब रेखाएँ समान्तर है तो कोई परिवर्तन नही हुआ है, जब वे अपसरित होती हैं, तो वृद्धि हुई है, जब वे अभिसरित होती है तो कमी हुई है।

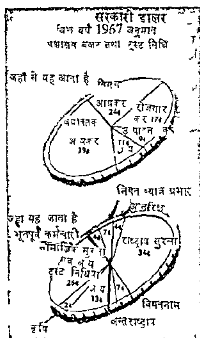
---

2 फ्रैड्रिक इ० क्रावसटन तथा राय इ० स्ट्राइकर के लेख बार चार्ट्स वर्सिस सकल डायग्रैम," *जर्नल आफ दि अमेरिकन स्टेटिस्टिकल एसोसिएशन*, दिसम्बर 1927 पृष्ठ 473—482 मे देखिए।

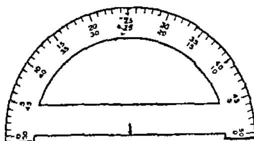
3 जर्नल आफ दि अमेरिकन स्टेटिस्टिकल एसोसिएशन, मार्च 1922, पृष्ठ 108—109 मे फ्रैड्रिक इ० क्रावसटन द्वारा लिखित ए पर्सेटेज प्रोट्रैक्टर' लेख देखिए।



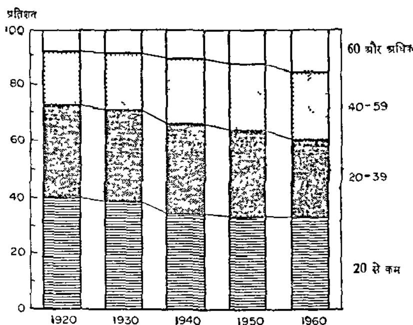
चार्ट 6.14 1960 में प्रत्येक विशिष्ट वय समूह में संयुक्त राज्य की जनसंख्या का अनुपात। आंकडे चार्ट 6.13 के नीचे दिए स्रोतों से।



चार्ट 6.15 वित्त वर्ष 1967 के लिए राष्ट्रपति के बजट संदेश के संबंध में प्रयुक्त वृत्तारेख।



चार्ट 6 16 प्रतिशतता प्रोट्रैक्टर

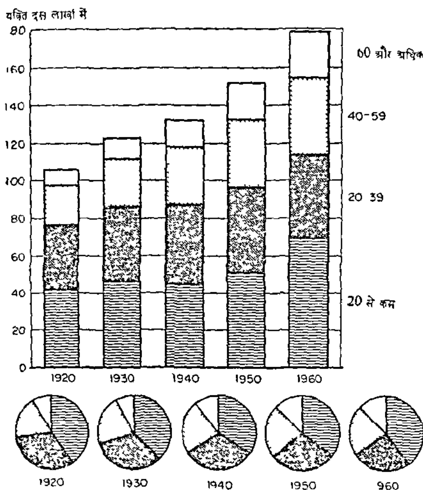




चार्ट 6 17. 1920 से 1960 तक प्रत्येक निर्दिष्ट वय समूह मे संयुक्त राज्य की जनसख्या का अनुपात। आंकड़े चार्ट 4 19 के नीचे दिए गए स्रोत से।

चार्ट 6 17 मे घटक भागो की तुलना सापेक्ष आधार पर है, जनसख्या मे प्रत्येक वय समूह का अनुपात दिखाया गया है। जब हम यह सकेत करते है कि प्रत्येक वय समूह मे से कितनो की गणना की गई थी तो हमारे पास ऐसे आरेख आते है जैसे कि चार्ट 6 18 मे दिखाए गए हैं। दड और वृत्त आकार मे भिन्न हैं क्योंकि कुल जनसख्या बढ चुकी है। इस उदाहरण मे दड चार्ट स्पष्ट ही वृत्तारेख से बढिया है। जब चार्ट 6 17 तथा 6 18 मे दिखाए गए के समान आंकडे कई वर्षो मे आते है तो प्रायः वक्रो का प्रयोग करना

अधिक अच्छा है, जैसाकि चार्ट 4 19 तथा 4 20 मे किया गया था। जब चार्ट 6 17 तथा 6 18 के दड चार्ट कालानुक्रमी आँकडे प्रस्तुत करते हैं, तो हम विभिन्न स्थानो या श्रेणियों के लिए घटक-भागो की तुलना भी कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, हम शहरी जनसख्या मे पुरुषो और स्त्रियो के अनुपातो की ग्रामीण जनसख्या मे पुरुषो और स्त्रियों के अनुपातो से तुलना कर सकते है। एक दड, पुरुषो और स्त्रियो के लिए उपविभाजित, शहरी जनसख्या का प्रतिनिधित्व करेगा, दूसरा दड, लिगो के लिए उसी प्रकार विभाजित, ग्रामीण जनसख्या का प्रतिनिधि होगा।

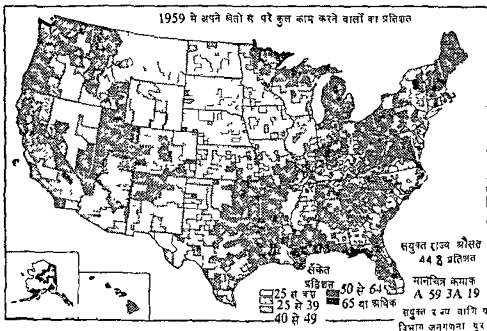


चार्ट 6 18 1920 से 1960 तक प्रत्येक निर्दिष्ट वय समूह मे सयुक्त राज्य की जनसख्या। आँकडे चार्ट 4 19 के नीचे दिए गए स्रोतो से लिए गए।

सांख्यिकीय मानचित्र

सांख्यिकीय मानचित्र लेखाचित्रीय विधियाँ है जो सख्यात्मक सूचना भौगोलिक आधार पर दिखाती हैं। हम तिरछी रेखाओ वाले या छायायुक्त मानचित्रो, बिन्दु मानचित्रो, तथा पिन मानचित्रो पर विचार करेंगे।

तिरछी रेखाओं वाले मानचित्र—तिरछी रेखाओं वाले या छायायुक्त मानचित्रों में विचाराधीन प्रत्येक भौगोलिक क्षेत्र के लिए अध्ययन की जा रही घटना के परिमाण को दिखाया जाता है। परिमाण में परिवर्तनों का लेखाचित्रों द्वारा तिरछी रेखाओं या छाया में उत्तरोत्तर अंतरों से प्रतिनिधित्व किया जाता है। चार्ट 6 19 में विभिन्न तिरछी रेखाएँ, 1959 में संयुक्त राज्य में अपने खेतों से परे काम करने वालों का अनुपात निर्देशन करती हैं। अपने खेतों से परे कुल काम करने वालों के अधिकतम अनुपातों वाले क्षेत्र गहरे काले रंग में दिखाए गए हैं। रंग उत्तरोत्तर अधिक हल्का होता जाता है ताकि सबसे हल्के अर्थात् बिना छाया के क्षेत्र में निम्नतम प्रतिशतता दिखाई गई है। इस प्रकार के मानचित्रों की प्रकृष्ट विशेषता यह है कि तिरछी रेखाओं या छाया में उत्तरोत्तर परिवर्तन माप जा रहे तत्व में वृद्धि (या कमी) का निर्देश करता है।



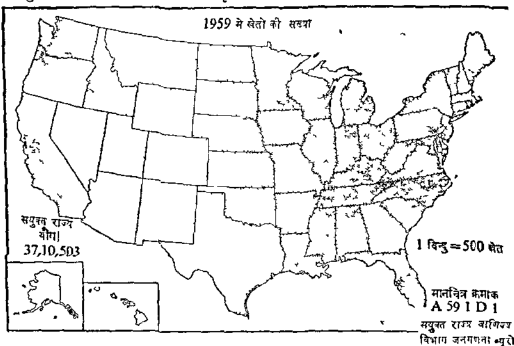
चार्ट 6 19 तिरछी रेखाओं वाला मानचित्र।

कभी कभी सांख्यिकीय मानचित्र रंगों में बनाए जाते हैं। परन्तु विभिन्न रंगों का प्रयोग करके उत्तरोत्तर न्यूनाधिक छाया के सिद्धांत को संतोषजनक ढंग से विकसित नहीं किया जा सकता। हां, एक ही रंग की उत्तरोत्तर छायाएँ प्रयोग करना और इस प्रकार काला और सफेद प्रयोग करके किए जा सकने वाले से कभी कभी अधिक आकर्षक मानचित्र उत्पन्न करना संभव है।

बिन्दु मानचित्र—पूर्व के सांख्यिकीय मानचित्र में वे आँकड़े दिखाए गए हैं जो समस्त क्षेत्रों पर लागू होते थे—विशेषतया अपने खेतों से परे कुल काम करने वालों का प्रतिशत—और इसलिए तिरछी रेखाओं वाला या छायायुक्त मानचित्र समुचित था। जब घटनाओं का भौगोलिक बटन दिखाया जाता हो तो बिन्दु मानचित्र का प्रयोग करना चाहिए। चार्ट 6 20 में सरलतम बिन्दु मानचित्रों में से एक दिखाया गया है। प्रत्येक बिन्दु 500 खेतों का प्रतिनिधित्व करता है और काउंटी के विभिन्न भागों में केन्द्रीकरण

स्पष्ट तौर पर दिखाया गया है। बिन्दु मानचित्र मे एक बिन्दु द्वारा दिखाई गई इकाइयो की सख्या बडी हो सकती है, जैसा कि चार्ट 6 20 मे है, ताकि एक क्षेत्र म बिन्दुओ की सख्या गिनने के लिए पर्याप्त कम हो, या एक बिन्दु द्वारा दिखाई गई इकाइयो की सख्या छोटी हो सकती है ताकि अनेक बिन्दुओ से हल्की से काली छाया की प्रगाढता मे उत्तरोत्तर परिवर्तन का प्रभाव पडता हो। कौनसी प्रविधि का प्रयोग करना उचित है यह चार्ट के प्रयोजन पर निर्भर करता है।

चार्ट 6 21 मे एक अलग प्रकार का बिन्दु मानचित्र दिखाया गया है जिसमे अलग-अलग आकार के बिन्दुओ का प्रयोग है। यहाँ 1950 से 1960 के बीच राज्यो के अनुसार कुल जनसख्या मे परिवर्तन की मात्रा वृत्तो के क्षेत्रफल द्वारा इगित की गई है। जबकि

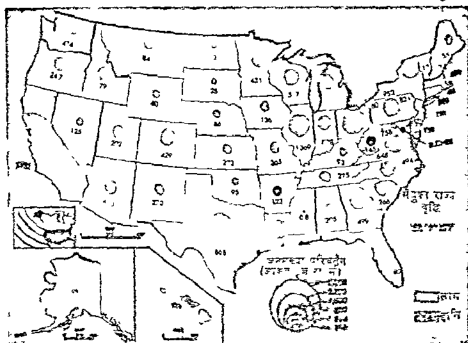


चार्ट 6 20 एक बिन्दु मानचित्र।

विभिन्न वृत्त राज्यो के भीतर विभिन्न परिवर्तनो की ओर सकेत करते हैं, वृत्तो से ठीक-ठीक तुलनाएँ करना आसान नही है। हम सीधे व्यासो की तुलना नही कर सकते। हमे स्मरण रखना आवश्यक है कि यदि एक वृत्त का व्यास दूसरे से दुगना है तो पहले वृत्त का क्षेत्रफल दूसरे से चार गुना है।

पिन मानचित्र—पिन मानचित्र विशेष तौर पर लचीले प्रकार के बिन्दु मानचित्र समझे जा सकते हैं। वे कार्क, गत्ता, भित्ति बोर्ड, नालीदार गत्ता, इत्यादि पीछे लगाकर जडे गए मानचित्र हैं जिन पर विभिन्न आकार, रग और स्वरूप के (प्राय) काँच के सिरो वाले पिनो के द्वारा सूचना लिखी जाती है। प्राप्य पिनो के सिर ऐसे होते हैं जो आकार मे लगभग $\frac{1}{16}$ इच व्यास से लगभग $\frac{3}{4}$ इच तक होते हैं। एक बडी सख्या मे रग तथा विभिन्न प्रकार के स्वरूप, जैसे गोल, वर्ग तथा त्रिकोण, शीर्षपिन प्राप्य हैं। जैसे तथ्य बदलते हैं वैसे ही पिन मानचित्रो को तुरन्त ही बदला जा सकता है। इस लचीलेपन और

बड़ी प्रकार के चिन्हों की प्राप्ति के कारण भौगोलिक आँकड़े प्रस्तुत करने की विधि के तौर पर पिन मानचित्र का बहुतायत से प्रयोग किया जाता है। कार्ड तथा सैकड़ों या हज़ारों पिनों पर आधारित एक या अधिक मानचित्रों वाली विस्तृत पिन मानचित्र योजना खर्चीली है परन्तु प्राय बहुत उपयोगी सिद्ध हो सकती है।



चार्ट 6.21 एक अन्य प्रकार का बिन्दु मानचित्र। गौर कीजिए कि परिवर्तन की मात्रा इंगित करने के लिए बिन्दु का आकार बदलता है। छायायुक्त बिन्दु वृद्धि का संकेत करते हैं, खाली बिन्दु कमी दिखाते हैं।

पिन मानचित्रों का प्राय मोटर-गाड़ी दुर्घटनाओं के स्थान और परिणाम दर्ज करने में प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार के एक या अधिक मानचित्रों का प्रयोग करके न केवल जिस आवृत्ति से विभिन्न स्थानों पर दुर्घटनाएँ होती हैं उसे जाँचना, बल्कि प्रत्येक दुर्घटना के स्वरूप को भी जाँचना (मोटरगाड़ी की पैदल व्यक्ति से टक्कर, मोटर गाड़ी की मोटरगाड़ी से टक्कर, मोटरगाड़ी की किसी स्थिर पदार्थ से टक्कर इत्यादि) तथा दुर्घटना का परिणाम (सम्पत्ति-हानि, सवारी का घायल होना, सवारी की मृत्यु, पैदल व्यक्ति का घायल होना, पैदल व्यक्ति की मृत्यु इत्यादि) जाँचना सम्भव है।

सांख्यिकीय मानचित्र की एक कठिनाई यह है कि विभिन्न क्षेत्रों का महत्त्व उनके क्षेत्रफल से नहीं आँका जाता है। उदाहरणार्थ, विभिन्न राज्यों में प्रति कुटुम्ब आय दिखाने वाला तिरछी रेखाओं वाला मानचित्र कुछ भ्रामक होगा क्योंकि छोटे क्षेत्रफल वाले कुछ राज्यों में बहुत बड़े क्षेत्रफल वाले अन्य राज्यों की अपेक्षा कहीं अधिक कुटुम्ब हैं। इस कठिनाई पर काबू पाने के लिए कभी-कभी प्रयुक्त एक रुचिकर विधि इस ढंग से मानचित्र खींचने की है कि प्रत्येक राज्य का क्षेत्रफल उस राज्य में कुटुम्बों की संख्या के अनुपात में हो।

7

दरें, अनुपात, तथा प्रतिशतताएँ

सांख्यिकीय सारणियों से संबंध रखने वाले अध्याय में यह संकेत किया गया था कि व्युत्पन्न अंक आँकड़ों के संक्षेपण और तुलना में सहायता करने के लिए उपयोगी हैं। उस अध्याय में दरों,[1] अनुपातों, प्रतिशतताओं, और औसतों का विशेष उल्लेख किया गया था। इस अध्याय में दरों, अनुपातों, और प्रतिशतताओं का विवेचन किया जाएगा। औसतों और संबंधित मापों का आगे के अध्यायों में परीक्षण किया जाएगा।

753 का 251 से अनुपात बताने के लिए हम 753 को 251 से भाग करते हैं, जिससे 3 आता है और हम कहते हैं कि *753 का 251 से वही संबंध है जो 3 का 1 से है, या अधिक संक्षेप में, 753 251 3 1*। *इस प्रकार हमने वह संबंध बताया है जो एक के अनुपात में उन दो संख्याओं में से पहली का दूसरी के साथ है*। यदि इससे हमारा प्रयोजन अधिक अच्छा सिद्ध होता तो हम यह संबंध किसी अन्य संख्या के अनुपात में बता सकते थे। उदाहरण के लिए हम दस का अनुपात प्रयोग कर सकते थे और कह सकते थे 753 . 251 . 30 0, हम सौ में अनुपात का प्रयोग कर सकते थे और लिख सकते थे 753 251 300 100। *यह अन्तिम अनुपात, प्रति सौ, प्राय प्रतिशतता कहलाता* है और हम देखते हैं कि 753 (प्रतिशत से) 251 का 300 प्रतिशत है। अत आप यह देखेंगे कि प्रतिशत का, जो इतनी बहुलता से प्रयोग किया जाता है, अधिक सामान्य प्रत्यय *अनुपातों के विशिष्ट मामले मात्र है। यदि प्रति सौ अनुपात के प्रयोग की बजाय हम प्रति हजार अनुपात के लिए अवसर आता है तो हम अपने अंकों की ओर "प्रति सहस्र" कह कर* संकेत कर सकते हैं।

तुलनाओं की गति बढ़ाने के लिए अनुपातों का परिकलन किया जाता है। न केवल बड़ी संख्याएँ कम हो जाती हैं, जैसा कि सारणी 3 2 में है, बल्कि मोटे आधार से 100 के (जो व्यक्ति के मन में रह सकता है) अंकों की श्रेणी की तुलना से बहुत लाभ होता है, बजाय इसके कि प्रत्येक अकेली समष्टि के अंक की समस्त संयुक्त राज्य के योग से तुलना करने की चेष्टा की जाए। सापेक्ष परिवर्तन का उस समय अधिक ठीक-ठीक प्रत्यक्षीकरण किया जा सकता है जब उसे प्रतिशतताओं में दिखाया जाए, जैसा कि सारणी 7 1 में है, या जब सारणी 7 2 में प्रयुक्त विधियों में से किसी एक से दिखाया जाए।

---

1 "दर" शब्द का कभी कभी एक भिन्न चर की एक इकाई के संबंध में विचार किए गए एक चर के परिमाण या मात्रा के अर्थ में प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार 20 मील प्रति घंटा एक रफ्तार की दर है। दो एक समान चरों में जो एक दूसरे के साथ संबंध होता है वह प्राय अनुपात कहलाता है। उदाहरणार्थ, *करंट अनुपात जो वर्तमान परिसम्पत्ति का वर्तमान देयता से अनुपात है, दो अंकों की तुलना करता है जो दोनों डालरों में हैं। सामान्य प्रयोग में दर और अनुपात का यह भेद सदा ध्यान में नहीं रखा जाता।*

सारणी 7 1

1963 और 1964 मे सयुक्त राज्य मे चुने हुए नए निर्माण काय का मूल्य (दस लाख डालरो मे)

निमाण का प्रकार	1963	1964	प्रतिशत वृद्धि
फाम से भिन्न आवासी	25 843	26 560	2 8
सावजनिक	18 679	20 054	7 4
वाणिज्यिक	5 200	5 635	8 4
सावजनिक उपयोगिता	4 494	4 789	6 6
औद्योगिक	2 962	3 333	12 5

आकडे फेडरल रिजव बुलटिन अप्रल 1965 पष्ठ 597 से।

सारणी 7 2

सयुक्त राज्य मे 1955 से 1964 तक ढली वस्तुओ के लिए इस्पात की सिल्लियो और इस्पात का उत्पादन

वष	उत्पादन (दस लाख छोटे टन)	1955 का प्रतिशत	1955 पर प्रतिशत कमी*	पूव वष का प्रतिशत	पूव वष पर प्रतिशत वृद्धि*
1955	117 0	100 0			
1956	115 2	98 5	− 1 5	98 5	− 1 5
1957	112 7	96 3	− 3 7	97 8	− 2 2
1958	85 3	72 9	−27 1	75 7	−24 3
1959	93 4	79 8	−20 2	109 5	9 5
1960	99 3	84 9	−15 1	106 3	6 3
1962	98 0	83 8	−16 2	98 7	1 3
1961	98 3	84 0	−16 0	100 3	0 3
1963	109 3	93 4	− 6 6	111 2	11 2
1964	126 9	108 5	+ 8 5	116 1	16 1

*धन का चिह्न वद्धि का द्योतक है।

आकडे स्टैटिस्टिकल एब्स्ट्रैक्ट आफ दि यूनाइटिड स्टेटस के विभिन्न अको तथा सव आफ करन्ट बिजनस फरवरी 1965 पष्ठ S 32 से।

परिकलन

जब एक या अनेक सख्याओ की एक अन्य सख्या से तुलना की जा रही हो तो वह अक जिससे तुलनाए की जा रही हो आधार कहलाता है। जिस अक की आधार से तुलना की जा रही हो उसे आधार से भाग करके अनुपात मालूम किया जाता है। तब वह अक

2 गणना मशीनो को चलाने के अनुदेश गणना मशीन कम्पनियो के विक्रय कार्यालयों से प्राप्त किए जा सकते हैं।

आधार के संबंध मे या उसकी शब्दावली मे व्यक्त किया जाता है और इसलिए सब प्रकार के अनुपात कभी-कभी सापेक्ष सख्याओं या सापेक्षों के तौर पर निर्देश किए जाते है।

जुलाई 1965 के अन्त मे न चुकाया गया कुल उपभोक्ता उधार 8,06,86,000 डालर था। जुलाई 1964 के अन्त मे यह 7,24,56,000 डालर था। न चुकाई गई जुलाई 1965 की रकम को जुलाई 1964 के रूप मे व्यक्त करने के लिए हम 8,06,86,000 डालर को 7,24,56,000 डालर से भाग करते हैं और 1 1135 प्राप्त करते हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि न चुकाया गया कुल उपभोक्ता उधार जुलाई 1965 मे जुलाई 1964 के मुकाबले 1,1135 गुना था। बहुत से उदाहरणो मे अनुपात अत्यन्त उपयोगी होते है जब उन्हे प्रतिशतताओ के तौर पर व्यक्त किया जाता है। जो 1.1135 को, जो 1 का अनुपात है, प्रति सौ के अनुपात मे बदलने के लिए दशमल व बिन्दु को दो स्थान दाई ओर खिसकाया जाता है। परिणाम-स्वरूप प्राप्त होने वाला अक 111 35 यह बताता है कि जुलाई 1965 मे न चुकाया गया कुल उपभोक्ता उधार जुलाई 1964 मे न चुकाई गई मात्रा का 111 35 प्रतिशत था।

यह ध्यान देना चाहिए कि हम अभी-अभी दिए प्रतिशत अक को दो तरीको से व्यक्त कर सकते है। यह कहने की बजाय कि जुलाई 1965 मे न चुकाया गया उपभोक्ता उधार जुलाई 1964 के न चुकाए उपभोक्ता उधार का 111 35 प्रतिशत था, हम कह सकते है कि जुलाई 1964 से यह 11 35 प्रतिशत *अधिक था*। प्रथम उदाहरण मे हमने दो वर्षों के अको की तुलना की, द्वितीय मे, हमने जो परिवर्तन आया[3] उसकी जुलाई 1964 के अक से तुलना की।

परिवर्तनशील आधार का प्रभाव

स्वाभाविक रूप से यदि हम जुलाई 1964 के कुल उपभोक्ता उधार अक की जुलाई 1965 के अक से तुलना करें तो एक भिन्न अक समुच्चय प्राप्त होगा। अब हम जुलाई 1965 को आधार के रूप मे प्रयोग कर रहे है और जुलाई 1964 के अक को जुलाई 1965 के अक से भाग किया गया है। इस क्रिया को सपन्न करने से पता लगता है कि जुलाई 1964 मे न चुकाया गया कुल उपभोक्ता उधार जुलाई 1965 के उधार का 89 79 प्रतिशत था, अथवा तब न चुकाया गया कुल उपभोक्ता उधार जुलाई 1965 से 10 21 प्रतिशत कम था। देखिए जब कि जुलाई 1964 के आधार पर जुलाई 1965 का अक जुलाई 1964 के अक से 11 35 प्रतिशत अधिक था, जुलाई 1965 को आधार मानकर जुलाई 1964 का अक जुलाई 1965 के अक से केवल 10 21 प्रतिशत कम था। हाँ, यह अन्तर इस तथ्य के कारण है कि पहल तुलना का आधार जुलाई 1964 के सबध मे था और बाद मे जुलाई 1965 के सबध मे। आधार को बदलने के कारण परिणामो मे इस अन्तर का एक अन्य प्रकार से उदाहरण दिया जा सकता है। यदि एक सख्या 100 प्रतिशत बढाई जाए तो मौलिक अक प्राप्त करने के लिए दूसरी सख्या को केवल 50 प्रतिशत घटाना आवश्यक है। इसके विपरीत, यदि कोई प्रदत्त सख्या 50 प्रतिशत घटाई जाए तो दी हुई सख्या के पुनरुत्पादन के लिए दूसरी सख्या को 100 प्रतिशत बढाया जाना चाहिए।

---

3 कल्पना कीजिए कि हम दो प्रतिशतताओ की तुलना कर रहे है जैसे 40 प्रतिशत तथा 90 प्रतिशत। हम निरपेक्ष शब्दो मे बोल सकते है और कह सकते है कि 90 प्रतिशत 40 प्रतिशत से 50 प्रतिशत अधिक है। हम सापेक्ष शब्दो म बोल सकते है और कह सकते है कि 90 प्रतिशत 40 प्रतिशत से 125 प्रतिशत अधिक है अथवा 90 प्रतिशत 40 प्रतिशत का 225 प्रतिशत है। प्रतिशतताओ की तुलना करते समय यह बिल्कुल स्पष्ट कर देना उचित है कि हम निरपेक्ष शब्दो मे बोल रहे है या सापेक्ष म।

आधार के इस परिवर्तन के प्रभाव को अनुभव न करने से अशुद्ध निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। एक फर्म ने अपने कर्मचारियो की मजदूरी 15 प्रतिशत घटा दी, बाद मे इसने घटी हुई मजदूरी 5 प्रतिशत बढा दी, तब इसने इन बढ हुए अको को 5 प्रतिशत बढा दिया, और अन्त मे इसने इन दूसरे अको का और 5 प्रतिशत बढा दिया। बाद म इसने घोषित किया कि तीन 5 प्रतिशत वृद्धियो से मजदूरी वही पहुँच गई जहा वह 15 प्रतिशत कमी करने स पूव थी। गणना से पता चलेगा कि नई मजदूरी, घटाने से पूव की मौलिक मजदूरी की वास्तव मे 98 4 प्रतिशत थी। यदि कम्पनी ने घटी हुई मजदूरी की एक बार ही 15 प्रतिशत वृद्धि की होती तो नई मजदूरी मौलिक मजदूरी की केवल 97 75 प्रतिशत हुई होती।

सारणी 7 3 मे वृद्धि की चुनी हुई प्रतिशतताओ के लिए वह प्रतिशत दिखाया गया है जिससे नई सख्या को मौलिक सख्या क पुनरुत्पादन के लिए अवश्य घटाना चाहिए। यह ध्यान मे रखना चाहिए कि प्रतिशत वृद्धि का अक अनिश्चित तौर पर बडा हो सकता है, तो भी 100 की प्रतिशत कमी के अक मे शू य तक गिरावट पता चलती है जबकि 100 स अधिक की प्रतिशत कमी मे एक ऋणात्मक मात्रा तक कमी सूचित होती है।

सारणी 7 3

प्रतिशतताओ की गणना मे सरकते आधार के प्रभाव के उदाहरण

दी हुई सख्या	प्रतिशत वृद्धि	नई सख्या	प्रतिशत जिससे दी गई सख्या प्राप्ति के लिए नई सख्या घटानी आवश्यक है
10	500 00	60 00	83 33
10	200 00	30 00	66 67
10	100 00	20 00	50 00
10	50 00	15 00	33 33
10	33 33	13 33	25 00
10	25 00	12 50	20 00
10	10 00	11 00	9 00
10	5 00	10 50	4 76
10	1 00	10 10	0 99

प्रतिशतताएँ अकित करना

प्राय प्रतिशतताएँ एक दशमलव स्थान तक अकित की जाती है। यदि प्रतिशतताएँ बडे अको पर आधारित हो और विशेषकर यदि योग का एक या एक से अधिक भाग बिल्कुल छोटा हो (सारणी 3 2 देखिए) तो एक मे अधिक दशमलव प्रयोग करना उचित हो सकता है। कभी-कभी केवल पूर्ण प्रतिशतताएँ ही दिखाई जाती है ताकि (परस्पर) सबध तुरन्त समझे जा सकें। परन्तु जब सापेक्ष परिवर्तन बहुत ही छोटे हो तो पूर्ण प्रतिशतताएँ पर्याप्त नही होगी।

यदि निरपेक्ष सख्याएँ छोटी है, विशेषकर यदि आधार 100 मे काफी कम है तो प्रतिशतताओ की गणना नही करनी चाहिए। छोटी निरपेक्ष सख्याओ पर आधारित

प्रतिशतताओं के प्रयोग से उत्पन्न होने वाली एक गभीर कठिनाई का पृष्ठ 136 पर विवरण दिया गया है।

जब प्रतिशतताओं को एक दशमलव के साथ अंकित किया जाता है तो उनका एक प्रतिशत के समीपतम दशम तक पूर्णांकन किया जाता है। निम्न उदाहरणों से प्रतिशतताओं का पूर्णांकन करने की विधि पता चलेगी (तथा अवशेष वाली अन्य गणनाओं[4] का पूर्णांकन करने की भी).

(1) 371 16 डालर — 679 28 = 0 5464, अथवा 54 64 प्रतिशत। दूसरा दशमलव 5 से कम है और इसलिए एक प्रतिशत के निकटतम दशम तक यह प्रतिशतता 54 6 है।

(2) 2,319 पाउड — 7,532 पाउड = 0 3079, अथवा 30 79 प्रतिशत। इस उदाहरण मे दूसरा दशमलव 5 से अधिक है, इसलिए प्रतिशतता 30 8 अंकित की जानी चाहिए।

(3) 2,80, 511 फुट — 1,1000,000 फुट = 0 025501 अथवा 2 5501 प्रतिशत। यहाँ द्वितीय दशमलव 5 है परन्तु चतुर्थ दशमलव स्थान पर अवशेष 1 आता है। एक प्रतिशत के निकटतम दशम तक अंकित करने से यह अंक 2 6 है।

(4) 1,341 बैरल — 6,000 बैरल = 0 2235 अथवा 22.35 प्रतिशत। यहाँ निकटतम दशम या तो 22 3 या 22 4 है। यह अधिक महत्त्व की बात नही है यदि कभी-कभी इस प्रकार के निष्कर्ष मे प्रथम दशमलव स्थान पर अंक मे वृद्धि कर दी जाए या द्वितीय दशमलव को छोड दिया जाए। तो भी, किसी सगत योजना का अनुसरण करना अधिक अच्छा है। विशेष तौर पर जब बहुत से परिकलन किए जा रहे हो। जो अन्त मे जोडे जाते हो तो एक ऐसा ढग अपनाना अच्छा है जिससे ठीक 5 के द्वितीय दशमलव वाले आधे मूल्यो को बढाया जाए और आधे मूल्यो को कम किया जाए। इस प्रथा से अशुद्धियो के सचय का परिहार होगा। सभवत अधिकतम सतोषजनक योजना यह है कि जब प्रथम दशमलव एक विषम सख्या हो तो प्रथम दशमलव को बढा दिया जाए (67.35, 67.4 बन जाता है) और जब प्रथम दशमलव एक सम सख्या हो तो द्वितीय दशमलव को छोड दिया जाए (67 65, 67.6 बन जाता है)।

कभी-कभी सब प्रतिशतताओ का एक दशमलव स्थान तक पूर्णांकन करने का परिणाम 99 9 या 100 1 के जोड म होता है और कभी-कभी 99 8 या 100 2 दिखाई देता है। कुछ साख्यिकीविद् प्रतिशतताओ मे से एक को इस प्रकार समायोजित करते है ताकि ठीक-ठीक जोड प्राप्त हो जाए, परन्तु यह अधिक अच्छा प्रतीत होता है कि प्रत्येक प्रतिशतता ठीक-ठीक पूर्णांकित रहे।

तुलनाओ के प्रकार

हम पहले ही एक उदाहरण देख चुके है जिसमे सारणी 3 2 मे, कुल के भागो की योग से तुलना की गई थी। यहाँ प्रत्येक मद को क्रमशः कुल द्वारा भाग करके प्रतिशतताएँ प्राप्त की गई थी। अधिक शीघ्रता से, हम योग का व्युत्क्रम ले सकते है और व्युत्क्रम को प्रत्येक सघटक अंक से गुणा कर सकते है। यह समय बचाने वाली विधि है जो विशेषतया परिकलन यत्र के अनुकूल बनाई गई है और जब कभी हम सख्याओ की श्रेणी को एक स्थिर सख्या से भाग कर रहे हो तब यह लागू होती है।

4. सख्याओ का पूर्णांकन करने के अधिक विस्तृत विवरण के लिए परिशिष्ट 'न' देखिए।

इस अध्याय मे आगे के पृष्ठों पर एक अक की दूसरे अक से तुलनाओं के विभिन्न उदाहरण दिए गए हैं। उदाहरणार्थ, लिंग अनुपातों के अनुच्छेद में यह टिप्पणी दी गई है कि पुरुषों के लिए प्रत्येक अक को स्त्रियों के लिए उचित अक से भाग किया गया है क्योंकि लिंग अनुपात प्रति सौ स्त्रियों के पीछे पुरुषों की सख्या बताता है।

सारणी 7.2 म कई विभिन्न तुलनाओं का सकेत है जो कालानुक्रमी दृष्टि से व्यवस्थित किए गए आँकडों के सम्बन्ध में की जा सकती हैं। स्तम्भ 3 मे, प्रत्येक वर्ष के लिए इस्पात सिल्लियों और ढलाई के लिए इस्पात के उत्पादन की 1955 के उत्पादन से तुलना की गई है, प्रत्यक अक को 1955 के अक से भाग दिया गया है। स्तम्भ 4 मे वह प्रतिशतता दिखाई गई है जिससे प्रत्येक वर्ष का उत्पादन 1955 के उत्पादन से अधिक या कम था। स्तम्भ 5 म प्रत्यक वर्ष के उत्पादन का पूर्व वर्ष के उत्पादन से सम्बन्ध है, प्रत्यक वर्ष के अक को पूर्व वर्ष के अक से भाग किया गया है। स्तम्भ 6 मे पूर्व वर्ष पर प्रत्येक वर्ष म प्रतिशत वृद्धि या कमी का सकेत है, पूर्व वर्ष की तुलना मे प्रत्येक वर्ष की सख्यात्मक वृद्धि (या कमी) को पूर्व वर्ष के उत्पादन से भाग किया गया है। स्तम्भ 3 और 4 म 1955 का निश्चित आधार लेकर तुलनाएँ की गई हैं। स्तम्भ 5 और 6 मे आधार लगातार सरकता रहा है और सदा पूर्व वर्ष रहा है।

प्रतिशतताओं का एक अन्य अनुप्रयोग सारणी 7.1 मे दिखाया गया है। यहाँ प्रत्येक वस्तु के लिए 1963 का अक आधार है। "प्रतिशत वृद्धि" शीर्षक वाले प्रतिशतता के स्तम्भ म 1963 से 1964 तक प्रत्येक प्रकार के नए निर्माण के मूल्य मे सापेक्ष वृद्धि या कमी का सकेत है।

कुछ बहुधा प्रयुक्त अनुपात

निम्न अनुच्छेदों मे अनुपातों और प्रतिशतताओं के कुछ रुचिकर अनुप्रयोगों का सकेत है।[5] पाठक को निस्सदेह अनेक अन्य अनुप्रयोगों की जानकारी हो जाएगी जब वह पत्रिकाओं, समाचार-पत्रों, पुस्तकों तथा विज्ञापनों म न्यूनाधिक तक्नीकी सामग्री पढेगा।

सूचकाक—अधिकतर सूचकाकों को प्रतिशतताओं के रूप मे प्रस्तुत किया जाता है। उदाहरणार्थ, थोक मूल्यों के सूचकाक के निर्माण में प्रथम सम्मिलित की जाने वाली वस्तुएँ चुनी जाती ह और तब विभिन्न वस्तुओं के अलग-अलग महत्त्व को ठीक-ठीक ध्यान मे रखते हुए उनके मूल्य मिलाए जाते हैं। यदि सूचकाक कालक्रमानुसार है, जैसाकि प्राय: होता है तो कोई वर्ष आधार के रूप मे माना जा सकता है। उस वर्ष मे मूल्य 100 के बराबर किए जाते हैं। तब अन्य वर्षों के लिए मूल्य उस आधार वर्ष के सम्बन्ध मे व्यक्त किए जाते है। सयुक्त राज्य श्रम साख्यिकी ब्यूरो लगभग 2,200 थोक मूल्यों के अपने सूचकाकों के लिए आधार वर्ष के तौर पर 1957 से 1959 तक के वर्षों को औसत का प्रयोग करता है। अत इन तीन वर्षों मे थोक मूल्यों का 100 के द्वारा प्रतिनिधित्व होता है। दिसम्बर 1963 के लिए थोक मूल्य सूचकाक 100.3 था, जनवरी 1964 के लिए यह 101 0 था, फरवरी 1964 के लिए यह 100 5 था, मार्च 1964 के लिए यह 100 4 पर गिर गया। इस प्रकार इन मासों के लिए मूल्य 1957 से 1959 के 36 महीनों के लिए औसत के रूप म व्यक्त किए गए हैं।

---

5. सूचकाकों के अधिक पूर्ण विवरण के लिए अध्याय 17 और 18 देखिये।

लिंग अनुपात—जनसख्या मे पुरुषो की सख्या का स्त्रियो की सख्या के साथ सबध लिंग अनुपात द्वारा प्रस्तुत किया जाता है, जो प्रति 100 स्त्रियो के पीछे पुरुषो की सख्या बताता है। *1960 मे सयुक्त राज्य मे 8,83,03,113 पुरुष और 9,10,22,558 स्त्रियाँ थी।* इस प्रकार इस देश मे प्रति 100 स्त्रियों के पीछे 97 1 पुरुष थे। अनुपात विभिन्न वय समूहो मे भिन्न था। यह वय समूह "65 और अधिक" के लिए न्यूनतम, 82 8, था और वय समूह "15 वर्ष से कम" के लिए अधिकतम, 103 4, था। यह विभिन्न राज्यो के लिए भी भिन्न-भिन्न था। *यह मैसाच्यूसेट्स मे न्यूनतम था जहाँ प्रति 100 स्त्रियों के पीछे 93 4 पुरुष थे, और अलास्का मे अधिकतम था जहाँ प्रति 100 स्त्रियों के पीछे 132 3 पुरुष थे।*

जनसंख्या घनत्व—दो समुदायो की कुल जनसख्या की केवल मात्र तुलना करने की बजाय, जनसख्या के घनत्व पर विचार करना प्राय अधिक अर्थपूर्ण हो सकता है। हम कुल जनसख्या को वर्गमीलो मे क्षेत्रफल द्वारा भाग करके यह सम्पन्न करते हैं और इस प्रकार *प्रति वर्ग मील व्यक्तियो की सख्या निर्धारित करते हैं। उदाहरणार्थ, 1960 में मोन्टाना की* जनसख्या 6,74,767 थी और न्यू हैम्पशायर की जनसख्या 6 06,921 थी। यदि हम इन अको का प्रत्येक राज्य के भूमिक्षेत्र से सबध जोडें तो हमे पता चलता है कि न्यू हैम्पशायर मे प्रति वर्ग मील 67 3 व्यक्ति थे जब कि मोन्टाना मे केवल 4 6 व्यक्ति प्रति वर्ग मील थे। हाँ, इन अको का यह अर्थ नही कि न्यू हैम्पशायर मे *प्रत्येक वर्ग मील पर 67 या 68 व्यक्ति और मोन्टाना मे प्रत्येक वर्ग मील पर 4 या 5 व्यक्ति थे। वे केवल सारांश अक है,* जिनका सकेत है कि प्रत्येक राज्य मे, प्रति वर्ग मील व्यक्तियो की औसत सकेतित सख्या थी।

जनसख्या के घनत्व का कालक्रमानुसार तुलनाएँ करने मे भी प्रयोग किया जा सकता है। हमारे देश की प्राचीनता के साथ-साथ जनसख्या का घनत्व बढा है। 1800 मे *सयुक्त राज्य मे प्रति वर्ग मील 6 1 व्यक्ति थे, 1960 मे प्रति वर्ग मील 50 5 व्यक्ति थे।*

प्रति व्यक्ति अनुपात—बहुत से अक, जब उन्हे प्रति व्यक्ति आधार पर व्यक्त किया जाता है, अधिक अर्थपूर्ण या अधिक उपयोगी होते है। सयुक्त राज्य के सघीय ऋण से न केवल गत वर्षो मे व्ययों के स्तर और सरकारी सेवाओ मे वृद्धियो का बल्कि जनसख्या की वृद्धि का भी आभास होता है। उदाहरणार्थ, 30 जून, 1941 को सघीय ऋण 48,96,10,00,000 डालर था, 30 जून, 1963 तक यह अक 3,05,86,00,00,000 डालर *तक बढ चुका था। यदि इन अको की दोनो अवधियो को जनसख्या से भाग किया जाए तो* प्रतीत होता है कि प्रति व्यक्ति सघीय ऋण 30 जून, 1941 को 367 डालर था और 30 जून, 1963 को 1,616 डालर था।

विभिन्न वस्तुओ का उपभोग प्रति व्यक्ति आधार पर बहुलता से बताया जाता है। इस प्रकार 1963 मे गोमास का अनुमानित उपभोग प्रति व्यक्ति 94 8 पाउड था, अण्डो का अनुमानित उपभोग प्रति व्यक्ति 315 था, उपभोग की गई साफ चीनी की मात्रा लगभग *97 2 पाउड प्रति व्यक्ति थी।*

मृत्यु दरें—प्रदत्त वर्ष के लिए अशोधित, कुल, या सामान्य मृत्युदर उस वर्ष मे समुदाय मे होने वाली मृत्यु की सख्या को, उस समुदाय की मध्य वार्षिक जनसख्या द्वारा भाग करके और परिणाम को प्रति हज़ार व्यक्त करके प्राप्त की जाती है। 1963 मे सयुक्त राज्य मे सब कारणो से अनुमानित 18,13,000 मृत्युएँ हुई। सयुक्त राज्य मे निवास करने वाली 1 जुलाई, 1963 की जनसख्या का अनुमान 18,85,31,000 था। अत. 1963

के लिए मृत्यु दर

18,13,000 – 18,85,31,000 = 0 0096, अथवा 9.6 प्रति सहस्र

थी। आप यह देखेंगे कि मरण दर की यथार्थता प्रथम तो मृत्यु के पंजीकरण की पूर्णता की मात्रा पर निर्भर करती है, और दूसरे आधार के तौर पर प्रयुक्त मध्य-वार्षिक जनसंख्या अनुमान की यथार्थता पर। क्योंकि जनसंख्या की गणनाएँ 10 वर्ष मे केवल एक बार की जाती हैं अन्त प्रयुक्त किये जाने वाले अधिकतर जनसंख्या अंक अनुमान ही होते हैं। जब दो जनगणनाओं के बीच के किसी वर्ष के लिए जनसंख्या का अनुमान किया जाता है तो वह अनुमान *अन्त जनगणना* अनुमान कहलाता है, जब अनुमान जनगणना के बाद के वर्ष के लिए होना है तो यह *पश्च-जनगणना* अनुमान कहलाता है। अन्तःजनगणना अनुमान स्वाभाविक ही पश्च-जनगणना अनुमानो की अपेक्षा कुछ अधिक यथार्थ होते हैं। 1961 से 1969 (समाविष्ट) तक के वर्षों के लिए मरण दरें इस समय पश्च-जनगणना अनुमानो पर आधारित होनी आवश्यक है और *प्रारम्भिक* दरें कहलाती है। 1970 की जनगणना के निष्कर्ष प्राप्त होने के बाद 1961 — 1969 तक के वर्षों के लिए अन्तजनगणना अनुमान लगाए जा सकते है और मृत्यु दरो का इन नए जनसंख्या अनुमानो के आधार पर पुन सकलन हो सकता है। ऐसी दरें *परिशोधित* दरें कहलाती हैं।

जब एक राज्य या नगर म होने वाली मृत्युओ को उस समुदाय की जनसंख्या से भाग किया जाता है ता परिणामस्वरूप प्राप्त होने वाली अशोधित मरण दर मे कुछ सशोधन होने की आवश्यकता रहती है। उदाहरणार्थ किसी प्रदत्त वर्ष मे एक समुदाय में वे लोग मर सकने है जो किसी अन्य स्थान के निवासी हैं और किसी बड़े समुदाय के कुछ निवासी उस समुदाय के बाहर मर सकते हैं। यदि अनिवासी मरणों को समुदाय मे हुए मरणो मे से घटाया जाए तो परिणामस्वरूप प्राप्त होने वाली दर को *स्थानीय* दर कहा जाता है। यदि इसके अतिरिक्त उस समुदाय के बाहर होने वाले निवासियो के मरणो को जोडा जाए तो परिमाणत प्राप्त होने वाली दर को *निवासी* दर कहा जाता है। इन महत्वपूर्ण अन्तरो को पहचानने मे भूल होने पर अशुद्ध निष्कर्ष निकाले जा सकते है। एक वर्ष यह घोषणा की गई थी कि न्यूयार्क नगर के क्वीन्स बोरो के लिए मृत्यु दर 6 5 प्रति सहस्र थी, ब्राक्स के लिए 7 8, ब्रूकलिन के लिए 9 3, रिचमन्ड के लिए 13 5 तथा मनहट्टन के लिए 16 3 थी। क्वीन्स के लिए मृत्यु दर सयुक्त राज्य मे किसी भी अन्य ऐसे समुदाय से कम थी और कम से कम एक समाचार-पत्र ने तुरन्त घोषणा की थी कि क्वीन्स "देश मे स्वस्थतम स्थान था"। परन्तु बहुत शीघ्र ही यह संकेत किया गया था कि क्वीन्स में अस्पतालो का बहुत कम कोटा था और इसीलिए अस्पताल की परिचर्या चाहने वाले क्वीन्स के कुछ निवासी मनहट्टन मे या कही और इसकी खोज करते थे। अस्पताल के केसो में स्वाभाविक रूप से एक बहुत ऊँची मृत्यु दर दिखाई देती है और अशोधित मरण दर मे इस तथ्य का आभास नही होगा कि मनहट्टन मे तथा कही और मरने वाले कुछ व्यक्ति वास्तव मे क्वीन्स के निवासी थे।

जनसंख्या के विशिष्ट वर्गों (पुरुषो और स्त्रियो, विभिन्न वय समूहो तथा अन्य श्रेणियो) के लिए तथा विशिष्ट रोगो या कारणो के लिए मृत्यु दरें विशिष्ट मृत्यु दरें कहलाती हैं। क्योंकि किसी एक कारण से मरण अपेक्षाकृत कम होते हैं, कारण-विशिष्ट दरें प्राय. जनसंख्या की प्रति लाख बताई जाती हैं। इस प्रकार 1962 मे मोटर गाडी दुर्घटनाओ से मृत्यु दर 22 0 प्रति लाख थी।

विभिन्न समुदायो की मृत्यु दरो की योग्य तुलना मे इस तथ्य का विचार करना होता है कि लिंगो के अनुपात भिन्न हो सकते है और वय वटनो मे, नागरिको को जातीय और देशीय रचना मे, धन्धो मे, तथा अन्य कारको मे भी अन्तर हो सकते हैं। इन अन्तरो तथा समजित एव मानकित मृत्यु दरो के परिकलन की विधियो का विवरण इतना अधिक विशिष्ट विषय है कि इस पाठ मे उसका वर्णन नही किया जा सकता।[6]

जन्म दरें—जन्म दरो की गणना प्राय एक वर्ष मे जन्मो को उस वर्ष की मध्य-वर्षीय जनसख्या द्वारा भाग करके ली जाती है। ठीक मृत्यु दरो की स्थिति के समान हमे प्रारम्भिक दरें और परिशोधित दरें प्राप्त हो सकती है। हमे कुल, स्थानीय, और निवासी दरें भी प्राप्त हो सकती है। मृत-प्रसव, जन्म के तौर पर नही गिने जाते, यद्यपि भूतकाल मे उन्हे इस प्रकार गिना जाता रहा है, इस तथ्य को तैथिक तुलनाएँ करते समय स्मरण रखना चाहिए। सभवत इस तथ्य की ओर भी ध्यान दिलाना उचित होता है कि जन्मो का पजीकरण उतना पूर्ण नही होता जितना कि मृत्यु का पजीकरण होता है। शवाधान अनुज्ञा-पत्र देने तथा (शव को) दफनाने से पूर्व मृत्यु का पजीकरण आवश्यक है। परन्तु एक नवजात शिशु, परिवार और समुदाय मे समा सकता है चाहे उसके जन्म का पजीकरण हुआ हो अथवा नही।

कुल जनसख्या के सम्बन्ध मे जन्म दरो का परिकलन पूर्णतया सन्तोषजनक नही है क्योकि जनसख्या मे "बाल उत्पादकों" का अनुपात समय-समय पर या स्थान-स्थान पर स्थिर नही होता। जन्म दरो के परिकलन मे परिष्कार इस ग्रन्थ के क्षेत्र से परे है।

प्रति एकड फसल उपज—उत्पादित फ़सल की कुल मात्रा के आँकडे हमे बता सकते हैं कि एक वर्ष मे दूसरे की अपेक्षा उस वस्तु की अधिक मात्रा प्राप्त हुई अथवा नही। परन्तु ऐसे आँकडो से हम यह नही जान सकते कि वृद्धि अधिक प्रचुर उपज के कारण हुई है, क्षेत्र मे वृद्धि के कारण हुई है, या दोनो कारणो से हुई है। 1962 मे सयुक्त राज्य मे 2,76,04,000 एकड भूमि से 66,92,11,000 बुशल सोयाबीन काटी गई, अगले वर्ष 2,86,28,000 एकड मे 70,14,65,000 बुशल सोयाबीन हुई। खेत का क्षेत्रफल और कुल उपज दोनो बढ गए थे, परिणामस्वरूप प्रति एकड उपज मे वृद्धि हो गयी थी, जो 1962 मे 24 2 बुशल और 1963 मे 24 5 बुशल थी। भौगोलिक आधार पर, सयुक्त राज्य, जो सभी अन्य देशो, जिनके आँकडे प्राप्त है, की अपेक्षा अधिक सोयाबीन उगाता है, प्रति एकड उपज मे प्रथम नही है। इटली, जिसमे 1963 मे सयुक्त राज्य की अपेक्षा काफी कम पैदावार होती थी, मे 26 5 बुशल प्रति एकड की उपज थी।

सुअर-मक्का अनुपात—औसत मूल्य प्रति 100 पाउड को, जो कि किसानो को सुअरो के लिए प्राप्त होता है, औसत मूल्य प्रति बुशल द्वारा, जो किसानो को मक्का के लिए प्राप्त होता है, भाग करन का परिणाम सुअर-मक्का अनुपात है। उदाहरणत यदि एक दिन किसान सुअरो के लिए प्रति 100 पाउड 17 80 डालर और मक्का के लिए प्रति बुशल 1.48 डालर प्राप्त कर रहे हैं तो अनुपात 17 80 डालर ÷ 1.48 डालर = 12 0 है।

6 राष्ट्रीय जीवन मरण आँकडा प्रणाली से लिए आँकडा के साथ नैशनल सैंटर फार हैल्थ स्टैटिस्टिक्स द्वारा निर्गमित अनेक अध्ययन देखिए। साथ ही वाइटल स्टैटिस्टिक्स आफ दि यूनाइटेड स्टेटस जो सयुक्त राज्य स्वास्थ्य, शिक्षा एव कल्याण विभाग की सार्वजनिक स्वास्थ्य सेवा द्वारा प्रतिवर्ष निर्गमित हुई हैं। इसमे विस्तार से जन्म दरो, अस्वस्थता दरो, केस मृत्यु अनुपातो विवाह दरा, तलाक दरो, प्रसवन दरों, मृत जन्म अनुपातो, तथा अन्य वर्णन होता है। मासिक वाइटल स्टैटिस्टिक्स रिपोर्ट भी प्राप्य हैं।

इस अनुपात का यह अर्थ लगाया जा सकता है कि 100 पाउंड सुअर एक बुशल मक्का से 12 0 गुना मूल्यवान हैं अथवा अधिक सरल शब्दो मे 12 0 बुशल मक्का का मूल्य 100 पाउंड सुअरो के बराबर है। यदि एक अन्य दिन सुअरो से किसान को प्रति सौ पाउंड 16 40 डालर प्राप्त होते हैं और मक्का से प्रति बुशल 1 68 डालर मिलते हैं तो उस समय अनुपात 9 8 होता है। एक 6 वर्ष की अवधि मे सुअर मक्का अनुपात औसत लगभग 13 2 थी जो कम से कम 9 2 तक गिरी और अधिक से अधिक 19 8 तक पहुँची। यदि अनुपात कम है तो मण्डी के लिए मोटे किए जा रहे सुअरो को मक्का खिलाने की अपेक्षा किसानो के लिए अपनी मक्का सीधी बेचना अधिक लाभदायक है। यदि अनुपात ऊँचा है तो किसानो के लिए मक्का सीधी बेचने की अपेक्षा अपने सुअरो को मक्का खिलाना अधिक लाभदायक हो जाता है। क्योंकि मण्डी के लिए सुअर पैदा करने मे मक्का लागत का प्रमुख भाग है इसलिए अनुपात का प्रयोग सुअर उत्पादन के भावी विस्तार या सकुचन की वाछनीयता के सकेतक के तौर पर किया जाता है। इस प्रकार सुअर मक्का अनुपात और सुअर उत्पादन चक्र के बीच एक सम्बन्ध है। जब अनुपात ऊँचा होता है तो सुअर उत्पादन मे वद्धि होने की प्रवत्ति रहती है। इस प्रकार की वद्धि का परिणाम प्राय मक्का मूल्यो के सम्बन्ध म सुअर मूल्यो मे कमी होता है और तब सुअर उत्पादन को नियन्त्रित करने की प्रवत्ति होती है। 1940 से 1964 तक के लिए सुअर मक्का अनुपातो को दिखाने वाले वक्र चार्ट 5 12 तथा 5 13 मे दिखाए गए है।

बल्लबाजी की औसत—दैनिक पत्रो के खेल के पृष्ठो की बल्लेबाजी की परिचित औसत एक बल्लेबाज द्वारा कुल जितनी बार उसे बल्लेबाजी करनी थी उसके सम्बन्ध मे किए गए प्रहारो का अनुपात है। सारणी 7 4 मे चुनी हुई बल्लेबाजी मे औसतो की एक श्रेणी दिखाई गई है। सारणी 7 4 के अन्तिम स्तम्भ मे अको पर एक के अनुपात

सारणी 7 4

1965 मे अमरीकन लीग के 10 प्रसिद्ध खिलाडियों की बल्लबाजी को व्यक्तिगत औसतें

खिलाडी तथा क्लब	खेल	बल्लेबाजी की सख्या	प्रहार	बल्लेबाजी की औसत*
ओलिवा मिनसोटा	149	576	185	321
यस्त्रजेम्स्की बोस्टन	133	494	154	312
डवेलिलो क्लीवलैंड	142	505	152	301
राबिन्सन बाल्टीमोर	144	559	166	297
वैग्नर क्लीवलैंड	144	517	152	294
हावर्ड वाशिंगटन	149	516	149	289
कोलविटो क्लीवलैंड	162	592	170	287
हाल मिनसोटा	148	522	149	285
बफर्ड शिकागो	155	586	166	283
ट्रश न्यूयार्क	156	602	168	279

*मूल सारणी मे इस स्तम्भ का शीर्षक "पी सी टी" है।
आँकडे व्यावसायिक बसबॉल क्लबो की अमरीकन लीग से।

मे या प्रेक्षित अको की श्रेणियो की औसतो के रूप मे ठीक प्रकार से विचार करना आवश्यक है, जिनमे से प्रत्येक का मूल्य 1 या 0 है (अर्थात् बल्लेबाज ने प्रहार किया अथवा नही)। यदि एक व्यक्ति ने 75 बार बल्लेबाज़ी की और 25 प्रहार किए तो उसकी बल्लेबाज़ी की औसत 333 दिखाई जायेगी और यह तीन सौ तेंतीस' कहलाती है। यदि उसने बल्लेबाज़ी करते समय हर बार एक प्रहार किया हो तो उसका अक 1 000 हो जाएगा जो "एक हज़ार" कहलाता है। ध्यान दीजिये कि इन आँकडो के सकेत के लिए प्रयुक्त कुछ पदो म कुछ अन्तर्विरोध आते है। अको के स्तम्भ का शीर्षक प्राय "प्रतिशतता" होता है, अक एक के अनुपात के तौर पर मुद्रित किए जाते है, अक *प्रति सहस्र* कहे जाते हैं।

हवाई मार्ग दुर्घटना अनुपात—हवाई यात्रा की सुरक्षा का अनुपातो के द्वारा सकेत किया जा सकता है। 1963 मे अनुसूचित स्वदेशीय वायुयान 40 26,30 00,000 यात्री मील उडे और कुल 42 दुर्घटनाएँ हुई जिनमे कुल 48 यात्री मरे। अत वायुयान प्रति यात्री मृत्यु औसत 83,88,12 500 यात्री मील उडे। 1946 मे यह अक 8 09 10 867 था और 1952 म यह *प्रति यात्री मृत्यु 28,25 36 326 यात्री मील था*। जैसा कि इन कुछ आकडो से सुझाव मिल सकता है, यद्यपि अपेक्षाकृत कम सख्या म दुघटनाओ और मृत्यु के कारण अनुपातो मे वर्षानुवर्ष काफी उतार-चढाव आ सकता है और आता है जैसे जैसे हवाई यात्रा अधिक सुरक्षित बनी है प्रवृत्ति प्राय अधिक ऊँचे अनुपातों की ओर रही है। *प्रति दस लाख वायुयान मील घातक दुर्घटनाओ की सख्या के और प्रति 1 000 लाख यात्री मील यात्री-मृत्यु की सख्या के अनुपातो* का भी परिकलन किया जा सकता है।

100 प्रतिशत विवरण—जब बैंक बीमा कम्पनियाँ और अन्य निगम जनता को वित्तीय सूचना प्रस्तुत करते है तो उन्हे डालर अको की प्रतिशतताओ मे सपूण करना

सारणी 7 5

1963 और 1964 मे बेथलहम इस्पात निगम और अधीन कम्पनियो की पेन्शन न्यास निधि की परिसम्पत्तियाँ

परिसम्पत्ति	राशि		कुल का प्रतिशत	
	1963	1964	1963	1964
नकद और प्राप्य उपचित ब्याज	$ 24 19 000	$ 30 04,000	7	8
लागत पर निवेश				
अल्पकालीन दायित्व	183,52,000	4 76 77,000	5 0	12 2
सयुक्त राज्य सरकार बाड	149,16 000	1 4,916 000	4 1	3 8
अन्य बाड, नोट तथा दायित्व				
स्वदेशी निगम ..	899,72,000	9 16 36 000	24 5	23 4
स्थावर सम्पदा बन्धक .	187,96,000	1 81 44,000	5 1	4 6
विदेशी	234,34,000	2 09,85 000	6 4	5 4
अधिमान्य स्टाक	78,56 000	3 4 02,000	2 1	9
सामान्य स्टाक				
औद्योगिक .	128,129,000	13,05,54,000	34 9	33 4
सावजनिक उपयोगिता	36 717,000	3 22,,70 000	10 0	8 3
बैंक वित्त, तथा बीमा	26 541 000	2,8297 000	7 2	7 2
कुल	$36,7,105 100	$ 3908 85 000	100 0	100 0

आँकड बेथलहम इस्पात निगम एन्युअल रिपोर्ट *1964*, पृष्ठ 20 से।

प्रभावपूर्ण लगता है। इस प्रकार एक वित्तीय विवरण मे प्रत्येक परिसम्पत्ति कुल परिसम्पत्तियो की प्रतिशतता के रूप मे और प्रत्येक देयता कुल देयताओ की प्रतिशतता के रूप मे दिखाई जा सकती है। यह विधि तब विशेषतया प्रभावपूर्ण होती है जब डालर अक बडे होते हैं। सारणी 7 5 मे बेथलहम इस्पात निगम की पेंशन न्यास निधि और अधीन कम्पनियो के एक वार्षिक प्रतिवेदन मे परिसम्पत्तियाँ दिखाई गई है। वास्तविक आँकडे, यद्यपि पूर्णांकित किए गए है, इतने बडे हैं कि सामान्य पाठक उनका ग्रहण कर उनकी तुलना नही कर सकता, परन्तु प्रतिशत आँकडो से तुलनाएँ कम कठिन बन जाती हैं। ऐसा प्रतिशतता विवरण तैयार करते समय बहुत अधिक दशमलव स्थान न दिखाना वाछनीय है, अन्यथा तुलनाएँ सरलतापूर्वक नहीं की जा सकती। एक बैंक के साधनो के विवरण मे सब प्रतिशतताओं को तीन दशमलव स्थानो तक ले जाया गया। यह बिल्कुल अनावश्यक था, विशेषत इसलिए कि सबसे छोटी मद, "फुटकर बन्धक", 0 035 (0 0349) प्रतिशत थी और 0 03 प्रतिशत दिखाई जा सकती थी, और क्योंकि दूसरी सबसे छोटी मद, अन्य परिसम्पत्ति" 0 039 प्रतिशत थी और 0 04 प्रतिशत दिखाई जा सकती थी। सर्वप्रिय प्रस्तुतीकरण के लिए, अधिक महत्त्व की मदो पर ध्यान केन्द्रित करने के लिए इस प्रकार की छोटी मदो को जोड कर इकट्ठा करने मे कुछ लाभ है। ये दो छोटी मदे, जोडकर 0 07 प्रतिशत दिखाई देती, अथवा सब प्रतिशतताओं को एक दशमलव स्थान तक दिखाये जाने पर 0.1 प्रतिशत दिखाई देती। परन्तु "फुटकर बन्धको" या "अन्य परिसम्पत्तियों" या दोनों के छोटेपन पर बल देना वाछनीय हो सकता है।

रेल मार्ग अनुपात—रेलमार्गो के कुशल प्रचालन के लिए विस्तृत मात्रा मे सांख्यिकीय आँकडो का एकत्रीकरण और प्रयोग आवश्यक हो जाता है जिसके सबध मे बहुत से अनुपातो की गणना की जाती है। आगे दिए गए आँकडे 1963 मे सयुक्त राज्य के रेल मार्गो के लिए हैं।

प्रति मील लाइन के लिए निवेश, सडक और उपकरण (नकदी, सामान, और पूर्ति सहित) मे कुल निवेश को रेल मार्ग लाइन के मीलो की सख्या से भाग करके प्राप्त होता है। यह अक 1,63,292 डालर प्रति मील था, अथवा उपचित मूल्यह्रास निकाल कर, 1,20,153 डालर प्रति मील था।

प्रति टन-मील भाडा आय, कुल भाडा आय को ढोए गए भार के टन-मीलो की कुल सख्या से भाग दे कर प्राप्त होती है। प्रति टन मील भाडा आय 1 310 सेन्ट थी। इसी प्रकार हम प्रति यात्री-मील यात्री आय की सगणना कर सकते है, जो 3 178 सेन्ट थी।

प्रचालन अनुपात प्रचालन-आय के सबध मे प्रचालन-व्यय का अनुपात है। प्रचालन-व्यय 7,45,16,08,665 डालर था जबकि प्रचालन आय 9,55,95,46,424 डालर थी। प्रचालन अनुपात 77 95 प्रतिशत था।

अन्य अनेक रेल मार्ग अनुपात है, प्रत्येक का अर्थ स्पष्ट ही है। कुछेक की गणना इस प्रकार है प्रति टन भार कुल आय 6 14 डालर थी, प्रति टन भार कर्षण 464 मील था, प्रति यात्री आय 1 90 डालर थी, प्रति यात्री औसत यात्रा 59 6 मील थी, कुल सम्पत्ति निवेश पर प्रतिलाभ दर 3 10 प्रतिशत थी, वर्ष भर मे प्रति रेल मार्ग कर्मचारी काम के घण्टे 2,413 थे, वर्ष के दौरान काम न आ सकने वाले माल के डिब्बो की प्रतिशतता की

औसत 7.0 थी, प्रति माल-डिब्बा टन-मील प्रति दिन 113 थे, प्रति माल-डिब्बा मील प्रति दिन 49 2 मील थे ।[7]

ऊपर वर्णित रेल मार्ग अनुपात एक प्रकार के व्यवसाय अनुपात है । अनेक प्रकार के व्यवसाय सगठन उद्यम को अधिक अच्छी प्रकार चलाने के लिए विविध अनुपातो का सकलन करते है । एक अन्य ग्रथ मे[8] इस प्रकार के अनुपातो का विवरण दिया गया है, जैसे चालू अनुपात (चालू परिसम्पत्ति — चालू देनदारियाँ), व्यापारिक माल की बिक्री (शुद्ध बिक्री — पण्य सूची), लाभ की सीमा (लाभ — बिक्री) और श्रमिक आवर्त (प्रति-स्थापन — वेतन चिट्ठे पर सख्या) ।

प्रतिशतताओं का दूषित प्रयोग

अनुपात और प्रतिशतताएँ इतने सामान्य प्रयोग मे है कि उनका कभी-कभी दुरुपयोग आश्चर्यजनक नही है । प्रतिशतताओ के परिकलन और प्रयोग मे आने वाली कठिनाइयो का कारण प्राय निम्न कारणो मे से किसी एक मे ढूँढा जा सकता है (1) आधार के सबध मे सभ्रम, (2) लघु पूर्ण सख्याओ पर आधारित प्रतिशतताओ का परिकलन, (3) अस्थानस्थ दशमलव बिन्दु, (4) अकगणितीय अशुद्धियाँ, (5) प्रतिशतताओ की औसतें निकालने की अनुचित विधि । इनका विवरण क्रमानुसार प्रस्तुत किया जाएगा ।

आधार के सबध मे सभ्रम—पाँच वर्षों की एक अवधि मे सयुक्त राज्य मे पशु चिकित्सा कालेजो मे विद्यार्थियो का प्रवेश 3,160 से गिरकर 641 पर आ गया । 2 519 विद्यार्थियो की या प्रारभिक प्रवेश की 79 7 प्रतिशत कमी हुई, तो भी एक मध्य-पश्चिमी पशु-चिकित्सा कालेज के डीन का यह कहते हुए हवाला दिया गया कि कथित अवधि के दौरान प्रवेश 500 प्रतिशत घट गया था ! हो सकता है कि डीन ने वास्तव मे यह कहा हो कि प्रारभिक पजीकरण अक बाद के अक का लगभग 500 प्रतिशत था । 500 प्रतिशत कमी का अर्थ पहले पजीकरण के आकार का चार गुना नकारात्मक प्रवेश होगा ।

एक वर्ष सयुक्त राज्य के जिला-न्यायवादी द्वारा एक सकल्पित प्रयत्न किया गया था कि पिट्सबर्ग के भोजनालय अपने मूल्यो को एक निश्चित स्तर पर ले आएँ । समाचार पत्रो ने इस अभियान की सफलता की घोषणा करते हुए कहा कि पिट्सबर्ग के भोजनालयो ने अपने मूल्य 50 से 100 प्रतिशत तक कम कर दिए थे । यह तो स्पष्ट ही है कि मूल्य 100 प्रतिशत कम नही किए जा सकते, अन्यथा पहले की बेची जाने वाली सेवाएँ मुफ्त दे दी जाएँगी । कई एक पकवानो के मूल्य-ह्रास बताए गए । कुछ भोजन पहले 15 सेन्ट प्रति क्रयादेश के हिसाब से बिकता था । उसी आकार की सेवाएँ कमी के बाद 5 सेन्ट के हिसाब से बेची गई, अत कमी पहले के विक्रय मूल्य की 66 7 प्रतिशत हुई ।

किसी विज्ञापन मे यह दावा होते देखना कि "मूल्य 100 प्रतिशत घट गए" असाधारण बिल्कुल नही है । हाँ, इसका यह अर्थ होना चाहिए कि वस्तुएँ मुफ्त दी जा रही हैं । एक कम्पनी तो सलाह देने मे यहाँ तक गई कि उनकी मूल्य सूची से व्यक्ति "50 से 200 प्रतिशत तक बचत" कर सकेगा ।

7 इन और अन्य रेल मार्ग अनुपातो के लिए पूर्वी रेल मार्गों के सार्वजनिक सम्बन्धो की समिति, न्यूयॉर्क द्वारा वार्षिक निर्गमित ए ईयरबुक आफ रेलरोड इन्फरमेशन देखिए ।

8 देखिए एफ० ई० क्राक्सटन तथा डी० जे० काउडन, *प्रैक्टिकल बिजनेस स्टैटिस्टिक्स*, तृतीय सस्करण, प्रेन्टिस हॉल, इन्कार्पोरेटिड एन्जलवुड क्लिफ्स, एन० जे०, *1960*, पृष्ठ *90—99* ।

आधार के सबंध म गम्भीर सभ्रम टायरो की डाक-क्रयादेश गृह की गारटी मे विद्यमान प्रतीत होता है। सस्था का दावा है कि गारटी 'सेवा के मीलो, महीनो या वर्षों की किसी सीमा के बिना है' और टायरो की मुफ्त मरम्मत की जाएगी या "आप द्वारा प्राप्त केवल मात्र माल-भत्ते की वास्तविक रकम" लेकर बदले जाएगे। शब्दशः, आधार असीम है और यदि सब टायरो के क्रेताओं के लिए गारटी को पूर्णत पूरा किया जाता तो कम्पनी का शीघ्र ही टायर बेचना बन्द करना पडता। उक्त सस्था के लिए औचित्य की दृष्टि से यह नोट करना चाहिए कि उनकी समायोजन नीति उदार है।

लघु सख्याओ से प्रतिशतताएँ—लघु सख्याओ पर आधारित प्रतिशतताओ को प्रयोग करने की अवाछनीयता का एक अत्यन्त पुराना आदर्श उदाहरण चडॉक द्वारा दिया गया है।[9]

> जॉन्स हाप्किन्स विश्वविद्यालय द्वारा विश्वविद्यालय मे स्त्रियो के लिए विशिष्ट पाठ्यक्रम खोलने के कुछ समय बाद यह रिपोर्ट मिली कि महिला छात्राओ मे से $33\frac{1}{3}$ प्रतिशत न सस्था के सकाय म विवाह कर लिया था। हाँ, महत्त्वपूर्ण सूचना तो *महिला छात्राओं की सख्या थी। वे केवल तीन थी। छोटी सख्या मे केसों पर विचार करते समय केवल प्रतिशतताओं के प्रयोग से अशुद्ध धारणाएँ उत्पन्न होती हैं।* इन केसो म या तो प्रतिशतताओ का प्रयोग बिल्कुल नही करना चाहिए या व सख्याएँ जिनपर वे आधारित है प्रतिशतताओ के साथ होनी चाहिएँ।

साधारणतया जब तक आधार मे 100 या अधिक केस न हो, प्रतिशतताओ का परिकलन नही होना चाहिए।

अस्थानस्थ दशमलव बिन्दु—अस्थानस्थ दशमलव बिन्दुओ वाली अशुद्धियो से नितान्त भ्रात व्याख्याएँ हो सकती है। वे एक साधारण सी अशुद्धि हैं और उनसे सावधान रहना चाहिए। अस्थानस्थ दशमलव स्थानो मे ऐसी प्रारभिक प्रकार की अशुद्धियाँ आती है कि पाठक यह अनुभव कर सकता है कि वे इतनी प्रारभिक है कि उनके यहाँ वर्णन की आवश्यकता नही। परन्तु एक राज्य विश्वविद्यालय से एक अनुसधान रिपोर्ट मे बताया गया कि एक वर्ष मे सयुक्त राज्य की सेनाओ ने उस वर्ष मे प्राप्त कॉफी के 8 7 प्रतिशत का उपयोग किया। वे आँकडे जिनसे प्रतिशतता का परिकलन किया गया था 24 तथा 2,756 मिलियन (दस लाख) पाउड थे। ठीक अक एक प्रतिशत का 0 87 है।

राजधानी के एक समाचार पत्र के लिए नवाहो के भारतीयो का विवरण देते समय एक फीचर लेखक ने कहा, "ज्ञात नवाहो मरण दर 360 प्रति 1,00,000 है।" आम पद्धति से बताई जाने पर यह 3 6 प्रति 1000 या सयुक्त राज्य की दर का, जो कि उसी वर्ष मे 10 6 थी, लगभग एक-तिहाई होगी। यद्यपि उन मूलभूत आँकडो का, जिनसे नवाहो मृत्यु दर की सगणना की गई सदिग्ध मूल्य था, यह ज्ञात है कि वह अक समस्त देश के अक से बहुत बडा है। फीचर लेखक ने न केवल दशमलव की मिथ्या स्थापना की (उसकी इच्छा 3,600 प्रति 1,00,000 कहने की थी जो 36 प्रति 1,000 है) बल्कि सभवतः उसने अकगणितीय अशुद्धि भी की हो।

यह ध्यान देना रुचिकर होगा कि एक अस्थानस्थ दशमलव का तात्पर्य सदा गभीर मिथ्या-वक्तव्य होता है, क्योकि सबसे छोटी अशुद्धि जो हो सकती है उसका परिणाम होगा कि अशुद्ध अक जितना होना चाहिए उसका दस गुना या उसका दसवाँ भाग होगा।

---

9 राबर्ट इ० चडॉक की "प्रिंसिपल्स एन्ड मैथड्स ऑफ स्टैटिस्टिक्स, हूँटन मिफिन कम्पनी, बोस्टन, 1925, पृष्ठ 13—14।

परिकलको द्वारा दशमलवो के अस्थानस्थ किए जाने की उस समय सबसे अधिक सभावना प्रतीत होती है (1) जब बडी पूर्ण सख्याओ से सबध हो अथवा (2) जब पूर्व सख्याओ मे से एक दूसरी के सबध मे, बहुत बडी (या छोटी) हो, जिसके परिणामस्वरूप अनुपात बहुत बडा (या छोटा) हो। दो उदाहरण पर्याप्त होगे।

वर्षों की एक अवधि मे एक बैंक के साधन 1,00,000 डालर से 30,00,00,000 डालर तक बढ गए। एक समाचार पत्र ने कहा कि वृद्धि 3,000 प्रतिशत थी। वास्तव मे, *दूसरा अक पहले अक का 3,000 गुना है, अथवा इसका 3,00,000 प्रतिशत है*, और वृद्धि 2,99,900 प्रतिशत है।

एक विज्ञापन मे सकेत किया गया कि सयुक्त राज्य मे प्रति दिन 20,00,00,000 से अधिक चैकों का भुगतान किया जाता है और उनमे से लगभग 99 9995 प्रतिशत अच्छे होते है। विज्ञापन मे कहा गया "2,000 मे से केवल एक नकारा जाता है।" प्रतिशतता और अनुपात मे असहमति है। *पत्र-व्यवहार से पता चला कि लगभग 1,000 चैक प्रति दिन* निकम्मे थे, अत अनुपात "2,00,000 मे से 1" होना चाहिए था।

अंकगणितीय अशुद्धियाँ—समाचार-पत्रो के अनुसार एक वर्ष एक प्रसिद्ध सरकारी अधिकारी ने कहा कि रूसी साम्यवादियो का 80,00,00,000 व्यक्तियो पर अधिकार था और इस अक की लगभग 15,00,00,000 सयुक्त राज्य की जनसख्या मे तुलना की। *उसने कहा, बताया जाता है कि अनुपात 7 1 था। ठीक अनुपात 5 33 1 है।*

प्रतिशतताओ और अनुपातों की अशुद्ध औसत निकालना—प्रतिशतताओ और अनुपातो की औसतें निकालने की सामाजिक आवश्यकता के कारण एक खतरे के वर्णन और उचित विधि पर विचार करने की आवश्यकता है। सारणी 3 1 के अको पर विचार कीजिए। 1960 मे सयुक्त राज्य के पहाडी विभाग के आठ राज्यो के लिए प्रति 100 *स्त्रियों के पीछे पुरुषो की औसत प्रतिशतता या अनुपात जानना वाछनीय है। यदि हम सूची* मे दिए आठ प्रतिशतताओ या अनुपातो को जोडें और आठ से भाग करें तो हमारे पास 820 5 ÷ 8 = 102 5 आता है। परन्तु यह अक परिस्थिति का ठीक-ठीक प्रतिनिधित्व नही करता। आठ प्रतिशतताओ या अनुपातो की विभिन्न आधारो से गणना की गई थी और इसीलिए तदनुसार भार लगाना चाहिए। सही प्रतिशतता या अनुपात प्राप्त करने के लिए सरलतम विधि यह है कि आठ राज्यो के लिए पुरुष जनसख्या को जोडा जाए, आठ राज्यो *की स्त्री जनसख्या को जोडा जाए, और दूसरे अक को पहले से भाग किया जाए। इससे* 101.2 का अक प्राप्त होता है। वही परिणाम आठ अकों की औसत निकाल कर भी प्राप्त किया जा सकता था, बशर्ते कि प्रत्येक को उस आधार के अनुसार भारित किया जाए जिससे इसकी गणना की गई है। प्रत्येक अक को इसके आधार से गुणा करने, निष्कर्षों को जोडने, और आधार अको (या भारो) के जोड से भाग करने की विधि आवश्यक तौर पर वही है जैसी अभी-अभी प्रयुक्त की गई है। परन्तु निष्कर्ष थोडा कम सही है क्योंकि प्रत्येक प्रतिशतता अक या अनुपात का पूर्णांकन किया गया है। एक प्रदत्त प्रतिशतता को *पूर्णांक करने मे होने वाली अशुद्धि जब प्रतिशतता को गुणा किया जाता है बढ जाती है।* परन्तु क्योंकि कुछ प्रतिशतताएँ कम की गई हैं और कुछ अधिक की गई है, अत इन अशुद्धियों की प्रवृत्ति प्रतिसतुलन की है। विशिष्ट स्थितियो मे, उन्हे उनके आधारो के अनुसार भारित किए बिना प्रतिशतताओं की औसतें निकालना उचित हो सकता है। इसकी चर्चा पृष्ठ 166 तथा 167 पर की गई है।

8

वारंवारता बंटन

सांख्यिकीय आँकडो को सगठित करने और उनका साराश निकालने की एक विधि वारंवारता बटन निर्माण है। इस विधि मे एक श्रेणी की विभिन्न मदों का समूहो मे वर्गीकरण किया जाता है और प्रत्येक समूह मे आने वाली मदो की सख्या बताई जाती है। एक वारंवारता बटन सारणी 8 3 मे प्रदर्शित है। कभी कभी आँकडो का प्रयोग करने वाले को प्रकाशनो मे वारंवारता बटन पहले ही बने हुए मिलेगे जिनकी ओर वह सकेत कर सकता है, कभी-कभी वह अवर्गीकृत आकडो से स्वय अपना वारंवारता बटन बनाएगा। हम वारंवारता बटन का अपना विवरण पहले अपक्व या अवर्गीकृत आँकडो के रूप पर विचार करके प्रारभ करगे।

अपक्व आंकडे

वे अवर्गीकृत आकडे जिनसे वारंवारता बटन बनाया जा सके ऐसे प्रतीत हो सकते हैं जैसे कि सारणी 8 1 के आंकडे। यहाँ हमारे पास रूजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी (नवार्क शाखा) के 1965 मे स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उदार कला विद्यार्थियो द्वारा चार वर्षीय कोर्स के लिए प्राप्त श्रेणियाँ है। श्रेणियो की व्यवस्था यादृच्छिक है और हमने स्थान बचाने के लिए नाम छोड दिए है। अपक्व आँकडो का एक अन्य उदाहरण जिससे सभवत वारंवरता बटन बनाया जा सके एक कारखाने का वेतन चिट्ठा है। कर्मचारियो के वेतन चिट्ठो को वर्णक्रम मे नाम द्वारा, कर्मचारी सख्या द्वारा, विभागो द्वारा और तब नाम या सख्या द्वारा, वरीयता द्वारा, या किसी अन्य सुविधाजनक क्रम मे सूची मे रखा जा सकता है। सारणी 8 1 मे दिखायी विद्यार्थियो की श्रेणियो पर विचार करने से यह स्पष्ट है कि यदि अको की पुनर्व्यवस्था न की जाए तो बहुत कम जानकारी प्राप्त होनी है।[1] जब सारणी 8 1 के समान आँकडों की सूची बनाई जाती है तो न्यूनतम श्रेणी और उच्चतम श्रेणी मालूम करना भी टेढा कार्य है। यह निश्चित रूप से जानना और भी कठिन है कि किस मूल्य के इर्द-गिर्द श्रेणियो की केन्द्रित होने की प्रवृत्ति है अथवा क्या वे वास्तव मे ऐसे केन्द्रीकरण का प्रदर्शन करती है। विश्लेषण के ये और अन्य पग आकडो की पुनर्व्यवस्था करने और उनका साराश निकालने से सरल बन जाते हैं।

---

1. श्रेणियाँ 1 0, 2 0, 3 0, इत्यादि से 100 0, 90 0, 80 0, आदि मे परिवर्तित । गई।

सारणी 8.1

रूजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 मे स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उदार कला विद्यार्थियो द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त श्रेणियाँ।

86.1	83.2	84.1	91.1	84.3	93.6	79.7	87.4	95.0
83.3	92.9	82.4	82.6	89.8	81.0	89.5	83.1	82.5
81.5	78.0	87.2	89.8	81.3	84.8	91.0	92.2	90.2
89.7	84.0	80.0	84.8	86.3	88.7	84.6	81.3	87.6
85.0	79.4	94.3	83.5	79.8	82.2	87.1	88.8	78.9
78.6	86.8	82.8	80.7	96.5	83.7	77.8	81.2	84.1
88.5	77.7	84.4	90.6	80.2	90.2	98.3	86.1	90.6
80.6	90.2	85.3	79.1	86.6	80.9	86.2	83.0	86.4
83.5	84.3	91.7	84.0	78.1	88.1	79.6	89.8	81.5
94.6	81.3	88.4	81.0	89.6	81.8	83.2	85.2	83.8
81.1	78.6	83.1	92.8	76.9	83.7	92.0	80.6	94.2
86.2	87.9	81.7	83.8	87.4	85.6	91.8	88.7	79.9
79.7	86.3	89.5	80.9	81.3	94.3	86.6	81.0	90.9
88.7	82.3	84.1	87.6	83.3	81.2	80.2	93.0	82.7
78.9	92.2	80.3	86.4	90.5	87.3	84.0	82.4	86.0
82.5	79.8	88.0	78.3	84.6	82.1	88.8	85.4	88.0
87.2	83.0	82.0	93.9	81.5	87.7	79.3	96.2	82.3
90.7	87.0	83.4	91.8	88.2	79.4	85.8	83.6	85.0
80.2	81.4	90.2	84.8	79.7	92.2	77.4	86.5	89.5
84.7	87.7	80.9	86.2	85.0	82.8	87.7	83.1	91.8
87.5	78.7	86.0	79.9	90.7	83.9	79.2	88.4	84.5
82.7	94.2	83.1	88.5	79.5	86.2	93.8	85.1	94.6
84.0	79.6	97.5	80.6	87.9	77.9	84.2	81.3	81.1
88.6	83.2	80.0	83.3	83.1	88.9	78.6	87.6	86.3
79.3	86.6	85.2	89.8	77.4	84.1	83.7	81.2	89.9
91.4	88.0	79.8	78.5	86.8	83.0	88.7	84.3	84.2
89.8	81.9	85.0	84.5	91.5	84.9	82.9	91.8	91.4
85.1	77.9	87.8	76.5	95.2	91.7	78.9	86.6	87.4
83.8	90.3	81.4	86.8	82.5	89.7	84.7	84.0	84.6
81.8	85.3	92.0	82.3	80.1	86.1	87.0	93.9	83.3
96.7	79.9	82.5	84.0	89.5	79.3	79.6	83.4	88.5
82.2	84.2	85.6	84.3	91.4	85.0	89.6	80.5	84.8
86.1	89.0	77.6	90.9	83.4	78.3	81.4	87.4	82.6
87.4	80.7	86.1	80.4	86.6	93.0	86.0	82.7	96.7
79.6	82.4	94.6	86.5	79.2	83.7	91.6	87.9	83.2
90.2	85.0	83.5	91.8	88.5	82.0	90.3	85.3	86.4
86.2	78.8	87.2	83.2	77.7	88.3	78.8	79.8	87.1
81.0	88.5	79.5	90.2	85.2	81.2	84.5	92.5	81.9
86.8	81.1	84.6	86.3	80.9	85.9	87.5	83.1	89.2
81.3	93.5	83.0	76.9	96.0	80.1	81.0	86.6	80.7
85.6	79.4	87.4	83.7	82.8	84.1	90.7	82.3	85.5
92.5	86.4	80.3	85.3	79.8	87.9	81.7	87.7	
81.4	84.5	83.1	89.4	86.9	79.6	85.0	82.1	
84.8	82.3	87.8	78.5	83.1	89.3	80.3	90.2	
87.1	86.3	79.7	86.6	81.0	79.3	87.3	83.0	
85.9	93.9	82.8	82.6	87.7	86.1	80	84.0	

रूजस स्टट यूनिवर्सिटी के पजीयक कार्यालय से श्रेणियाँ 1 0 2 0, 3 0 इत्यादि से 100 0, 90 0, 80 0, आदि मे परिवर्तित की गई ।

सरणी

सारणी 8 2 के विद्यार्थियो की श्रेणियो की अवरोही क्रम मे पुनर्व्यवस्था की गई है। इस प्रकार की व्यवस्था (चाहे आरोही हो या अवरोही) एक *सरणी* कहलाती है। यह पदो की परिमाण-क्रम से व्यवस्था करती है। हमने साराश नही निकाला है, जब हम बारंबारता बटन का निर्माण करेगे वह तब निकालेंगे। सारणी पर विचार करके हम आँकडो से कुछ सीखने की स्थिति मे आ जाते है। एक तो, सारणी से हम श्रेणियों का परिसर देखने के तत्काल योग्य हो जाते है जो 76 5 से 98 3 तक बदला। दूसरे, यह भी देखा जा सकता है कि श्रेणियो का केन्द्रीकरण 83 और 85 के बीच मे है। जब हम बारंबारता बटन का परीक्षण करेगे और केन्द्रीय प्रवृत्ति के पगो पर विचार करगे तो यह अधिक स्पष्ट दिखाई देगी। तीसरे कुछ अधिक विस्तृत परीक्षा से हमे श्रेणियो के बटन की मोटी जानकारी प्राप्त होती है। उदाहरणार्थ, हम देख सकते हैं कि 78 से कम या 96 से ऊपर की श्रेणियाँ कम हैं। जब हमारे पास बारंबारता बटन होगा तो श्रेणी के इस विशिष्ट रूप का अध्ययन अत्यन्त शीघ्र होगा। चौथे, यह देखा जा सकता है कि अको मे उचित मात्रा मे सातत्य दिखाई देता है। यदि श्रेणियो को पूर्ण प्रतिशतताओं के रूप मे व्यक्त किया जाए तो 77 से 98 तक सब निरतर मूल्यो का प्रतिनिधित्व होता है। यदि हम दिखाए गए अको पर एक दशमलव स्थान तक विचार करें तो हम देख सकते है कि 79 0 से 92.0 तक के परिसर मे, जिसमे 409 विद्यार्थियो मे से 350 सम्मिलित हैं, सभावित 131 मूल्यो मे से 118 मिलते हैं। यदि श्रेणियाँ विद्यार्थियो की अधिक सख्या के लिए होती तो यह प्रवृत्ति अधिक महत्त्वपूर्ण होती।

किन्तु सरणी आँकडो का एक बेढगा प्रकार है। साथ ही, सब मदो की पुनर्व्यवस्था करने की आवश्यकता के कारण इसका निर्माण कष्टदायक है। सारणी के निर्माण का एक पर्याप्त सन्तोषजनक तरीका अको को छोटे कार्डों पर लिखना और कार्डों को छाँटना है। हाँ, यदि आँकडो को यात्रिक मारणीकरण कार्डों पर छिद्रित किया जाए तो सारणी का निर्माण सरल है।

श्रेणियो का अध्ययन करते समय हम प्राय सारणी बनाने के इच्छुक हो सकते है। कुछ सस्थाएँ प्रतिवर्ष स्नातक होने वाली कक्षा की एक सूची प्रकाशित करती है जिसमें उच्चतम से निम्नतम क्रम तक विद्यार्थियो के नाम और स्थान अकित होते हैं।

यदि हमारी अस्पताल या समुदाय पेटी के लिए धन इकट्ठा करने के अभियान मे रुचि है तो वैयक्तिक उपहारो को अवरोही क्रम मे अकित करना बहुत उपयोगी (उदाहरणार्थ, प्रचार प्रयोजनो के लिए) हो सकता है। परन्तु यह स्पष्ट है कि इस प्रकार से 500 या 1,000 अशदानो की सूची बनाना कष्टदायक और सीमित मूल्य का होगा। बहुत से उदाहरणो म सरणी बनाने से कोई विशेष लाभ नही है। एक सस्था के लिए प्रति मास अपने कर्मचारियो को दी राशियो की सरणी बनाना समय को नष्ट करना होगा। इस तर्क मे कोई अधिक सार नही है कि एक बैंक अपने बहुत से जमाकर्ताओ के दैनिक बकाया की सारणी क्यो बनाए। दूसरी ओर, जन्म मरण साख्यिकी के विद्यार्थी को जन्म दरो के अध्ययन मे विभिन्न नगरो की आरोही या अवरोही क्रम से सारणी बनाना और अन्तरो के कारणो पर विचार करना बहुत उपयोगी लग सकता है।

सारणी 8 2

हजर्स स्टट यूनिवर्सिटी के 1965 मे स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उदार कला विद्यार्थियो द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त श्रेणियो की सरणी

98 3	91 0	88 5	86 8	85 2	84 0	82 7	81 1	79 6
97 5	90 9	88 5	86 8	85 2	84 0	82 7	81 1	79 6
96 7	90 9	88 5	86 6	85 2	83 9	82 6	81 1	79 6
96 7	90 7	88 4	86 6	85 1	83 8	82 6	81 0	79 5
96 5	90 7	88 4	86 6	85 1	83 8	82 6	81 0	79 5
96 2	90 7	88 3	86 6	85 0	83 8	82 5	81 0	79 4
96 0	90 6	88 2	86 6	85 0	83 7	82 5	81 0	79 4
95 2	90 6	88 1	86 6	85 0	83 7	82 5	81 0	79 4
95 0	90 5	88 0	86 6	85 0	83 7	82 5	81 0	79 3
94 6	90 3	88 0	86 5	85 0	83 7	82 4	80 9	79 3
94 6	90 3	88 0	86 5	85 0	83 7	82 4	80 9	79 3
94 6	90 2	87 9	86 4	85 0	83 6	82 4	80 9	79 3
94 3	90 2	87 9	86 4	84 9	83 5	82 3	80 9	79 2
94 3	90 2	87 9	86 4	84 8	83 5	82 3	80 7	79 2
94 2	90 2	87 9	86 4	84 8	83 5	82 3	80 7	79 1
94 2	90 2	87 8	86 3	84 8	83 4	82 3	80 7	78 9
93 9	90 2	87 8	86 3	84 8	83 4	82 3	80 7	78 9
93 9	90 2	87 7	86 3	84 8	83 4	82 2	80 6	78 9
93 9	89 9	87 7	86 3	84 7	83 3	82 2	80 6	78 8
93 8	89 8	87 7	86 3	84 7	83 3	82 1	80 6	78 8
93 6	89 8	87 7	86 2	84 6	83 3	82 1	80 5	78 8
93 5	89 8	87 7	86 2	84 6	83 3	82 0	80 4	78 6
93 0	89 8	87 6	86 2	84 6	83 2	82 0	80 3	78 6
93 0	89 8	87 6	86 2	84 6	83 2	81 9	80 3	77 6
92 9	89 7	87 6	86 2	84 5	83 2	81 9	80 3	78 5
92 8	89 7	87 5	86 1	84 5	83 2	81 8	80 2	78 5
92 5	89 6	87 5	86 1	84 5	83 2	81 8	80 2	78 3
92 5	89 6	87 4	86 1	84 5	83 1	81 7	80 2	78 3
92 2	89 5	87 4	86 1	84 4	83 1	81 7	80 1	78 1
92 2	89 5	87 4	86 1	84 3	83 1	81 5	80 1	78 0
92 2	89 5	87 4	86 1	84 3	83 1	81 5	80 0	77 9
92 0	89 5	87 4	86 0	84 3	83 1	81 5	80 0	77 9
92 0	89 4	87 4	86 0	84 3	83 1	81 4	79 9	77 8
91 8	89 3	87 3	86 0	84 2	83 1	81 4	79 9	77 7
91 8	89 2	87 3	85 9	84 2	83 1	81 4	79 9	77 7
91 8	89 0	87 2	85 9	84 2	83 0	81 4	79 8	77 6
91 8	88 9	87 2	85 8	84 1	83 0	81 3	79 8	77 4
91 8	88 8	87 2	85 6	84 1	83 0	81 3	79 8	77 4
91 7	88 8	87 1	85 6	84 1	83 0	81 3	79 8	76 9
91 7	88 7	87 1	85 6	84 1	83 0	81 3	79 8	76 9
91 6	88 7	87 1	85 5	84 1	82 9	81 3	79 7	76 5
91 5	88 7	87 0	85 4	84 0	82 8	81 3	79 7	
91 4	88 7	87 0	85 3	84 0	82 8	81 2	79 7	
91 4	88 6	86 9	85 3	84 0	82 8	81 2	79 7	
91 4	88 5	86 8	85 3	84 0	82 8	81 2	79 6	
91 1	88 5	86 8	85 3	84 0	82 7	81 2	79 6	

वारवारता बटन

सरणी 8 2 की सारणी मे विद्यार्थियो की श्रेणियो की पुनर्व्यवस्था की गई। सारणी 8 3 का वारवारता बटन श्रेणियो के 12 समूहो या वर्गों मे संक्षिप्त कर देता है।

सारणी 8 3

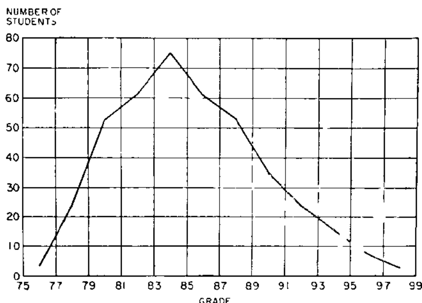
रुजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी की 1964 मे स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उदार कला विद्यार्थियो द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त श्रेणियो का वारवारता बटन

श्रेणी	विद्यार्थियो की सख्या
75 0—76 9	3
77 0—78 9	23
79 0—80 9	52
81 0—82 9	61
83 0—84 9	74
85 0—86 9	61
87 0—88 9	53
89 0—90 9	35
91 0—92 9	23
93 0—94 9	15
95 0—96 9	7
97 0—98 9	2
कुल	409

यह स्पष्ट है कि वारवारता बटन सारणी मे दिए विस्तार को नही दिखाता, परन्तु साराश निकालने मे बहुत लाभ होता है। हम देख सकते हैं कि निम्नतम श्रेणी 75 से कम नही है और उच्चतम श्रेणी 99 भी नही है हम उच्चतम और निम्नतम श्रेणियो के ठीक-ठीक मूल्या को निश्चित रूप से नही जान सकते जैसा हमने सरणी से किया था। श्रेणियो का 83 85 के निकट केन्द्रीकरण एक दृष्टि मे स्पष्ट है। यदि हम वारवारता बटन का एक वक्र खीचें, जैसा कि चार्ट 8 1 मे है तो हम आँकडो को तुरन्त देख सकते हैं और अन्य श्रेणियो से तुलनाएँ कर सकते है जैसा कि इस अध्याय के एक उत्तरवर्ती परिच्छेद मे विचार किया गया है। आँकडो के वर्गीकरण के बाद हम विशिष्ट मूल्यो का शीघ्र परिकलन करने की स्थिति मे होते है (अगले अध्यायो मे विवेचित) जो हमे आँकडो के वर्णन और उनके विश्लेषण म सहायता करेगा।

जब एक सरणी प्राप्त है तो वारवारता बटन केवल मात्र मदो को गिनकर बनाया जा सकता है। परन्तु केवल वारवारता बटन बनाने के प्रयोजन के लिए एक सरणी बनाना उचित नही है क्योंकि सरणी निर्माण करने के लिए बहुत अधिक समय की आवश्यकता होती है।

यदि आँकडे असगठित रूप मे है जैसा सारणी 8 1 मे है, तो हम अध्याय 2 मे दिखाई विधि के समान गुणाकन विधि से वारवारता बटन का निर्माण कर सकते हैं। अको के प्रयोग का दूसरा तरीका सारणी 8 4 के समान एक प्रविष्टि प्रपत्र बनाना है।



चार्ट 8 1 रूजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी की 1965 मे स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उदार कला विद्यार्थियो द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त श्रेणियाँ। सारणी 8.3 आँकडे ।

यह सरणी बनाने की अपेक्षा कम श्रमसाध्य है और गुणाकन विधि की अपेक्षा इसमे कुछ लाभ हैं। प्रविष्टि प्रपत्र के लाभ हैं . (1) हम स्तम्भों की यह देखने के लिए जाँच कर सकते है कि कोई मद गलती से तो अकित नही हुई, (2) हम अकित मदो का जोड कर सकते हैं और इस जोड की अवर्गीकृत आँकडो के जोड के साथ पडताल कर सकते हैं, (3) यदि हम यह निर्णय करें कि हमे 2 प्रतिशत की बजाय 1 प्रतिशत या 3 प्रतिशत की श्रेणियाँ चाहिएँ तो हम अपने वारवारता बटन को थोडी चेष्टा से पुन आकार दे सकते हैं, (4) जैसा कि अगले अध्याय मे दिखाया जाएगा, प्रविष्टि प्रपत्र हमे यह पता लगाने के योग्य बना देता है कि एक श्रेणी का मध्य मूल्य उस श्रेणी मे मदो की औसत से कितना अधिक मिलता-जुलता है। यदि वाछनीय हो तो प्रविष्टि प्रपत्र मे प्रयुक्त श्रेणियाँ हमारे विचार के अनुसार वारवारता बटन के लिए जितनी हम चाहेंगे, उससे भी सकुचित हो सकती हैं। तब इन श्रेणियो को उचित मध्यान्तर और श्रेणी सीमाओ का प्रयोग करके तुरन्त मिलाकर चौडा किया जा सकता है।

सारणी 8 3 के वारवारता बटन के सब श्रेणी मध्यान्तर 2 प्रतिशत हैं। जब सब श्रेणी मध्यान्तर समान हो तो चार्ट बनाना और परिकलन करना सरल हो जाता है। अत जब भी सभव हो, वारवारता बटनों का निर्माण समान श्रेणी मध्यातरो से करना चाहिए। परन्तु यह सदा व्यावहारिक नही होता। सारणी 8.5 म एक वारवारता बटन दिखाया गया है जिसके श्रेणी मध्यान्तर असमान है। इस उदाहरण मे परिणाम कम आय वाले सचिवो के सम्बन्ध मे अधिक विस्तृत जानकारी देता है।

सारणी 8.4

रूजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी की 1965 में स्नातक होने वाली कक्षा के 409 उदार कला विद्यार्थियों द्वारा चार वर्षीय पाठ्यक्रम के लिए प्राप्त श्रेणियों के लिए प्रविष्टि प्रपत्र।

75.0–76.9	77.0–78.9	79.0–80.9	81.0–82.9	83.0–84.9	85.0–86.9	87.0–88.9	89.0–90.9	91.0–92.9	93.0–94.9	95.0–96.9	97.0–98.9
76.5	78.6	80.0	81.3	83.3	85.1	88.5	89.7	91.4	94.6	96.7	97.5
76.9	78.9	79.7	81.1	83.5	85.0	88.7	90.7	92.5	94.2	96.5	98.3
76.9	78.0	80.2	82.5	84.7	86.2	87.2	89.8	92.9	93.5	95.3	
	77.7	79.3	82.7	84.0	85.1	87.5	90.2	92.1	93.9	96.0	
	78.0	79.6	81.8	83.8	85.1	88.6	90.4	91.7	94.3	96.2	
	78.7	79.4	82.2	84.8	85.2	87.4	90.4	92.0	94.6	95.0	
	77.9	79.8	81.0	84.2	86.9	87.1	89.0	91.1	93.4	96.7	
	78.8	79.6	81.3	84.0	85.6	87.9	89.5	92.8	93.8		
	77.6	79.9	81.4	84.3	85.9	87.0	90.2	91.8	93.5		
	78.3	80.7	81.3	83.0	86.8	87.7	89.9	91.8	93.7		
	78.5	79.4	82.3	83.2	86.3	88.0	90.6	91.5	93.5		
	78.5	80.0	81.4	84.2	86.6	88.5	89.8	91.4	93.0		
	78.1	80.3	81.9	84.4	85.3	87.2	90.9	92.2	93.9		
	77.4	80.9	82.4	84.1	85.0	88.4	90.2	91.7	94.2		
	77.7	80.0	81.1	84.4	86.4	88.0	89.4	91.0	94.6		
	77.9	79.8	82.3	83.1	86.3	87.8	89.8	92.0			
	78.3	79.5	82.4	84.1	85.3	87.2	89.6	91.8			
	77.8	80.3	82.8	83.4	86.0	87.4	90.5	91.6			
	77.4	79.7	81.7	83.1	85.2	87.8	90.7	92.2			
	78.8	80.7	82.0	83.5	85.0	87.6	89.5	91.8			
	78.9	79.1	81.4	84.6	85.6	88.4	90.2	92.5			
	78.8	80.9	82.5	83.0	85.1	87.4	89.7	91.6			
	78.9	79.0	82.8	83.1	86.4	88.2	89.3	91.4			
		80.6	82.0	84.8	86.2	87.6	89.5				
		80.4	81.0	83.5	86.8	88.5	89.6				
		79.8	82.3	84.0	86.5	87.7	90.3				
		80.2	82.6	83.8	86.3	88.7	90.7				
		79.7	81.3	84.8	85.3	88.1	89.8				
		79.5	81.3	83.3	86.5	87.3	90.2				
		80.1	81.5	84.5	86.3	87.7	90.2				
		79.2	82.5	84.0	86.6	88.9	90.8				
		80.9	82.8	84.3	85.0	88.3	90.9				
		79.8	81.0	83.2	86.8	87.0	89.5				
		80.9	81.0	83.7	86.6	87.1	89.9				
		79.4	82.2	84.3	85.2	88.8	89.2				
		79.3	81.8	83.3	86.9	87.7					
		80.1	81.2	84.6	85.6	88.7					
		79.6	82.1	83.1	86.2	87.0					
		79.3	82.8	83.4	86.1	87.5					
		79.7	82.0	83.1	85.0	87.3					
		79.6	81.2	84.8	85.9	87.4					
		80.2	82.9	83.7	86.1	88.8					
		79.3	81.4	83.7	86.2	88.7					
		79.2	81.0	83.9	86.6	88.6					
		79.6	81.7	84.1	85.8	87.8					
		80.3	81.3	83.0	86.0	87.4					
		80.7	81.2	84.9	85.0	87.0					
		80.6	81.0	83.7	86.1	87.7					
		80.5	82.4	84.1	85.2	87.8					
		79.8	81.3	84.0	85.4	88.0					
		79.9	81.2	83.2	86.5	87.4					
		80.7	82.7	84.0	85.1	88.5					
			82.3	84.2	86.6	87.2					
			82.1	83.7	85.3						
			82.6	84.7	86.8						
			81.5	84.3	86.4						
			82.7	83.1	86.0						
			82.3	83.0	86.0						
			81.1	83.8	86.3						
			82.6	83.1	86.4						
			81.9	84.3	85.3						
				84.0							
				83.4							
				83.1							
				83.0							
				84.0							
				84.1							
				83.8							
				84.5							
				84.2							
				84.6							
				83.3							
				84.8							
				84.2							

सारणी 8 5

अक्तूबर 1964 मे बोस्टन, मैसाच्युसेट्स मे 7,011 महिला सचिवों की औसत सामान्य-समय की साप्ताहिक आय

साप्ताहिक आय	महिलाओ की सख्या	वारवारता घनत्व, प्रति 5 00 डालर आय, महिलाओ की सख्या
50 डालर परन्तु 55 डालर से कम	1	1
55 डालर परन्तु 60 डालर से कम	9	9
60 डालर परन्तु 65 डालर स कम	107	107
65 डालर परन्तु 70 डालर से कम	167	167
70 डालर परन्तु 75 डालर से कम	461	461
75 डालर परन्तु 80 डालर से कम	517	517
80 डालर परन्तु 85 डालर से कम	620	620
85 डालर परन्तु 90 डालर से कम	786	786
90 डालर परन्तु 100 डालर से कम	1,796	898
100 डालर परन्तु 110 डालर से कम	1,297	648 5
110 डालर परन्तु 120 डालर से कम	728	364
120 डालर परन्तु 130 डालर से कम	291	145.5
130 डालर परन्तु 145 डालर से कम	179	59 7
145 डालर या अधिक	52	..
कुल	7,011	...

आंकडे सयुक्त राज्य श्रम साख्यिकी ब्यूरो को "ऑक्यूपेशनल वेज सर्वे" बोस्टन, मैसाच्युसेट्स, दिसम्बर 1964, पृष्ठ 7 से ।

वर्ग सख्या का चयन—वर्गों की सख्या के सबध मे, जिनमे वारवारता बटन बाँटा जाना चाहिए, कोई निश्चित नियम नही दिया जा सकता । यदि बहुत अधिक वर्ग है तो उनमे से बहुतो मे केवल कुछ वारवारताएँ होगी और बटन मे अनियमितताएँ दिखाई दे सकती हैं जो मापे जा रहे चर के व्यवहार के कारण नही है । यदि बहुत कम वर्ग है तो एक वर्ग मे इतनी अधिक वारवारताएँ इकट्ठी हो जाएँगी जिससे बहुत सी जानकारी नष्ट हो जाएगी । वर्गों की प्रयोज्य सख्या आशिक तौर पर आँकडो की प्रकृति पर (जैसाकि अगले परिच्छेद मे भोजन की जाँचो के लिए वर्णित किया जाएगा) और प्रगत वर्ग मे वारवारताओ की सख्या पर निर्भर करती है । जितनी अधिक वारवारताओ की सख्या है, हमारे पास उतने अधिक वर्ग हो सकते है । विचाराधीन मूल्यो के क्षेत्र मे जिस नियमितता से वारवारताएं बाँटी जाती हैं वह भी एक निर्धारक तत्त्व है । वारवारताओ का बटन जितना अधिक नियमित है, हम उतने अधिक वर्गों का प्रयोग कर सकते हैं, क्योकि नियमितता की उच्च मात्रा वाले आँकडो को, वारवारताओ मे अनुचित अन्तरो और अनियमितताओ को बिना दिखाए अनेक वर्गों मे बाँटा जा सकता है । साधारण तौर पर

यह कहा जा सकता है कि 6 या 8 से कम वर्गों का प्रयोग विरले ही करना चाहिए, और 16 से अधिक वर्ग केवल विस्तृत आँकडे के साथ काम करने के लिए उपयोगी होंगे। उदाहरणार्थ सारणी 8 3 मे 12 *वर्ग प्रयुक्त किए गए थे। जब वर्गों की सख्या निर्धारित* हो चुकी हो, तो सम्पूर्ण बटन के लिए मूल्यो का परिसर प्रयोग किए जाने वाले श्रेणी मध्यातर का सकेत करता है।

वर्ग सीमाओ का चयन—अध्याय 4 मे यह सकेत किया गया था कि प्रत्येक वर्ग के मध्य मूल्य का उपयोग वर्ग का *प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है। वर्गों के मध्य*-मूल्यो का न केवल वारवारता बटन का चार्ट बनाने समय, बल्कि विभिन्न परिकलन करने मे भी जिसका बाद के अध्यायो म विवेचन किया जायेगा, प्रयोग किया जाता है। यदि प्रत्यक वर्ग की सीमाओं का स्पष्ट सकेत नही किया गया हो तो मध्य-मूल्य का, जो कि *ऊपरी और निचली सीमाओं का मध्यमान है, ठीक प्रकार से निर्धारण नही किया जा* सकता। मध्य मूल्य कल्पना की पर्याप्तता का अधिक पूर्ण रूप से अध्याय 9 मे विवेचन किया जाएगा। इस स्थान पर यह स्पष्ट कर देना महत्त्वपूर्ण है कि जब वारवारता बटन का निर्माण किया जा रहा हो तो वर्ग सीमाओं का इस प्रकार से चयन करना चाहिए कि *जहाँ तक सभव हो प्रत्यक वर्ग का मध्य-मूल्य, किन्ही मूल्यो को जिनके इर्द-गिर्द आँकडो के* केन्द्रीकरण की प्रवृत्ति है, ठीक ठीक ढँक लेगा।

कल्पना कीजिए कि कॉलेज के नए विद्यार्थियो के एक बडे समूह के शैक्षिक स्तर के 0 से 100 तक के परिसर के सख्यात्मक पैमाने पर माप किए जाते हैं। आँकडो के *उदाहरणार्थ, 50 से लगभग 100 तक काफी सरलता से अशांकित होने की आशा* की जा सकती है। कुछ विद्यार्थी 88 0 योग्यताक्रम के और अन्य 89 0 के होंगे, इनके अतिरिक्त कुछ अन्य इन दो मूल्यो के बीच म आएँगे। यदि एक पर्याप्त बडे समूह का माप दिया जाना हो तो 88 0 तथा 89 0 के बीच परिवर्तनो का छोटापन केवल मापक यत्र की *यथार्थता* द्वारा सीमित होगा (*इस उदाहरण मे, श्रेणीकरण विधि*)। *मूल्यो की ऐसी श्रेणी नही* होगी जिसके इर्द गिर्द वारवारताओ की केन्द्रित होने की प्रवृत्ति होगी और पूर्वगामी अनुच्छेद क अ त म वर्णित समस्या उत्पन्न नही होगी।

दूसरी ओर, एक कैफेटीरिया के भोजन के चैको पर विचार कीजिए जिनमे से बहुत से (परन्तु सब नही) 5 सेन्ट का गुणज है। इस उदाहरण मे, वर्ग अन्तरालो को 8—12 सन्ट 13—17 सन्ट, 18—22, सेन्ट इत्यादि लिखा जाना चाहिए, इस प्रकार 10 *सेन्ट 15 सेन्ट, 20 सेन्ट, इत्यादि के मध्य मूल्य* प्राप्त होने चाहिएँ जो केन्द्रीकरण बिन्दुओ *से मिलते है।*

नौसिखुओ के वेतन मानो वे आँकडे तथा उदार कला स्नातको के क्रमनिर्धारण एक सतत चर के उदाहरण हैं क्योंकि मूल्य एक दूसरे से बहुत ही छोटे परिवर्तनो के योग्य है। लोगो की ऊँचाइया और भार भी निरन्तर चर है। जीवन की दीर्घता एक अन्य उदाहरण है। *अल्पाहारगृह के भोजन के चैंको के आँकडे एक विविक्त या असतत चर के उदाहरण है,* क्योकि मूल्य एक दूसरे से परिमित मात्राओ मे भिन्न है, जो इस मामले म 1 सेन्ट है। एक विविक्त चर के लिए वे सकेन्द्रण दिखाना आवश्यक नही जो भोजन के चैंको के आँकडो *मे विद्यमान थे। उदाहरण के लिए,* यदि बहुत से कर्मकारो को एकसमान कार्यों मे लगाया जाए और उन्हे कार्य भाग की दर के आधार पर अदायगी की जाए (अर्थात् उत्पादिन मात्रा के आधार पर) तो यह बिल्कुल सभव है कि एक सप्ताह के कार्य के लिए 161 21

डालर, 161.22 डालर, 161 23 डालर, इत्यादि प्राप्त करने वाले व्यक्ति हो सकते है। यद्यपि कार्यभाग दरें एक सेन्ट के भिन्नों में हो सकती है और प्राय· होती है किन्तु साप्ताहिक अदायगी पूर्ण सेन्टो में होनी आवश्यक है।

पूर्ववर्णन से एक महत्त्वपूर्ण विचार का सुझाव मिलता है अर्थात् हमारा सबध इतना इस तथ्य से नही है कि एक चर विविक्त है, जितना कि इस तथ्य से है कि आँकडे असतत हो सकते है और हमारे पास वास्तविक आकडो मे अन्तर्निहित अन्तर तथा सकेन्द्रण हैं। वेतनों पर विचार करते समय इस प्रकार की स्थिति प्राय उत्पन्न होती है। कई सौ कर्मचारियों वाले एक सगठन ने सभवत लगभग 5,200 डालर से लेकर 40,000 डालर से अधिक प्रति वर्ष तक वेतन दिए। किसी भी दृष्टि से इन सीमाओ के बीच समान रूप से अशाकित बटन सभवत न हो। सलग्न मूल्यों के बीच अन्तर 100 डालर से लेकर 5,000 डालर तक हो सकते है और विभिन्न प्रथागत वेतना जैसे 6,000 डालर, 7,000 डालर, 7,500 डालर, 8,000 डालर, 10,000 डालर, इत्यादि पर उद्घोषित सकेन्द्रण हो सकते है। इस प्रकार के बटन के लिए वर्ग सीमाओ का चयन बडी कठिनाई प्रस्तुत करता है। प्राय मध्य-मूल्यों का इस प्रकार समजन करना कि वे सब सकेन्द्रण बिन्दुओ को ठीक-ठीक ग्रहण करे, सभव नही है। तब एक सन्निकट समजन पर्याप्त होना चाहिए।

यह तथ्य कि हम एक सतत चर पर विचार कर रहे है जो हमे अधाधुध वर्ग सीमाओ के चयन की आज्ञा नही देता। यदि व्यक्तियों के भारों के सबध म, निकटतम पाउड तक प्रतिवेदित, आँकडे इकट्ठे किए जा रहे है। ता जिन व्यक्तियों के भार का प्रतिवेदन 142 पाउड है वे 141 5 पाउड तथा 142 5 पाउड के बीच म कहीं होंगे, समूह के रूप मे, उनकी औसत लगभग 142 पाउड होगी। परन्तु कल्पना कीजिए कि भार का प्रतिवेदन अन्तिम पूर्ण पाउड तक दिया गया है। इस स्थिति म, जिन व्यक्तियों के भार का प्रतिवेदन 142 पाउड है वे ठीक 142 पाउड और ठीक 143 पाउड से कम के बीच मे होंगे, समूह के रूप म, उनकी औसत लगभग 142 5 पाउड होगी। आइए हम कल्पना करे कि 3 पाउड के वर्ग-अन्तराल से एक बारबारता बटन का निर्माण करना है। यदि निकटतम पाउड तक भारों का प्रतिवेदन मिला है तो 143, 146, 149, इत्यादि मध्य-मूल्यो के साथ वर्ग-अन्तरालो को "142—144, 145—147, 148—150" इत्यादि लिखना ठीक है। परन्तु यदि भारो का प्रतिवेदन अन्तिम पूर्ण पाउड तक हुआ है तो उपयुक्त अशुद्ध है, परन्तु "142 तथा 145 से कम, 145 तथा 148 से कम, 148 तथा 151 से कम", इत्यादि 143 5, 146 5, 149.5, इत्यादि मध्य-मूल्यों के साथ लिखना शुद्ध है।

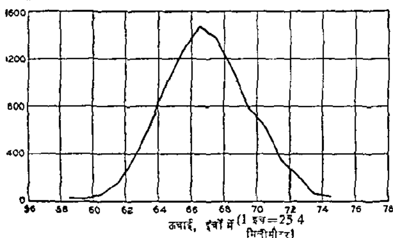
कभी-कभी सतत चर पर विचार करते समय वर्ग इस प्रकार लिखे जाते है कि सीमाएँ परस्पर अति व्याप्त हुई प्रतीत होती है। उदाहरण के लिए, विद्यार्थियो के ग्रेडा के आँकडो का 76 0 —78 0, 78 0—80 0 80 0—82 0, इत्यादि वर्गीकरण हो सकता था। जब यह किया जाता है तो वे बारबारताएँ जो एक वर्गसीमा पर गिरती है दो वर्गो के बीच विभक्त की जाती हैं जिसका परिणाम प्राय बटन मे कुछ भिन्नात्मक बारबारताएँ होती हैं।[2] इन श्रेणियो के प्रयोग से एक बारबारता बटन सारणी 8 2 की सरणी से या सारणी 8 4 के प्रवेश फॉर्म से आसानी से निर्मित किया जा सकता है। परस्पर व्याप्त करने वाले वर्ग अन्तरालों का प्राय ग्रेडा के आँकडो के लिए प्रयोग नही किया जाता।

2 देखिए एस० ई० बाक्स्टन, ऐलिमेन्टरी स्टैटिस्टिक्स विद ऐप्लिकेशन्स इन मेडिसिन एन्ड दि बायोलाजिकल साइन्सिस, डावर प्रकाशन, इन्कार्पोरेटिड, न्यूयार्क, 1959, पृष्ठ 41—49।

वारवारता बटनों के वक्र—वारवारता बटन के लेखाचित्री निरूपण का विवेचन अध्याय 4 मे किया गया था। यद्यपि वारवारता बटन एक स्तम्भ भारेख या वक्र द्वारा दिखाया जा सकता है, किन्तु उत्तरोक्त युक्ति का अनुप्रयोग करने की प्रथा है। (हम चार्ट 8 5 मे तथा अध्याय 23 में स्तम्भ आरेख का प्रयोग करेंगे।) वक्र का एक लाभ यह है कि तुलना के प्रयोजन के लिए उन्ही अक्षरो पर तुरन्त दो या अधिक वक्र खींचे जा सकते है। किसी भी स्थिति मे, वारवारता बटन के विश्लेषण मे पहला पग चार्ट का निर्माण होना चाहिए, क्योकि एक ही दृष्टि मे यह हमे बताएगा कि हम निम्न प्रकार के बटनो म मे किस पर विचार कर रहे हैं।

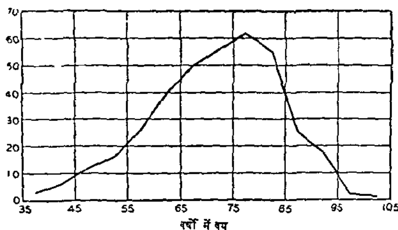
चार्ट 8 1, जिसमे विद्यार्थियो के ग्रेडो के आँकडो का लेखाचित्री रूप दिखाया गया है, सममित नही है, बल्कि थोडा सा दाई ओर को *तिरछा* है। (*तिरछेपन का वर्णन* अध्याय 10 मे है।) सामाजिक विज्ञानो मे पेश आने वाले बहुत से वारवारता बटन वक्र असममित है और प्राय दाएँ को टेढे होते हैं। विरले ही हमे कोई वक्र बाएँ को टेढा मिलता है।

जैव और मानवमितीय श्रेणियो मे (विशेषकर वे जिनमे रेखीय माप जैसे कि ऊँचाई दो या तीन दिशा की अपेक्षा माप जैसे कटि परिधि या भार, आता है) प्राय ऐसे वक्र प्राप्त होते है जो लगभग सममित हैं। इस प्रकार की श्रेणी चार्ट 8 2 मे दिखाई गई है जो नर औद्योगिक कर्मकारो के एक बडे समूह का ऊँचाई बटन चित्रित करता है।



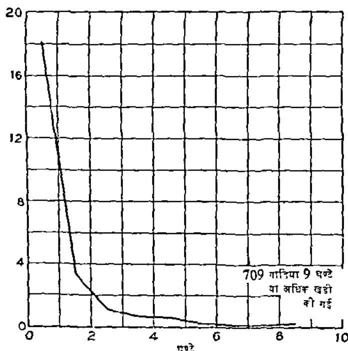
चार्ट 8 2 *9,552 नर, औद्योगिक कर्मकारों की ऊँचाइयाँ। आँकडे ए हैल्थ स्टडी आफ टैन थाउजेन्ड मेल इ डस्ट्रियल वर्कर्स*, पृष्ठ 59 से, सयुक्त राज्य सार्वजनिक स्वास्थ्य सेवा, सावजनिक स्वास्थ्य बुलेटिन न० 162।

एक वक्र जो बाएँ को तिरछा है चार्ट 8 3 मे दिखाया गया है जो 371 अमरीकोन आविष्कर्ताओ की मृत्यु के समय आयु चित्रित करता है। जैसाकि अध्याय 10 मे सकेत किया गया है वहाँ इस श्रेणी मे तिरछेपन की मात्रा सुनिश्चित की गई है, तिरछापन चर की विशेषता हो सकती है या इस तथ्य के कारण हो सकता है कि अध्ययन मे सम्मिलित आविष्कर्ताओ के लगभग पाँचवें भाग का जन्म 1800 से पूर्व हुआ था।



चार्ट 8 3 371 अमरीकी आविष्कर्ताओं की मृत्यु के समय आयु। "आंकड़े सन्फर्ड विस्टन की बायो सोशल कैरेक्टरिस्टिक्स ऑफ अमेरिकन इन्वेंटर्स", अमेरिकन सोश्योलाजिकल रिव्यू, खंड 2, न० 6, पृष्ठ 837—849 से।

चार्ट 8 4 के वक्र से उस कालावधि का संकेत मिलता है जिसके दौरान अल्बूकर्क न्यू मैक्सीको मे कारें खड़ी की गई और इसमे बहुत सी कारें थोड़े समय के लिए खड़ी की

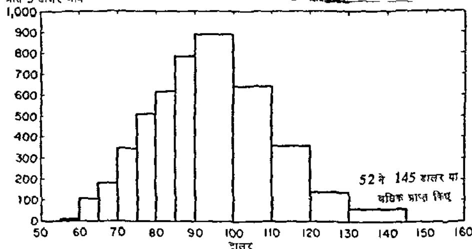


चार्ट 8 4 अल्बूकर्क, न्यू मैक्सीको मे मोटर गाड़ियों के खड़ा रहने का समय। आंकड़े स्वचालक सुरक्षा संस्था (फाउन्डेशन) से लिए हैं।

गई और प्राय थोडी सख्या मे लम्बी कालावधि के लिए खडी की गई दिखाई हैं। इस विशेषता वाले उल्टे J के रूप वाले वक्र कभी कभी मिल सकते हैं।

लेखाचित्री निरूपण जब वर्ग-अन्तराल असमान हो—कुछ बारंबारता बटनो के लिए वही वर्ग-अन्तराल बराबर बनाए रखना सभव नही है। सारणी 8 5 के बटन मे 5 00 डालर के आठ वर्ग 10.00 डालर के चार वर्ग, 15 00 डालर का एक वर्ग और अनिर्धारित चौडाई का एक वर्ग है। 5 00 डालर के वर्ग-अन्तरालो का बराबर प्रयोग किया जाना वाछनीय न हुआ होता क्योंकि उसके लिए 50.00 डालर से लेकर 145 00 डालर तक के परिसर के लिए 19 वर्गों की आवश्यकता हुई होती। इतने अधिक वर्ग उपयोगी नही हो सकते थे और इसमे श्रेणी के उच्च परिसरो के लिए आवश्यकता से अधिक विस्तृत विघटन होते। लगातार 10 00 डालर के वर्ग अन्तराल भी वाछनीय न हुए होते क्योंकि प्रति सप्ताह 90 00 डालर से कम आय वाले सचिवो के सम्बन्ध मे विस्तृत जानकारी नष्ट हो गई होती।

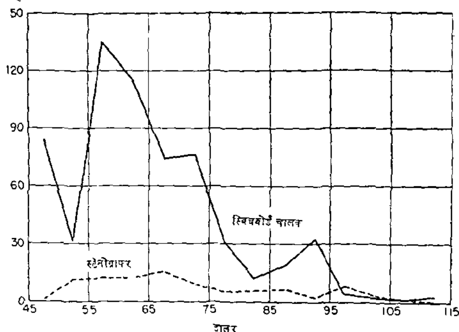
सारणी 8 5 के आँकडो का एक उचित चार्ट खीचने के लिए परिवर्तनशील वर्ग-अन्तरालो के लिए समजन करना आवश्यक है। वर्ग "90 00 डालर किन्तु 100.00 डालर से कम" अपने पूर्व के वर्गो से दुगना बडा है। हमे ज्ञात नही कि 1,796 सचिवो मे से कितनों ने प्रति सप्ताह 90 00 डालर किन्तु 95 00 डालर से कम कमाए और कितनो ने 95.00 डालर किन्तु 100 00 डालर प्रति सप्ताह से कम कमाए। परन्तु हम कह सकते है कि वर्ग "90 00 डालर किन्तु 100 00 डालर मे कम' के दो बराबर भागो मे से प्रत्येक मे औसत 898 सचिव थे। इस प्रकार के समजन सारणी 8 5 के अन्तिम स्तम्भ मे कर दिए गए हैं जहाँ बटन प्रति 5 00 डालर आय बनाए गए है। ये बारंबारता घनत्व हैं।



चार्ट 8 5 अक्तूबर 1964 मे बोस्टन, मैसाच्यूसेट्स मे 7,011 महिला सचिवो की औसत सामान्य समय साप्ताहिक आय के बारंबारता घनत्व। *आँकडे सारणी 8 5 से।*

सचिवो की आय के बटन का बारंबारता घनत्वो के रूप मे अब आलेखन किया जा सकता है, जैसा कि चार्ट 8 5 मे है। सारणी 8.5 मे अन्तिम वर्ग-अन्तराल के विस्तार का

अनुमान करना सभव नही है । अत उस वर्ग की बारबारताओ का कोई समजन नही किया गया है । चार्ट मे देखिए कि इन 52 सचिवो की उपस्थिति की ओर पाठक का ध्यान कैसे आकर्षित किया गया । वैकल्पिक तौर पर, बारबारता घनत्वो के आँकडो को स्तम्भ आरेख के स्थान पर वक्र द्वारा दिखाया जा सकता था और यह चार्ट 4 21 मे किया गया था । परन्तु स्तम्भ आरेख मे पाठक के लिए बदलते वर्ग विस्तार को नोट करना अधिक सरल हो जाता है ।



चार्ट 8 6 अक्तूबर 1964 मे वाशिंगटन, डी० सी० मे 619 स्विचबोर्ड चालको, वर्ग *B* तथा सिग्रक्स फाल्स, साउथ डेकोटा मे 90 सामान्य स्टेनोग्राफरो की औसत सामान्य समय साप्ताहिक आय । आकडे सारणी 8 7 मे ।

बारबारता बटनों की लेखाचित्रीय तुलना—सारणी 8 6 म दो बारबारता बटन दिखाए हैं, एक 619 वर्ग B स्विचबोर्ड चालको की सामान्य समय साप्ताहिक आय देता है, दूसरा 90 सामान्य स्टेनोग्राफरो की सामान्य समय साप्ताहिक आय प्रस्तुत करता है । दोनो श्रेणियाँ केवल महिलाओ के लिए हैं । यदि दोनो बटनो का महिलाओ की लगभग उसी सख्या से सम्बन्ध होता तो हम दो बारबारता वक्रो को उसी ग्रिड पर केवल आलेखित कर सकते थे और उनकी रूपरेखा का अध्ययन कर सकते थे । सारणी 8 6 की दो श्रेणियो के लिए ऐसा करने का परिणाम चार्ट 8 6 म दिखाया गया है । बहुत भिन्न निरपेक्ष आँकडो के कारण तुलना कोई विशेष स्पष्टीकरण करने वाली नही है । परन्तु यदि प्रत्येक बारबारता योग की प्रतिशतता के तौर पर, जिसका यह एक भाग है, व्यक्त की जाए तो हमारे पास प्रतिशतता बारबारता बटन आ जाते हैं जो सारणी 8 6 मे भी दिए गए हैं । दोनो प्रतिशतता

वारवारता बटनों के आलेखन से, जैसा कि चार्ट 8 7 मे है, हम दोनो श्रेणियो की लेखाचित्री विधि द्वारा तुलना करने के योग्य हो जाते है, जो विभिन्न मदो की सख्या के कारण जटिल नही रहती। सभी विभिन्न श्रेणियो का सापेक्ष महत्त्व अब तुरन्त देखा जा सकता है।

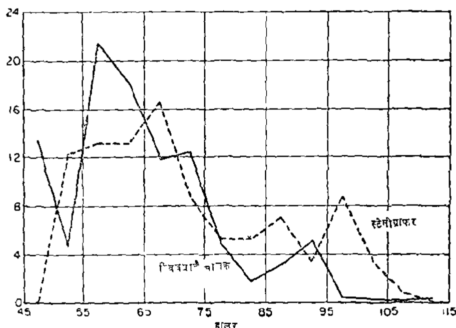
सारणी 8.6

अक्तूबर 1964 मे वाशिगटन, डी० सी०, मे 619 स्विच बोर्ड चालकों वर्ग *B*, और सिअक्स फाल्स, साउथ डेकोटा में 90 सामान्य स्टेनोग्राफरों की औसत सामान्य समय साप्ताहिक आय।

साप्ताहिक आय	सख्या		कुल का प्रतिशत	
	स्विच बोर्ड चालक	स्टेनो ग्राफर	स्विच बोर्ड चालक	स्टेनो-ग्राफर
45 डालर परन्तु 50 डालर से कम	84	0	13 6	0 0
50 डालर परन्तु 55 डालर से कम	31	11	5 0	12.2
55 डालर परन्तु 60 डालर से कम	135	12	21.8	13.3
60 डालर परन्तु 65 डालर से कम	115	12	18 6	13.3
65 डालर परन्तु 70 डालर से कम	73	15	11 8	16 7
70 डालर परन्तु 75 डालर से कम	77	8	12 4	8.9
75 डालर परन्तु 80 डालर से कम	31	5	5.0	5.6
80 डालर परन्तु 85 डालर से कम	13	5	2.1	5.6
85 डालर परन्तु 90 डालर से कम	18	7	2.9	7.8
90 डालर परन्तु 95 डालर से कम	32	3	5.2	3 3
95 डालर परन्तु 100 डालर से कम	4	8	0.6	8 9
100 डालर परन्तु 105 डालर से कम	2	3	0.3	3 3
105 डालर परन्तु 110 डालर से कम	1	1	0.2	1 1
110 डालर परन्तु 115 डालर से कम	3	0	0.5	0 0
योग	619	90	100 0	100 0

आंकडे सयुक्त राज्य श्रम सांख्यिकी ब्यूरो, आकूपेशनल वेज सर्वे, वाशिगटन डी०सी०—मेरीलैंड—वर्जीनिया, दिसम्बर 1964, पृष्ठ 7, तथा आकूपेशनल वेज सर्वे सिअक्स फाल्स, साउथ डेकोटा, दिसम्बर 1964, पृष्ठ 3 से।

सारणी 8.6 की दो श्रेणियो की तुलना सरल हो गई थी क्योकि वर्ग-अन्तराल समान थे। यदि समान इकाइयो मे व्यक्त किन्तु भिन्न वर्ग अन्तरालो वाली दो श्रेणियो की लेखाचित्री तुलना करनी है, तो हम वारवारता घनत्वो का प्रति इकाई आलेखन कर सकते हैं (अर्थात् प्रति डालर, प्रति पाउंड या जो कुछ भी इकाई हो)। यदि दो श्रेणियो मे मदो की सख्या के सम्बन्ध मे भी पर्याप्त भिन्नता है तो प्रतिशतता वारवारताओ की सगणना करके और प्रतिशतता वारवारताओ को वारवारता घनत्वो के तौर पर व्यक्त करके दोनो वक्रो के नीचे का क्षेत्रफल एकसमान बनाया जा सकता है।

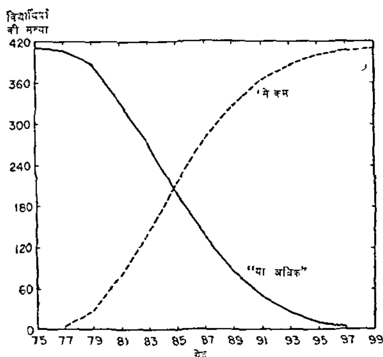


चार्ट 8 7 अक्तूबर 1964 वाशिंगटन, डी० सी० मे 619 स्विचबोर्ड चालको वर्ग *B* तथा सिआक्स फाल्स साउथ डेकोटा मे 90 सामान्य स्टेनोग्राफरो की औसत सामान्य समय साप्ताहिक आय के प्रतिशतता बटन। *आकड़ सारणी 8 6 से।*

सारणी 8 7

रूजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातकों के ग्रेडों के संचयी बटन

ग्रेड	विद्यार्थियो की सख्या जिनके ग्रेड		विद्यार्थियो का प्रतिशत जिनके ग्रेड	
	प्रत्येक वग की ऊपरी सीमा से कम थे	प्रत्येक श्रेणी की निचली सीमा के बराबर या उससे अधिक थे	प्रत्येक वर्ग की ऊपरी सीमा से कम थे	प्रत्येक वर्ग की निचली सीमा के बराबर या उससे अधिक थे
75 0—76 9	3	409	0 7	100 0
77 0—78 9	26	406	6 4	99 3
79 0—80 9	78	383	19 1	93 6
81 0—82 9	139	331	34 0	80 9
83 0—84 9	213	270	52 1	66 0
85 0—86 9	274	196	67 0	47 9
87 0—88 9	327	135	80 0	33 0
89 0—90 9	362	82	88 5	20 0
91 0—92 9	385	47	94 1	11 5
93 0—94 9	400	24	97 8	5 9
95 0—96 9	407	9	99 5	3 2
97 0—98 9	409	2	100 0	0 5



चार्ट 8.8 टैक्सस स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातकों के ग्रेडों के संचयी बंटन। सारणी 8.7 के आँकड़े।

समय-समय पर हम चाहते हैं कि दो श्रेणियों में मदों की संख्या के बीच के अन्तर स्पष्ट हों जैसा कि चार्ट 24.1—24.4 में है, और ऐसी स्थिति में हम प्रतिशतता बारंबारताओं का प्रयोग नहीं करते। परन्तु आवश्यकता होने पर बारंबारता घनत्वों का प्रयोग किया जाएगा, जैसा कि चार्ट 24.1, 24.3 तथा 24.4 के में है।

जब दो बारंबारता बंटनों को भिन्न इकाइयों के रूप में व्यक्त किया जाता है (डालरों, पाउंडों, इंचों, इत्यादि में) तो सीधी लेखाचित्री तुलना संभव नहीं है, क्योंकि ऐसा कोई सरल मार्ग नहीं है जिसमें X पैमानों का एक दूसरे से समंजन किया जा सके। विशिष्ट परिकलित मूल्यों का, जिनका बाद में विवेचन किया जाएगा, प्रभावपूर्ण संख्यात्मक तुलना प्राप्ति के लिए प्रयोग किया जा सकता है।

संचयी बारंबारता बंटन और तोरण—सारणी 8.3 के आँकड़ों में बारंबारता बंटन का सामान्य (असंचयी) रूप दिखाया गया है और उनसे हम प्रत्येक वर्ग में आने वाले विद्यार्थियों की संख्या निश्चित करने के योग्य हो जाते हैं। परन्तु कभी-कभी यह जानना उपयोगी हो सकता है कि *कितने विद्यार्थियों ने या विद्यार्थियों की औसत ने विशेष बताए* ग्रेडों से कम प्राप्त किए, अथवा कितने विद्यार्थियों या विद्यार्थियों की किस औसत ने विशिष्ट ग्रेड या उससे अधिक प्राप्त किए। यह जानकारी सारणी 8.7 के समान एक संचयी सारणी में स्पष्ट तौर पर देखी जा सकती है। इस सारणी में सारणी 8.3 की बारंबारताएँ "अपेक्षाकृत कम" आधार पर और साथ ही "अथवा अधिक" आधार पर संचित की गई हैं।

जब सचयी बारबारता बटन बनाए जाते है तो बारबारताओ का उचित वर्ग सीमाओ के सामने आलेखन किया जाता है जिसके परिणामस्वरूप चार्ट 8 8 मे प्रदर्शित वक्र के समान वक्र आते है। ऐसे वक्र तोरण कहलाते है।

सचयी बारबारता सारणियो और तोरणो का प्राय मजदूरी और काम के घण्टो के आँकडे प्रस्तुत करने के लिए प्रयोग किया जाता है। मजदूरी के सकेत से वे हमे यह सुनिश्चित करने योग्य बनाते है कि एक समूह मे से कितनो को (अथवा किस अनुपात को) निर्वाह स्तर से कम, मानक स्तर या सुविधा स्तर प्राप्त होता है। इसी प्रकार हम निर्वाह स्तर या अधिक, मानक स्तर या अधिक, और सुविधा स्तर या अधिक प्राप्त करने वाली सख्या या अनुपात को सुनिश्चित कर सकते हैं। यह सुनिश्चित करना भी सभव है कि कर्मकारो मे से न्यूनतम (या अधिकतम) प्राप्त करने वाले 10, 25, 50 या अन्य प्रतिशत क्या मजदूरी प्राप्त कर रहे है। काम के घण्टो के सबध मे हम असाधारण तौर पर अधिक या कम घण्टे काम करने वाली सख्या या अनुपात को शीघ्रता से देख सकते हैं।

यदि दो सचयी बारबारता बटन लगभग एकसमान मद सख्या पर निर्भर करते है तो उनके तोरणो को बनाया और उनकी निरपेक्ष रूप मे तुलना की जा सकती है। परन्तु यदि दो श्रेणियाँ भिन्न योगो पर निर्भर करती है तो तुलना का प्रतिशतता बारबारताओ पर आधारित करना आवश्यक है जैसाकि असचयी रूप मे दो बारबारता बटनो की तुलना करते समय होता है जिसका कि पहले विवेचन किया गया।

9

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

हम देख चुके है कि एक वारवारता बटन का कैसे निर्माण किया जाए और एक वारवारता वक्र किस प्रकार खीचा जाए। वर्गीकृत आँकडो से या चार्ट से यह स्पष्ट है कि कुछ मल्य ऐसे हैं जो बहुलता से विद्यमान होते है और कुछ अन्य ऐसे होते हैं जो कम बहुलता से उत्पन्न होते हैं। अधिकतर वक्र जो हमारे सामने आते है बहुत मोटे तौर पर घटी नुमा प्रकार के है जैसा कि चार्ट 8 1, 8 2, तथा 8 3 म दिखाया गया है। इस प्रकार *की श्रेणियों के लिए जिनका ये चार्ट प्रतिनिधित्व करते है यह स्पष्ट है कि अधिक लाक्षणिक* मूल्य बटनो के केन्द्रीय भाग मे है। अत हम मानो को पहचानने के लिए, जिनका एक *वारवारता बटन के इस पक्ष का स्वरूप दिखाने की चेष्टा मे परिकलन किया जा सकता है,* केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप शब्दावली का प्रयोग करते हैं। इस अध्याय मे हम समातर माध्य, माध्यिका, वहुलक, और सक्षेप मे गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य का विवरण देंगे।

अगले अध्याय मे हम प्रसार के मापो पर, जो एक बटन के फैलाव का सकेत करते हैं, तिरछेपन के मापो पर जो असममिति की दिशा और मात्रा को मापते है, तथा ककुदता के मापो पर जिनसे श्रेणी के "शिखरत्व" के अश का सकेत मिलता है, विचार करेंगे।

समान्तर माध्य

असमूहित आकडो से समान्तर माध्य—समान्तर माध्य ऐसे लगातार दैनिक प्रयोग मे है कि लगभग हम सभी इस प्रत्यय से परिचित है। कभी-कभी समान्तर माध्य को हम केवल "औसत" या "माध्य" कहते हैं, परन्तु जब हम गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य या किसी अन्य कम सामान्य माध्य की बात करते हैं तो सदा उचित विशेषण का प्रयोग करते है।

मदो की एक श्रेणी का समान्तर माध्य मदो के मूल्यो को जोड कर और मदो की सख्या से भाग करके प्राप्त किया जाता है। कल्पना कीजिए कि किसी छोटे नगर मे गाजर 8 सेन्ट, 10 सेन्ट, 11 सेन्ट, तथा 12 सेन्ट प्रति पाउड बिक रही है। इन चार अको का समान्तर माध्य

$$\frac{8 \text{ सेन्ट} + 10 \text{ सेन्ट} + 11 \text{ सेन्ट} + 12 \text{ सेन्ट}}{4} = \frac{41 \text{ सेन्ट}}{4} = 10\ 25 \text{ सेन्ट}$$

के द्वारा दिया जाएगा। यदि हम X_1, X_2, X_3, इत्यादि द्वारा विभिन्न मूल्यो को विभिन्न मूल्यो का सकेत करने दें, N को मदो की सख्या की ओर सकेत करने दें तथा $\bar{X}$ को समान्तर माध्य को व्यक्त करने दें तो हम

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \quad + X_N}{N}$$

प्राप्त करते है। अथवा, अधिक सक्षेप मे, सकलन सकेत Σ, का प्रयोग करके हम कह सकते है

$$X = \frac{\Sigma X}{N}$$

समान्तर माध्य की पूर्व की सगणना मे इस तथ्य का कोई विचार नही आया कि विभिन्न मूल्यो पर विभिन्न मात्राओ मे गाजरें बेची गई हो सकती है। जब इस प्रकार से समान्तर माध्य का परिकलन किया गया है तो इसे *साधारण* समान्तर माध्य कहा जा सकता है। इस माध्य को अभारित समातर माध्य कहना ठीक नही है क्योकि प्रत्येक मूल्य समान रूप से भारित था। इस तथ्य का विचार करके कि 10,000 पाउड गाजरे 8 सेन्ट पर, 8,000 पाउड 10 सेन्ट पर, 4,000 पाउड 11 सेन्ट पर, और 1,000 पाउड 12 सेन्ट पर बेची गई, आइए हम उचित प्रकार से भारित समान्तर माध्य का परिकलन करे। अब हमारे पास

$$X = \frac{(10{,}000 \times 8 \text{ सेन्ट}) + (8{,}000 \times 10 \text{ सेन्ट}) + (4{,}000 \times 11 \text{ सेन्ट}) + (1{,}000 + 12 \text{ सेन्ट})}{23{,}000}$$

$$= \frac{2{,}16{,}000 \text{ सेन्ट}}{23{,}000} = 9\ 39 \text{ सेन्ट}$$

आता है। यदि प्रत्येक औसत किए जाने वाले मूल्य से सबधित सख्याओ या बारबारताओ को दिखाने के लिए हम f_1, f_2, f_3, इत्यादि सकेतो का प्रयोग करे तो हमारे पास

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3 + }{f_1 + f_2 + f_3 +} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N}$$

आता है। साधारणतया एक समान्तर माध्य को भारित समातर माध्य समझा जाता है, जैसा कि अभी-अभी वर्णन किया गया है, जब तक अन्यथा उल्लिखित न किया जाए।

यह ध्यान मे रखना चाहिए कि यद्यपि गाजरो का समान्तर माध्य मूल्य 9 39 सेन्ट प्रति पाउड है, वास्तव मे प्रति पाउड ठीक इस मूल्य पर कोई गाजरें नहीं बेची गई। अत समान्तर माध्य को आवश्यक तौर पर एक परिकलित मूल्य समझना चाहिए, वास्तव मे विद्यमान मूल्य नही।

समान्तर माध्य के गुणधर्म—समातर माध्य का एक महत्त्वपूर्ण गुण यह है कि माध्य से विभिन्न मूल्यों के विचलनो का बीजीय योग शून्य के समान होता है। यह महत्त्वपूर्ण है क्योंकि इससे हम X के परिकलन की विधि का विकास करने के योग्य हो जाएँगे जिससे बारबारता बटन से व्यवहार करते समय हमारा बहुत सा समय बच जाएगा। आइए हम पाँच मूल्यों 6, 8, 9, 11, 14 की एक श्रेणी पर विचार करें जिनमे से प्रत्येक केवल एक बार आता है

$$X = \frac{6 + 8 + 9 + 11 + 14}{5} = \frac{48}{5} = 9\ 6$$

आइए, अब हम समातर माध्य से प्रत्येक मूल्य के विचलन का परिकलन करें,

$x_1 = X_1 - \bar{X}$, $x_2 = X_2 - \bar{X}$, $x_3 = X_3 - \bar{X}$, इत्यादि। हमारे पास

X	x
6	—3 6
8	—1 6
9	—0 6
11	+1 4
14	+4 4

आते हैं। आप यह देखेंगे कि $\Sigma x = 0$, यह मूल्यों की किसी श्रेणी के लिए भी सदा सत्य है।[1]

यदि हम किसी निर्दिष्ट मूल्य मे जो समातर माध्य नही है पांच मदो के d विचलनो का परिकलन करें तो इन विचलनो का योग Σd शून्य के समान नहीं होगा। यदि निर्दिष्ट मूल्य समान्तर माध्य से कम है तो बहुत अधिक धनात्मक विचलन होगे और विचलनो का योग शून्य से अधिक होगा। यदि निर्दिष्ट मूल्य समातर माध्य से अधिक है तो बहुत अधिक ऋणात्मक विचलन होगे और विचलनो का योग एक ऋणात्मक मात्रा होगी। क्योकि पांच (N) मदो मे से प्रत्येक की एक निर्दिष्ट सख्या से, जो सही माध्य नही है, तुलना की गई है, तो विचलनो का योग उतनी मात्रा से शून्य के समान होने मे असफल रहेगा जो उस मात्रा का ठीक पांच (N) गुना है जिसमे निर्दिष्ट मूल्य वास्तविक समातर माध्य से विचलित होता है। अत इस निर्दिष्ट मूल्य से विचलनो का निर्धारण करने के लिए किसी मूल्य को कल्पित माध्य X_d के तौर पर निर्दिष्ट करना, तथा (बीजत) आवश्यक सशोधन $\frac{\Sigma d}{N}$ को जोड कर समातर माध्य[2] प्राप्त करना सभव है। इस विधि का सारणी 9 1 मे चित्रण है जहाँ $\bar{X}_d$ को 9 लिया गया है। यहाँ यह देखा गया है कि $\Sigma d = +3$ यदि हम इस अक को N से भाग करे तो हम देखते है कि X_d, 0 6 से बहुत छोटा था। यह

$$\frac{\Sigma d}{N} = \frac{+3}{5} = 0\,6$$

द्वारा प्राप्त होता है। यह कल्पित माध्य मे जोडा जाने वाला सशोधन है, इस प्रकार,

$$X = \bar{X}_d + \frac{\Sigma d}{N} = 9 + \frac{3}{5} = 9\,6$$

जो मूल्यो को जोड कर तथा 5 से भाग करने पर परिकलित $\bar{X}$ से ठीक मिलता है।

---

1. परिशिष्ट ध, परिच्छेद 9 1 देखिए। यदि $\Sigma x = 0$, तो यह स्पष्ट है कि $\frac{\Sigma x}{N} = 0$.

$\frac{\Sigma x}{N}$ को "माध्य के विषय मे प्रथम घूर्ण" या केवल "प्रथम घूर्ण" कहते हैं। अगले अध्याय मे हमे द्वितीय घूर्ण $\frac{\Sigma x^2}{N}$, या तृतीय घूर्ण केवल $\frac{\Sigma x^3}{N}$, तथा चतुर्थ घूर्ण $\frac{\Sigma x^4}{N}$ पर विचार करने का अवसर आएगा।

2 परिशिष्ट ध, परिच्छेद 9 2 देखिए।

सारणी 9.1

कल्पित माध्य, $\bar{X}d=9$, के प्रयोग से समांतर माध्य, $\bar{X}$, की गणना

X	d
6	−3
8	−1
9	0
11	+2
14	+5
	+3

$\Sigma d=+3$

$$\bar{X}=\bar{X}_d+\frac{\Sigma d}{N}$$

$$=9+\frac{3}{5}=9\ 6.$$

पूर्ववर्णित उदाहरण में $\bar{X}_d$, $\bar{X}$ से कम था। कल्पना कीजिए कि हम $\bar{X}_d$ को 13 चुनते है। परिकलन सारणी 9 2 में दिखाए गए है।

सारणी 9 2

कल्पित माध्य, $\bar{X}_d=13$, के प्रयोग से समांतर माध्य, $\bar{X}$ की गणना,

X	d
6	−7
8	−5
9	−4
11	−2
14	+1
	−17

$\Sigma_d=-17$

$$\bar{X}=\bar{X}_d+\frac{\Sigma d}{N}$$

$$=13+\frac{-17}{5}=9.6$$

इस स्थिति मे, $\bar{X}_d$, $\bar{X}$ से बडा था जैसा कि $\frac{\Sigma d}{N}=\frac{-17}{5}=-3\ 4$ द्वारा दिखाया गया है। पहले के समान, परिणाम है, $\bar{X}=13-3\ 4=9\ 6$

समानर माध्य का एक दूसरा गुण, जिसका बाद मे आने वाले विवरणो के सबध मे महत्त्व है, यह है कि *वर्गांकित विचलनों*, Σx^2, *का योग, उस समय कम है जब विचलन* $\bar{X}$ के आसपास लिए जाते हैं अपेक्षाकृत उस समय के जब वे किसी अन्य मूल्य के आसपास लिए जाएँ। यह परिशिष्ट घ, परिच्छेद 10.1 मे प्रदर्शित है।

समूहित आंकडो से समातर माध्य दीर्घ विधि—सारणी 9 3 मे विद्यार्थियो के ग्रेडो बटन दिखाया गया है और श्रेणी के लिए $\bar{X}$ का मूल्य सुनिश्चित करना वाछित है। बारबारता बटन पर विचार करते समय हमारे पास साधारणत वे मौलिक आंकडे नहीं होते जिनसे बारबारता बटन बना था। जब हमारे पास अवर्गीकृत आंकडे है (जैसा कि सारणी 8 1 मे है), तो हम मूल्यो को जोड कर और मदो की सख्या से भाग करके समानर *माध्य का मूल्य बिल्कुल सही प्राप्त कर सकते हैं। हमारे पास जब केवल बारबारता बटन* है तो हमारे लिए वर्गित आंकडो से माध्य की सगणना करना आवश्यक है। आइए, हम सारणी 9 3 के बारबारता बटन के लिए $\bar{X}$ का परिकलन करें और तब अवर्गीकृत आंकडो से परिकलित समातर माध्य के साथ अपने निष्कर्ष की तुलना करे।

बारबारता बटन से समानर माध्य का परिकलन करते समय हम प्रत्येक वर्ग का मध्य मूल्य (जिसे कभी-कभी वर्ग चिन्ह कहा जाता है) उस वर्ग के प्रतिनिधि के तौर पर लेने

हैं, विभिन्न मध्य-मूल्यो को उनके अनुरूप बारबारताओं से गुणा करते है, इन गुणनफलो को जोडते हैं और मदो की कुल सख्या से भाग करते है। सकतात्मक दृष्टि से, यदि X_1, X_2, X_3, मध्य मूल्यो का और f_1 f_2 f_3 . बारबारताओं का प्रतिनिधित्व करते हैं, तब

$$\bar{X}=\frac{f_1X_1+f_2X_2+f_3X_3+ \cdot}{f_1+f_2+f_3+}=\frac{\Sigma fX}{\Sigma f}=\frac{\Sigma fX}{N}$$

एक वर्ग का मध्य-मूल्य उस वर्ग की ऊपरी और निचली सीमाओं को जोडकर तथा 2 से भाग करके प्राप्त किया जाता है। प्रत्येक बारबारता बटन के लिए हमें ध्यानपूर्वक विचार करना चाहिए कि वे सीमाएँ क्या है। सारणी 9 3 के बटन के लिए हम प्रथम वर्ग की सीमाएँ 75 0 और 77 0 ले सकते हैं जिससे मध्य-मूल्य 76 0 आता है। यदि प्रत्येक स्तर को अन्तिम पूर्ण दसवें भाग तक पूर्णांकित किया हो तो यह सही होगा, ताकि 75 0 म ठीक 75 से 75 099 , तक के परिसर के मूल्य सम्मिलित हो, 76 1 मे ठीक 76 1 से 76 199 तक के मूल्य आएँगे इत्यादि, बजाय निकटतम दसवें भाग तक पूर्णांकित

सारणी 9.3

रुजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातको के ग्रेडो के लिए व्यजक $X=\frac{\Sigma fX}{N}$ के प्रयोग द्वारा समान्तर माध्य की सगणना

ग्रेड	विद्यार्थियो की सख्या f	वर्ग X का मध्य मूल्य	fX
75 0—76 9	3	75 95	227.85
77 0—78 9	23	77 95	1,792 85
79 0—80 9	52	79 95	4,157 40
81 0—82 9	61	81.95	4,998 95
83 0—84 9	74	83 95	6,212 30
85 0—86 9	61	85 95	5,242 95
87 0—88.9	53	87 95	4,661 35
89 0—90 9	35	89 95	3,148 25
91 0—92 9	23	91 95	2,114 85
93 0—94 9	15	93 95	1,409 25
95 0—96.9	7	95 95	671 65
97 0—98 9	2	97 95	195 90
योग	409	...	34,833 55

$$\bar{X}=\frac{\Sigma fX}{N}=\frac{34,833\ 55}{409}=85\ 17$$

किए जाने के जैसा कि वास्तव मे किया गया। यदि पूर्णांकन अन्तिम पूर्ण दसवें भाग तक होता तो वर्ग को "75 तथा 77 से कम" नामाकित किया जाना चाहिए था। क्योकि हम एक सतत चर पर विचार कर रहे हैं, ऐसे वर्ग की सीमाएँ 75 और 77 होगी और मध्य-मूल्य 76। विद्यार्थियो के ग्रेडो के लिए पूर्णांकन निकटतम दसवें भाग तक था और निम्नतम

मूल्य जो वर्ग "75 0—76 9" में आ सकता था 74 95 है जब कि उच्चतम मूल्य 76 9499.. है। इस प्रकार क्योंकि चर सतत है, वर्ग सीमाएँ 74 95 तथा 76 95 हैं और मध्य-मूल्य 75.95 है। मध्य-मूल्य इस विधि के अनुसार सारणी 9 3 में दर्ज किए गए हैं।

जब एक वर्ग को (उदाहरणार्थ) "32 00—33 99" नामांकित किया जाता है तो मध्य-मूल्य वास्तव में 32 995 है। परन्तु बहुत से सांख्यिकी विद् मध्य मूल्य 33 00 बताएँगे क्योंकि सापेक्ष भ्रमगति छोटी है। बारबारता बटन के लिए मध्य-मूल्य निर्धारण करने में यह जानना महत्त्वपूर्ण है कि पाठ्यांक कैसे पूर्णांकित किए गए थे। जब बारबारता बटन के सबध में पूर्णांकन के बारे में कोई सूचना नहीं दी गई तो सभवत यह कल्पना करना सर्वोत्तम है कि अंकों का, दी हुई निकटतम इकाई तक, पूर्णांकन किया गया था। उदाहरण के लिए, यदि एक-इंच वर्ग "12 0—12 9 इंच" लिखा गया है तो सीमाएँ 11 95 और 12 95 इंच समझिए, यदि एक पाँच-पाउंड वर्ग 10—14 पाउंड लिखा गया है तो सीमाएँ 9 5 और 14 5 पाउंड मानिए। परन्तु विविक्त आँकड़ों के लिए एक दो-डालर वर्ग "10 00 डालर—11 00 डालर" की सीमाएँ 10 00 डालर तथा 11 99 डालर हैं और एक दस-डालर वर्ग "70 डालर—79 डालर" की सीमाएँ 70 डालर और 79 डालर हैं यदि आँकड़े केवल पूर्ण डालरों में दिए जाएँ। एक वर्ग ' 5 पाउंड परन्तु 10 पाउंड से कम" नहीं लिखा जाना चाहिए जब तक कि हमारा बिल्कुल वही अर्थ न हो जो कि हम कहते हैं, अर्थात् इस वर्ग में भेद 5 पाउंड से नीचे नहीं गिरता और 10 पाउंड के बराबर नहीं होता। यदि विद्यार्थियों के ग्रेडों के वर्ग 75 0—77 0, 77 0—79 0, इत्यादि लिखे जाते और यदि एक वर्ग सीमा पर आने वाले मामलों के दो वर्गों के बीच बाँटा जाता, जैसा कि अध्याय 8 में नोट किया गया था, तो मध्य-मूल्य 76 0, 78 0 इत्यादि होंगे।

विद्यार्थियों के ग्रेडों के लिए मध्य-मूल्यों पर विचार करके, जैसा कि ऊपर विवरण दिया गया है, और व्यंजक $\bar{X}=\frac{\Sigma fX}{N}$, का प्रयोग करके, हम देखते हैं कि समांतर माध्य 85 17 है, जैसाकि सारणी 9 3 के नीचे दिखाया है। सारणी 8 1 के अवर्गीकृत आँकड़ों से, आइए, हम यह देखने के लिए कि अभी प्राप्त अंक उस मूल्य से कितना अधिक मिलता है। $\bar{X}$ के मूल्य का परिकलन करें यदि हम सब अलग-अलग ग्रेडों का योग करें और 409 से भाग करें तो हमारे पास निम्नलिखित आ जाता है

$$\bar{X}=\frac{34,828\ 1}{409}=85\ 15$$

$\bar{X}$ के दो मूल्य थोड़े से भिन्न हैं। उनका समरूप होना असामान्य है परन्तु हम साधारणतया यह समझ सकते हैं कि अन्तर कुछ प्रतिशत से अधिक नहीं होगा। एक बारबारता बटन से परिकलित समांतर माध्य का मूल्य साधारणतया अवर्गीकृत आंकड़ों से लिए समांतर माध्य के साथ निकट से मिलता-जुलता होगा, यदि चर सतत है और बटन सममित है। यदि (1) बटन तिरछा है अथवा यदि (2) चर विविक्त (असतत) है (अथवा यदि आँकड़े टूटे हुए हैं) अथवा यदि दोनों (1) और (2) सत्य है तो अनुरूपता कम निकट होगी। इसी प्रकार, यदि आँकड़ों में अनियमितताएँ हैं क्योंकि बहुत ही छोटे प्रतिदर्श का प्रयोग किया गया था तो निकट की अनुरूपता की आशा नहीं की जा सकती।

जब भी $\bar{X}$ के दो मूल्यों में अनुरूपता का अभाव विद्यमान है तो यह मध्य मूल्य परिकल्पनाओं की अपर्याप्तता के कारण है। यह लगभग सदा सत्य है कि मध्य-मूल्यों में से

कोई भी वास्तव मे अपने वर्ग का सही सकेन्द्रण बिन्दु नहीं है। अधिकतम बारबारता के समूह के बाईं ओर के समूहों के लिए, एक समूह का मध्य-मूल्य प्राय उस समूह के माध्य से कम है, जब कि अधिकतम बारबारता के समूह के दाईं ओर के समूहों के लिए, एक समूह का मध्य-मूल्य प्राय उस समूह के माध्य से बड़ा है। यद्यपि सभी मध्य-मूल्य परिकल्पनाएँ प्राय अशुद्ध होती हैं, अशुद्धियों मे एक-दूसरे को समाप्त करने की एक निश्चित प्रकृति होती है, यदि बटन लगभग, सममित है। उदार कला छात्रों के ग्रेडों के आंकड़ों के लिए हमारे पास से अवर्गीकृत आँकड़े हैं जिनसे बारबारता बटन बनाया गया था और हम प्रत्येक वर्ग के लिए समातर माध्य का परिकलन कर सकते हैं और वर्ग माध्यों और वर्ग मध्य मूल्यों की तुलना कर सकते हैं। यह सारणी 9 4 मे किया गया है जहा यह देखा जा सकता है कि प्रथम 5 वर्गों मे से 3 के लिए प्रत्येक वर्ग का मध्य-मूल्य वर्ग माध्यों से कम है। परन्तु

सारणी 9.4

उदार कला छात्रों के ग्रेडों के लिए वर्ग मध्य-मूल्यों की प्रत्येक वर्ग के समातर माध्य से तुलना

ग्रेड	विद्यार्थियों की सख्या	प्रत्येक वर्ग मे कुल ग्रेड (सारणी 8 4 से)	प्रत्येक वर्ग के लिए समातर माध्य	प्रत्येक वर्ग का मध्य-मूल्य
75 0—76 9	3	230 3	76 77	75 95
77 0—78 9	23	1,799 9	78 26	77 95
79 0—80 9	52	4,158 2	79 97	79 95
81 0—82 9	61	4,994 1	81 87	81 95
83 0—84 9	74	6,204 5	83 84	83 95
85 0—84 9	61	5,243 3	85 96	85 95
87 0—86 9	53	4,657 2	87 87	87 95
89 0—90.9	35	3,150 0	99 00	89 95
91 0—92 9	23	2,113 1	91 87	91 95
93 0—94 9	15	1,409 4	93 96	93 95
95 0—96 9	7	672 3	96 04	95 95
97 0—98 9	2	195 8	97 90	97 95
योग	409	34,828 1	85 15	..

अन्तिम 6 वर्गों के लिए 3 मध्य-मूल्य अपने वर्ग माध्यों से अधिक है और तीन मध्य-मूल्य अपने वर्ग माध्यों से कम हैं।

समूहित आंकड़ों से समातर माध्य लघु विधियां—सारणी 9 1 तथा 9 2 मे यह दिखाया गया था कि समातर माध्य के लिए हम एक मूल्य $\bar{X}_a$ की परिकल्पना कर सकते थे और इस तथ्य का प्रयोग करके कि $\Sigma x=0, \bar{X}$ प्राप्त करने के लिए आवश्यक सशोधन का परिकलन कर सकते थे। इस विधि के द्वारा बारबारता बटन से माध्य का परिकलन करने मे लगने वाला हमारा बहुत सा समय बच जाएगा। $\bar{X}$ के लिए व्यजक पहले के समान

हैं, सिवाय इसके कि विभिन्न वर्गों मे बारबारताम्रो के कारण संकेत f का पुन: समावेश किया गया है। इस प्रकार

$$\bar{X}=X_d+\frac{\Sigma fd}{N}$$

X_d के लिए चुना हुआ मूल्य किसी वर्ग का मध्य-मूल्य हो सकता है। सारणी 9 5 मे $\bar{X}_d$ को पचम वर्ग के मध्य-मूल्य के तौर पर लिया गया है और सारणी के नीचे के परिकलनो से दिखाई देता है कि $\bar{X}=85\ 17$ वही है जैसा कि सारणी 9 3 की लम्बी विधि से प्राप्त हुआ था।

सारणी 9 5

रूजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातको के ग्रेडों के लिए व्यंजक

$$\bar{X}=X_d+\frac{\Sigma fd}{N}$$

का प्रयोग करके समातर माध्य की सगणना

ग्रेड	विद्यार्थियों की सख्या f	d	fd	
75 0—76 9	3	− 8	− 24	
77 0—78 9	22	− 6	−138	
79 0—80 9	52	− 4	−208	
81 0—82 9	61	− 2	−122	−492
83 0—84 9	74	0		
85 0—86 9	61	+ 2	+122	
87 0—88 9	53	+ 4	+212	
89 0—90 9	35	+ 6	+210	
91 0—92 ,	23	+ 8	+184	
93 0—94 9	15	+10	+150	
95 0—96 9	7	+12	+ 84	
97 0—98 9	2	+14	+ 28	+990
				+498
योग	409	...		

$$\bar{X}=\bar{X}_d+\frac{\Sigma fd'}{N}=83\ 95+\frac{498}{409},$$
$$=83.95+1\ 218,$$
$$=85\ 17.$$

हम यह देखेंगे कि सारणी 9 5 के सब वर्ग एक समान विस्तार वाले हैं। जब यह सत्य है तो $\bar{X}_d$ से अपने विचलन वर्ग अन्तरालों, d, के रूप मे लेकर हम λ के अपने परि-

कलन को और भी छोटा कर सकते हैं। यह एक ऐसी विधि है जिसे कभी-कभी "सकेतीकरण" कहते हैं। हमारा सशोधन $\frac{\Sigma fd'}{N}$ तब वर्ग-अन्तरालो के रूप म होगा और इसका X_d के साथ बीजीय जोड करने से पूर्व इसे वर्ग-अन्तराल *i* से गुणा करना आवश्यक है। तब समान्तर माध्य के लिए,

$$\bar{X} = \bar{X}_d + \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right) i$$

इस व्यजक से $\bar{X}$ का सकलन सारणी 9 6 मे दिखाया गया है और इसका वही परिणाम है जो कि सारणी 9 3 और 9 5 मे दिया गया है। जब वारवारता बटन समान वर्ग-अन्तरालो से बना हुआ है तो इस विधि का सर्वदा प्रयोग करना चाहिए। वारवारता बटन म जितने अधिक वर्गों को और जितनी अधिक मदो का समावेश हुआ है उतना ही अधिक समय इस विधि से बच जाता है।

असमान वर्ग-अन्तरालो वाले समूहित आँकडों से समान्तर माध्यम—असमान वर्ग-अन्तरालो वाले वारवारता बटन के लिए सारणी 9 6 मे दिखाई गई विधि से $\bar{X}$ का परिकलन अनुपयुक्त होगा क्योंकि इसमें *d'* के आशिक मूल्य आएँगे। उचित प्रविधि वह है जो सारणी 9 3 म दिखाई गई है या सारणी 9 5 मे है। जब वर्गों के विस्तार मे भिन्नता है तो बटन निरपवाद रूप से तिरछा है और हमे स्मरण रखना आवश्यक है कि जैसे तिरछापन बढता है हमारी मध्य-मूल्य परिकल्पनाएँ एक दूसरी को कम निकटता से प्रतिसन्तुलित करती हैं। इस प्रकार असमान वर्ग-अन्तरालो वाले वारवारता बटन से परिकलित माध्य अवर्गित आँकडों से परिकलित माध्य से काफी भिन्न हो सकता है, साथ ही, जैसा कि इस अध्याय के अन्त म विवेचन किया जाएगा, निश्चित तौर पर तिरछे बटन के समान्तर माध्य की सीमित उपयोगिता है। जब सारणी 8 5 वाले के समान एक वारवारता बटन की एक सिरे पर (अथवा, यदा-कदा दोनों सिरों पर) अपरिमित विस्तार वाला वर्ग है तो उस मूल्य का कोई सकेत नही है जो वर्ग के प्रतिनिधि के तौर पर चुना जाना चाहिए। यदि यह कल्पना की जाती है कि अपरिमित वर्ग का वही विस्तार है जो कि इससे पहले का है तो मध्य-मूल्य प्राय बहुत कम होगा। ऐसे मध्य-मूल्य के प्रयोग का, पूर्व के मध्य-मूल्यो के ऊपर की ओर के झुकाव को प्रतिसन्तुलित करने म परिणाम हो सकता है परन्तु हम कभी-कभी असदिग्ध नही हो सकते कि कितना, प्रतिसन्तुलन होता है या कि झुकाव ही अतिसतुलित नही हो जाता। एक वर्ग अपरिचित क्यो छोडा जाता है इसका कारण प्राय यह है, क्योंकि इसमे कुछ मदें विस्तृत क्षेत्र पर बिखरे मूल्यो वाली हैं।

इस बात पर बल देना चाहिए कि असमान वर्ग-अन्तरालो वाले एक तिरछे बटन के लिए परिकलित समान्तर माध्य का मूल्य केवल एक पर्याप्त अच्छा सन्निकटन है। जब एक या दो अपरिचित वर्ग विद्यमान हैं तो यह और भी कम यथार्थ हो जाता है। इस प्रकार के बटन के लिए माध्यम के परिकलन मे आने वाली कठिनाई पूर्ण रूप से सुलझ जाती है यदि सारणी के साथ अवर्गित आँकडो को जोड देने वाली एक पाद टिप्पणी जोड दी जाए। यदि इस विधि का अनुकरण किया जाए तो समान्तर माध्य का मूल्य देने के लिए एक अकेला भाग पर्याप्त है।

समान्तर माध्य के संशोधित रूप—एक श्रेणी की सब मदों के लिए समान्तर माध्य का परिकलन करने की बजाय कभी-कभी सबसे छोटे और सबसे बड़े अंकों की औसत लेकर अनुमान करना पर्याप्त हो सकता है। इस प्रकार की विधि का परिणाम समान्तर माध्य से अधिक भिन्न नहीं होगा यदि हम एक ऐसे सतत चर (या एक विविक्त चर, जिसमें अन्तराल नहीं है) से व्यवहार कर रहे हैं जिसका बटन सममित या लगभग सममित है। उदाहरणार्थ, मौसम वैज्ञानिकों ने पता लगाया है कि तापमान की दैनिक औसत निकालने के लिए दिनभर घण्टे-घण्टे के बाद तापमान लेना और इन 24 पाठ्यांकों की औसत निकालना साधारणतः आवश्यक नहीं है। साधारणतया केवल अधिकतम और

सारणी 9.6

स्कर्म स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातकों के ग्रेडों के लिए व्यंजक के प्रयोग द्वारा समान्तर माध्य की सगणना

$$\bar{X}=\bar{X}_a+\frac{\Sigma fd'}{N}i$$

ग्रेड	विद्यार्थियों की संख्या f	d'	fd'	
75 0—76 9	3	—4	— 12	
77 0—78 9	23	—3	— 69	
79 0—80 9	52	—2	—104	
81 0—82 9	61	—1	— 61	—246
83 0—84 9	74	0		
85 0—86 9	61	+1	+ 61	
87 0—88 9	53	+2	+106	
89.0—90.9	35	+3	+105	
91 0—92 9	23	+4	+ 92	
93 0—94 9	15	+5	+ 75	
95 0—96 9	7	+6	+ 42	
97 0—98 9	2	+7	+ 41	+495
योग	409	...	...	+249

$$\bar{X}=\bar{X}_a+\frac{\Sigma fd'}{N}i=83.95+\frac{249}{409}2,$$
$$=83\,95+1\,218,$$
$$=85.17.$$

न्यूनतम तापमानों की औसत निकालना पर्याप्त होता है। ये दो पाठ्यांक ग्राफ पर दिखाए ऊँचे और नीचे बिन्दुओं में जो दर्ज करने वाले तापमापी से अनुरेखित किए गए, प्राप्त किए जा सकते हैं अथवा ये उस तापमापी से प्राप्त किए जा सकते हैं जो स्वयमेव अधिकतम एवं न्यूनतम तापमान दर्ज कर लेता है।

आपको स्मरण होगा कि विद्यार्थियों के ग्रेडो के आँकड़े दाईं ओर को तिरछे है। परिणामस्वरूप हमे आशा करनी चाहिए कि निम्नतम और उच्चतम ग्रेडो की औसत सभी ग्रेडो से सर्वागित समान्तर माध्य से अधिक होगी। आइए, हम इन दो चरम सीमा वाले मूल्यों की औसत निर्धारित करें और देखें कि यह X से कितना भिन्न है। *सारणी* 8 2 मे दिखाया गया उच्चतम दर्जा 98 3 है जबकि निम्नतम दर्जा 76.5 है। इन दो दर्जों की औसत 87 40 है। *अवर्गीकृत आँकडो से सकलित $\bar{X}$ का मूल्य 85 15 मालूम हुआ था।* यद्यपि चरम सीमा वाले अको की औसत निकालने से उत्पन्न होने वाली असगति केवल 2 25 अथवा 2 6 प्रतिशत है हमे इस विधि का $\bar{X}$ के सन्निकटन के तौर पर प्रयोग नही करना चाहिए जब तक कि बटन सममित या लगभग सममित न हो।

समान्तर माध्य का दूसरा सशोधन वह है जिसकी ओर मौसमी गतियो के माप के सबध मे पुन सकेत किया जाएगा (अध्याय 14)। *यह सशोधन आवश्यक तौर पर या तो* इस आधार पर कुछ मदा की उपेक्षा करता है कि वे असामान्य चरम सीमा वाले मूल्य हैं जो सभवत इस स्थिति मे *असम या अतुलनीय* कारक के लाने का परिणाम हैं, अथवा एक सारणी के उच्चतम या निम्नतम मूल्यो मे से एक या अधिक को छोड देना है ताकि केवल अधिक प्रतिरूपी मूल्यो की औसत निकाली जाए।

कल्पना कीजिए कि धावक ने एक मौसम मे 100 गज की दस दौड प्रतियोगिताओ मे भाग लिया और उसने निम्न समय लिए

10 2, 10 1, 10 0, 10 0, 10 1, 10 0, 9 9, 10 1, 11 4, 10 2 सेकड

अब इन दस अको का समान्तर माध्य 10 2 सेकड है, यद्यपि केवल तीन दौडें ही इतनी धीमी या इससे मन्द गति मे दौडी गई थी। ऊपर नौवें अक द्वारा दिखाई गई दौड मे धावक को कील लग गई थी और उसने सब से अन्त मे लगडाते हुए दौड समाप्त की। अक 11 4 से उसकी दौड की योग्यता का सकेत नही मिलता और इसे इस धावक की *योग्यता का प्रतीक औसत समय निकालने के लिए पूर्ण तर्कसगत ढग से छोडा जा सकता* था। यदि हम अन्य नौ अको की औसत निकालें तो हमे सामान्य दौड की स्थितियो मे इस धावक के लिए समान्तर माध्य के तौर पर 10 07 सेकड प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार यदि *एक दौड, धावक ने पीछे की तेज़ हवा के साथ दौडी होती तो 100 गज के लिए उसका* समय असामान्य ढग से कम होगा और वह अक भी छोडा जा सकता है।[3] अभी अभी वर्णित विधि *मौसमी गतियो को मापने मे अनुकूल विधि से इस दृष्टि से भिन्न है कि* केवल वे विशिष्ट *मूल्य जिनके लिए निश्चित तौर पर कोई विशिष्ट कारण दिया जा सकता* था छोडे गए है। मौसमी गतियो को मापते समय हम एक सारणी के दोनो सिरो पर एक, दो *या अधिक मदों को छोड देंगे ताकि उन मदो की औसत निकाली जाए जो किसी* केन्द्रीय मूल्य के इर्द गिर्द जमा प्रतीत होती हैं।

प्रतिशतताओं की औसतें निकालना—*अध्याय 7 मे यह सकेत किया गया था कि* भिन्न सख्याओ पर आधारित प्रतिशतताओ की एक श्रेणी की औसत साधारणतया प्रत्येक प्रतिशतता पर इसके आधार के अनुपात मे भार डालकर निकालनी चाहिए। परन्तु

---

3 समय-अध्ययनो के सबध मे प्रयुक्त सशोधित माध्य का इस प्रकार का विवरण एफ० ई० क्रॉक्सटन और डी० ज० काउडन के *प्रैक्टिकल बिज़नेस स्टैटिस्टिक्स*, तृतीय सस्करण, प्रेंटिस हाल, इन्कार्पोरेटिड, एंजलवुड क्लिफ्स, एन० ज०, *1960, पृष्ठ 458—463* मे दिया गया है।

ऐसी भी स्थितियाँ है जिनमे हम भिन्न आधारो की उपेक्षा करने और कई प्रतिशतताओं की, भारो की एक भिन्न पद्धति का प्रयोग करके, औसत निकालने के इच्छुक हो सकते है। उदाहरणार्थ, हम कल्पना करें कि एक विद्यार्थी ने दो विस्तृत परीक्षाएँ दी हैं जिनमे से प्रत्येक मे एक कोर्स की विषय-सामग्री का आधार आता है। कल्पना कीजिए कि प्रथम परीक्षा मे 100 "सत्य-झूठ" प्रश्न सम्मिलित थे जिनमे से उसने 82 प्रतिशत किए, जबकि द्वितीय मे 150 ऐसे प्रश्न थे जिनमे से उसने 88 प्रतिशत किए। क्योंकि प्रत्येक प्रतिशतता एक उपसत्र के आधे काम को सम्पन्न करने के स्तर की प्रतिनिधि है, उस उपसत्र के लिए विद्यार्थी के काम के अधिक अच्छे वर्णन मे दोनो प्रतिशतताओं को समान भार दिया जाएगा जिसके परिणामस्वरूप औसत

$$\frac{82 + 88}{2} = 85$$

प्राप्त होगा। बजाय इसके कि पूछे गए प्रश्नो की सख्या के अनुसार प्रतिशतताओ को भार दिया जाए जिससे

$$\frac{(100 \times 82) + (150 \times 88)}{250} = 85.6$$

प्राप्त हो। यदि द्वितीय परीक्षा 10 ' निबंध" के प्रश्नों पर आधारित होती तो यह और भी स्पष्ट है कि भार डालने का निर्धारण सम्मिलित प्रश्नो की सख्या से नही होना चाहिए।

औसतो की औसत निकालना—औसतो की औसत निकालने की समस्या की सामान्य रूपरेखाएँ वही हैं जो कि प्रतिशतताओ की औसत निकालने मे आती हैं। यदि हमारे पास कई औसतें हैं और प्रत्येक का एक कोटि की ओर सकेत है और हम एक ऐसे विवरण पर पहुँचने के लिए जो इन कोटियो से बने जोड के सगत है इन औसतो की औसत निकालना चाहते है तो प्रत्येक औसत को इसकी कोटि के महत्त्व के अनुसार और भार देना आवश्यक है। उदाहरण के लिए, यदि 7 फुटबाल लाइनमैनो का औसत भार 210 पाउड हो और 4 पीछे खेलने वालो का औसत भार 186 पाउड हो, तो हम दोनों माध्यो को जोड कर 2 से भाग दे सकते है, जिसका परिणाम 198 पाउड होगा। परन्तु वह ग्यारह खिलाडियो के भारो का सही समान्तर माध्य नही है। हम सही अक इस प्रकार प्राप्त करते हैं

$$\frac{(7 \times 210) + (4 \times 186)}{11} = \frac{2,214}{11} = 201 \text{ पाउड।}$$

यदि हम ग्यारह खिलाडियो के अलग अलग भारो का योग करें और ग्यारह से भाग करें, तो हमे यही अक प्राप्त होगा।

प्रतिशतताओ के समान ही कुछ उदाहरण हो सकते हैं जिनमे प्रत्येक कोटि का महत्त्व कोटि मे सम्मिलित मदो की सख्या के अतिरिक्त किसी अन्य कारक पर निर्भर है। कल्पना कीजिए कि 12 टायर, ड्राइवर को अपवादित कर, खाली परीक्षार्थ ट्रको के एक समूह मे लगाकर दौडाए गए और उन्होने 13,618 मील औसत दूरी निकाली। कल्पना कीजिए कि 20 ऐसे ही टायर ऐसे ही परीक्षार्थ ट्रको के एक समूह मे प्रयोग किए गए जिनमे प्रत्येक मे ड्राइवर और 2,000 पाउड भार लदा है और उन्होने 12,136 मील औसत दूरी निकाली। भारित औसत दूरी होगी

$$\frac{(12 \times 13,618) + (20 \times 12,136)}{32} = 12,692 \text{ मील।}$$

हमने पहले की अपेक्षा द्वितीय औसत को $\frac{20}{12}$=1,67 गुना भार दिया है। वास्तव मे, ट्रक कभी-कभी खाली चलते हैं, कभी-कभी भरे हुए, कभी-कभी आंशिक तौर पर लदे हुए और कभी-कभी अति लदे हुए। यदि हमारे उदाहरण मे ट्रक अपनी दूरी का $\frac{1}{5}$ भाग खाली चलते है और अपनी दूरी का $\frac{4}{5}$ भाग लदे हुए तो हमे अपनी औसत पर

$$\frac{(1\times 13,618)+(4\times 12,136)}{5}=12,432 \text{ मील}$$

द्वारा पहुँचना चाहिए। भार डालने मे परीक्षित टायरो की सख्या की अपेक्षा ट्रक के प्रयोग मे विभिन्न भार स्थितियों के महत्व पर विचार किया जाना चाहिए।

माध्यिका

असमूहित आंकडो से माध्यिका—माध्यिका की परिभाषा प्राय उस मूल्य के तौर पर दी जाती है जो एक बटन को इस प्रकार भाग करता है कि इसके दोनो ओर समान सख्या मे मदें होती हैं। यदि हमारे पास पाँच मदें, 5 डालर, 6 डालर, 7 डालर, 8 डालर, 10 डालर है तो यह स्पष्ट है कि माध्यिका का मूल्य 7 डालर है क्योंकि दो मदें उस मूल्य से नीचे और दो मदें इसके ऊपर है। यदि हमारे पास छ मदें, 2 इच, 5 इच, 6 इच, 7 इच, 9 इच, 12 इच है तो यह स्पष्ट है कि 6 इच से बडा और 7 इच से छोटा कोई मूल्य हमारी परिभाषा पर पूरा उतरेगा। व्यावहारिक तौर पर, जब मदो की सख्या सम होती है, तो हम प्राय माध्यिका का मूल्य दो केन्द्रीय मदो के बीच का आधा लेते हैं। इस उदाहरण मे माध्यिका 6 5 इच होगी।

यदि हमारा सम्बन्ध मूल्यो की एक ऐसी श्रेणी जैसे 12, 13, 14, 15, 15, 17, तथा 18 पाउड से हो तो ऐसा कोई मूल्य नही है जिसकी स्थिति ऐसी हो कि तीन मदें इससे छोटी हो और तीन मदें इससे वडी हो। तो भी हम 15 पाउड को माध्यिका कहेगे। यह स्पष्ट होना चाहिए कि पहले की गई परिभाषा इस प्रकार की स्थितियो पर लागू नही होती। अत परिभाषा पुन इस प्रकार ढाली जाती है *माध्यिका वह मूल्य है जो एक श्रेणी को इस प्रकार भाग करता है कि आधी या अधिक मदें इसके बराबर या इससे कम हों और आधी या अधिक मदे इसके समान या इससे वडी हों।*

जो अभी तक कहा जा चुका है उससे यह स्पष्ट है कि माध्यिका को तुरन्त ढूँढा नही जा सकता जब तक कि आंकडे एक सारणी मे, अथवा, जैसा हम थोडी देर मे देखेंगे, एक बारबारता बटन मे नही रखे जा सकते। आपको स्मरण होगा कि माध्यिका के सकलन के लिए कोई व्यवस्था आवश्यक नही है। क्योंकि एक श्रेणी की मदो का योग किया जा सकता है फिर चाहे उनका क्रम कुछ भी क्यो न हो।

एक श्रेणी की माध्यिका का मूल्य एक वर्तमान मद के मूल्य से मिल भी सकता है, नही भी। जब एक सारणी मे मदो की सख्या विषम हो तो माध्यिका का मूल्य मदो मे से एक के समान होता है, जब एक सारणी मे मदो की सख्या सम है तो यह नही मिलता।

माध्यिका का एक महत्त्वपूर्ण गुण जिसकी ओर पुन सकेत किया जाएगा यह है कि इस पर सारणी की मदों की स्थिति का प्रभाव पडता है परन्तु मदो के आकार का नही। यह पहले ही कहा जा चुका है कि 5 डालर, 6 डालर, 7 डालर, 8 डालर, 10 डालर की माध्यिका 7 डालर है। दो बडी मदो के, 7 डालर से अधिक कोई भी मूल्य हो सकते हैं

और दो छोटी मदो के 7 डालर से कम कोई भी मूल्य हो सकते है, तो भी माध्यिका 7 डालर रहती है।

वर्गित आँकडो के लिए माध्यिका के सकलन पर विचार प्रारम्भ करने से पूर्व, आइए, हम सारणी 8.2 मे क्रमबद्ध 409 उदार कला छात्रो के ग्रेडो के लिए माध्यिका के मूल्य का सकलन करे। हम वह मूल्य मालूम करना चाहते है जिसकी स्थिति ऐसी हो कि इसके किसी भी ओर 204 मदे होगी। निस्सन्देह यह 205वी मद[4] का मूल्य है और किसी भी सिरे से गिनने पर पता चलता है कि माध्यिका का मूल्य 84.6 है। यदि हमारे पास 200 मदो की सारणी हो तो हमे वह मूल्य मालूम करना चाहिए जो बटन को इस प्रकार भाग करे कि 100 मदें इससे नीचे और 100 इसके ऊपर आएँ। स्पष्ट ही यह सरणी के किसी भी सिरे से गिने जाने पर 100वी और 101वी मदो का माध्य है।

समूहित आँकडो से माध्यिका—एक वारवारता बटन की माध्यिका का मूल्य निर्धारित करने के लिए हम बटन के किसी भी सिरे से आधी वारवारताएँ गिन लेते हैं, ताकि वह मूल्य सुनिश्चित हो सके जिसके किसी भी ओर आधी वारवारताएँ आती हैं। विद्यार्थियो के (सारणी 9.6) ग्रेडो के लिए माध्यिका का मूल्य निर्धारित करने के लिए हम पहले $\frac{N}{2}=204.5$ का सकलन करते हैं। तब हम माध्यिका का मूल्य सुनिश्चित करते है। बटन की पहली चार कक्षाओ मे 139 वारवारताओ का समावेश है। अत माध्यिका का अनुमानित मूल्य पचम वर्ग मे 65.5 वारवारताओ (204.5—139) का अन्तर्वेशन करके प्राप्त किया जाता है, इस कल्पना के आधार पर कि उस वर्ग मे वारवारताएँ उस वर्ग के भीतर समान रूप से बँटी है। तब माध्यिका व्यजक

$$\text{Med}=82.95+\frac{65.5}{74}2=82.95+1.77=84.72$$

से प्राप्त होता है। यदि हम बटन के दूसरे सिरे से अपने सकलन प्रारम्भ करें तो ठीक यही निष्कर्ष प्राप्त होता है। अन्तिम सात वर्गो मे 196 वारवारताओ का समावेश है और हम, ऊपरी सीमा से निचली सीमा की ओर पचम वर्ग मे 8.5 वारवारताओ (204.5—196) का अन्तर्वेशन करते है। परिणाम है

$$\text{Med}=84.95-\frac{8.5}{74}2=84.95-0.23=84.72$$

हाँ, माध्यिका का मूल्य वही है, चाहे हम अपने सकलन एक सिरे से प्रारम्भ करें या दूसरे सिरे से।

---

4 अवर्गित आँकडो के लिए सारणी मे उच्चतम (या न्यूनतम) मद से प्रारम्भ करके $\frac{N+1}{2}$ मदो की गिनती करने मे माध्यिका का मूल्य मालूम करना सरल प्रतीत हो सकता है। यह ऐसा कहने के समान नही है कि माध्यिका $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ वा मद है। यद्यपि कुछ व्यक्तियो का इस प्रत्यय मे विश्वास है, पर यह सतोषजनक नही है। बीच की मद माध्यिका है यह प्रत्यय उस दशा मे असतोषजनक होगा जब सारणी मे मदों की सख्या सम हो और उस समय छोड देना चाहिए जब माध्यिका का निर्धारण समूहित आँकडो से किया जाता है।

वारवारता बटन से अभी-अभी प्राप्त माध्यिका का मूल्य 84.72 सरणी से प्राप्त 84.6 से बहुत निकट से समरूप है। जब तक कि आँकडो मे अन्तराल या अनियमितताएँ न हों, हम सतत चर पर विचार करते समय सन्निकट समता की ही आशा कर सकते हैं, और इसी प्रकार विविक्त चर के लिए भी, यदि आँकडे टूटे हुए नही हैं।

अब हमने विद्यार्थियो के ग्रेडो के वारवारता बटन के लिए समान्तर माध्य और माध्यिका के मूल्यो का सकलन कर लिया है। माध्य 85 17 था। माध्यिका 84.72 थी। माध्य माध्यिका से इसलिए बडा है क्योंकि बटन दाई ओर को तिरछा है। यदि बटन ठीक सममित हा तो माध्य और माध्यिका समरूप होते हैं। यदि बटन बाई ओर को तिरछा है *तो माध्य माध्यिका से कम होगा।* इस बिन्दु पर अधिक विस्तार से इस अध्याय के अन्त मे और अगले अध्याय मे प्रकाश डाला जाएगा। अध्याय 10 मे हम देखेंगे कि तिरछेपन के *मापने के एक तरीके मे माध्य और माध्यिका के मूल्यों का विचार करना होता है।*

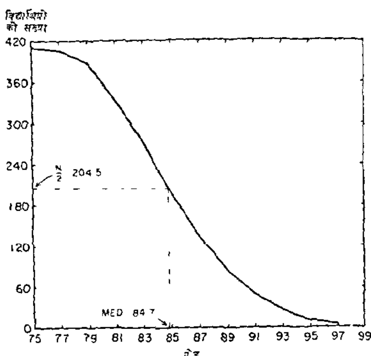
असमान वर्ग-अन्तरालो के वारवारता बटन से माध्यिका का परिकलन अभी-अभी वर्णित परिकलन से भिन्न नही है और न किसी एक या दोनो सिरो पर अनिर्धारित समूहो की उपस्थिति से प्रविधि जटिल बनती है।

यदि बटन के एक तोरण का आलेखन किया जाए तो माध्यिका का मूल्य लेखाचित्र से प्राप्त करना सभव है, जैसा कि चार्ट 9 1 मे दिखाया गया है। यह विधि पहले ही किए गए परिकलनों का लेखाचित्री रूप है और इसमे निम्न पग आते हैं. (1) $\frac{N}{2}$ का परिकलन कीजिए और इस बिन्दु को ऊर्ध्वाधर पैमाने पर खोजिए। (2) 4-अक्ष पर इस बिन्दु पर लम्ब खीचिए और लम्ब को तोरण को काटते हुए बढाइए। (3) प्रतिच्छेद बिन्दु पर, X-अक्ष पर एक लम्ब डालिए। प्रतिच्छेद माध्यिका का मूल्य बताता है। चार्ट 9.1 से यह देखा गया है कि विद्यार्थियो के ग्रेडो के लिए, लेखाचित्र द्वारा दिखाया हुआ माध्यिका का मूल्य 84 7 है जो, अकगणितीय ढग से परिकलित मूल्य के पर्याप्त निकट है।

चतुर्थक, पचमक, दशमक, तथा शततमक—*माध्यिका अपनी बीच की स्थिति के* कारण मूल्यों की एक श्रेणी का स्वरूप दिखाती है। वारवारता बटन के कई अन्य माप हैं *जो अलग-अलग तौर पर तो केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप नही हैं परन्तु, जैसा हम बाद मे देखेंगे,* जिनका प्रसार और तिरछापन मापने मे सहायता के लिए प्रयोग किया जा सकता है। परन्तु वे इस दृष्टि मे *माध्यिका से सम्बद्ध हैं कि वे श्रेणी मे अपनी स्थिति पर आधारित* हैं। अत हम यहाँ चतुर्थको, पचमकों, दशमकों और शततमकों का विवरण देने के लिए विषयान्तर करेंगे।

चतुर्थक तीन है, Q_1, Q_2 तथा Q_3, जो बटन को चार बराबर भागो मे बाँटते हैं। हाँ, Q_2, माध्यिका है और प्राय इसी प्रकार अभिहित किया जाता है। कैडेट-मिडशिपमैन के ग्रेडो के आँकडो के लिए, पहले या निचले चतुर्थक Q_1 का मूल्य निर्धारित करने के लिए हम प्रथम वर्ग की निचली सीमा से $\frac{N}{4}=\frac{409}{4}=102\ 25$ वारवारताओ को गिनते हैं। इस प्रकार हमारे पास Q_1 का मूल्य है

$$Q_1=80.95+\frac{24\ 25}{61}2=81.75$$



चार्ट 9.1 रूजर्स स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातकों के दर्जों के लिए माध्यिका की लेखाचित्रीय खोज। आँकड़े सारणी 9.6 से।

यही परिणाम अन्तिम वर्ग की ऊपरी सीमा से $\frac{3N}{4}$ को गिनकर प्राप्त किया जा सकता है।

तृतीय चतुर्थक Q_3 का मूल्य प्रथम वर्ग की निचली सीमा से $\frac{3N}{4}$ को गिनकर परिकलित किया जा सकता है अथवा, अधिक क्षिप्रता से, अन्तिम वर्ग की ऊपरी सीमा से $\frac{N}{4}$ को गिनकर। क्योंकि $\frac{N}{4} = 102.25$, और क्योंकि अन्तिम पाँच वर्गों में 82 बारंबारताएँ हैं तो हमारे पास आता है।

$$Q_3 = 88.95 - \frac{20.25}{53} 2 = 88.19$$

चार पंचमक हैं जो बटन को पाँच बराबर भागों में बाँटते, नौ दशमक हैं जो बटन को दस बराबर भागों में बाँटते हैं, और निन्यानवे शततमक हैं जो बटन को 100 बराबर भागों में बाँटते हैं। इन मूल्यों के परिकलन करने की विधि माध्यिका और चतुर्थकों की विधि जैसी है। उदाहरणार्थ, हम तृतीय दशमक के मूल्य का परिकलन करेंगे जो 30वाँ शततमक भी है। हम $\frac{3N}{10} = \frac{1,227}{10} = 122.7$ को प्रथम वर्ग की निचली सीमा से गिनते हैं और अन्तर्वेशन करते हैं। क्योंकि पहले तीन वर्गों में 78 बारंबारताएँ हैं तो हमारे पास

$$80.95 + \frac{44.7}{61} 2 = 82.42$$

जब तक कि एक बंटन बहुत विस्तृत न हो, बहुत अधिक शततमकों का परिकलन करने से कोई प्रयोजन सिद्ध नहीं होगा। उनमें से केवल कुछ एक का बहुलता से प्रयोग किया जाता है, जैसे 99वाँ, 98वाँ, 95वाँ, 90वाँ 85वाँ, 80वाँ, इत्यादि।

कभी-कभी चतुर्थक, पंचमक, दशमक, तथा शततमक मदों का एक अलग अर्थ में, बंटन के उस भाग की ओर जिसमें मद आती है, संकेत करने के लिए, प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार, यदि एक विद्यार्थी को अपनी कक्षा के ऊपरी चतुर्थक में कहा जाता है तो वह ऊपरी 25 प्रतिशत में है। यदि वह अपनी कक्षा के ऊपरी दशमक में है तो वह ऊपर के 10 प्रतिशत में है। निस्सन्देह इससे स्पष्ट अभिव्यक्ति होगी यदि हम चतुर्थकों,पंचमकों, दशमकों, और शततमकों को इस अनुभाग के प्रारंभ में विवेचित मापों के अर्थ के लिए सुरक्षित रखें। एक बंटन के उस भाग की ओर, जिसमें एक विद्यार्थी आता है, संकेत करने के लिए हम कह सकते हैं "उच्चतम चतुर्थांश" (Q_3 से अधिक), "द्वितीय उच्चतम चतुर्थांश" (Q_2 और Q_3 के बीच), "तृतीय उच्चतम चतुर्थांश" (Q_1 और Q_2 के बीच), तथा "निम्नतम चतुर्थांश" (Q_1 से कम)। इसी प्रकार हम पंचमकों के स्थान पर "पंचम", दशमकों की बजाय "दशम" और शततमकों की बजाय 'सौवें' कह सकते हैं।

बहुलक

असमूहित आंकड़ों से बहुलक—एक बंटन का बहुलक उस बिन्दु पर वह मूल्य है जिसके इर्द-गिर्द मदों की प्रवृत्ति सर्वाधिक केन्द्रित होने की है। इसे मूल्यों की एक श्रेणी का सर्वाधिक प्ररूपी माना जा सकता है। इसी कारण से यह स्पष्ट है कि एक या कुछ बहुत ऊँचे (या नीचे) मूल्यों के होने से बहुलक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।[5] यदि आँकड़ों की एक श्रेणी अवर्गीकृत है, जिसका न तो समीकरण हुआ है और जिसे न बारंबारता बंटन में रखा गया है तो बहुलक का तुरन्त पता नहीं चल सकता।

पहले एक बहुत ही सरल उदाहरण लीजिए : यदि सात व्यक्ति 35 डालर, 42 डालर, 49 डालर, 49 डालर, 49 डालर, 56 डालर, 70 डालर, दैनिक आय प्राप्त कर रहे हैं तो यह स्पष्ट है कि बहुलकीय आय 49 डालर प्रति दिन है। यदि हमारे पास मूल्यों की एक ऐसी श्रेणी है जैसे

21, 35, 42, 49, 63, 70, 77

तो यह स्पष्ट है कि बहुलक नहीं है।

समूहित आंकड़ों से बहुलक—यदि हम सारणी 8.2 में दिखाई गई विद्यार्थियों के ग्रेडों की सारणी की परीक्षा करें तो हमें पता चलता है कि वह मूल्य निर्धारित करना

---

5 यह बहुलक का दिखाने की सामान्य विधि के संबंध में जिसका यहाँ वर्णन किया गया है सत्य है। यदि बहुलक को व्यंजक

$$\text{बहुलक} = \bar{X} - s\frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2+3)}{2(5\beta_2-6\beta_1-9)},$$

से, या एक सतत वक्र के शिखर के ठीक नीचे X मूल्य के निर्धारण से दिखाया जाता है तो चरम सीमा के मूल्यों का कुछ थोड़ा सा प्रभाव होता है। s, β_1, तथा β_2 के परिकलन का विवेचन अगले अध्याय में किया गया है।

बहुत कठिन होगा जिसके इर्द-गिर्द मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति है। एक वारवारता वटन जैसे सारणी 9 6 की ओर सकेत करके तुरन्त बहुलक का स्थान निर्धारण किया जा सकता है। यहाँ यह स्पष्ट है कि बहुलकीय वर्ग 83 0—84 9 है, और यदि हम वर्ग के प्रतिनिधि के तौर पर मध्य-मूल्य लें तो हमें 83 95 को बहुलक कहना चाहिए।

प्राय॰ मध्य-मूल्य बहुलक का सर्वोत्तम अनुमान नही है, क्योकि बहुलकीय वर्ग से पहले के और बाद के वर्गों मे वारवारताएं नियम के अनुसार बराबर नही हैं। बहुलकीय वर्ग के भीतर सभावित सकेद्रण द्वारा बिन्दु का अनुमान करने के लिए यह प्राय आवश्यक है कि निम्न व्यजक का प्रयोग करें

$$Mo = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i,$$

जहाँ l_1=बहुलकीय वर्ग की निचली सीमा,

Δ_1=बहुलकीय वर्ग की वारवारता और उससे पूर्व के वर्ग की वारवारता का अन्तर (चिह्न उपेक्षित),

Δ_2=बहुलकीय वग की वारवारता और उससे अगले वर्ग की वारवारता का अन्तर (चिन्ह उपेक्षित),

i=बहुलकीय वर्ग का अन्तराल।

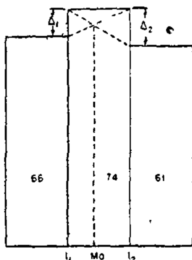
विद्यार्थियो के ग्रेडों के वारवारता बटन के लिये

$$Mo = 82\ 95 + \frac{74-61}{(74-61)+(74-61)} 2,$$

$$= 82\ 95 + \frac{1}{2}\ 2 = 83\ 95$$

इस विशेष उदाहरण मे परिकलित बहुलकीय मूल्य बिल्कुल मध्य मूल्य के बराबर है जो सामान्य बात नही है। यह इसलिए घटित होता है क्योकि उदाहरण मे बहुलकीय वर्ग से तुरन्त पहले और पीछे आने वाले वर्गों में वारवारताएँ बराबर है। यदि व असमान होता तो परिकलित बहुलकीय मूल्य वग के मध्य-मूल्य से कम या अधिक हुआ होता। उदाहरण के लिए यदि 81 0—82 9 ग्रेडो वाल वग मे 61 के स्थान पर 66 वारवारताओ का समावेश हुआ होता तो परिकलित बहुलकीय मूल्य 83 71 होता। यदि 85 0—86 9 ग्रेडो वाले वर्ग म 61 के स्थान पर 66 वारवारताओ का समावेश हुआ होता तो परिकलित बहुलकीय मूल्य 84 19 होता।

हमने जिस अन्तर्वेशन विधि का वणन किया है उसे लेखाचित्र द्वारा दिखाया जा सकता है, जैसा कि चार्ट 9 2 में दिखाया गया है। इस विधि मे Δ_1 और Δ_2 जो काय करते हैं उसे दिखाने के लिए हमने 81 0—82 9 ग्रेडो वाले वर्ग के लिए 66 को वारवारता की कल्पना की है। यह समझ लना चाहिए कि हम केवल मात्र बहुलक के मूल्य का अनुमान कर रहे है। तो भी, यह उपयोगी अनुमान है और यह स्मरण रखना चाहिए कि बहुलक की दो महत्त्वपूर्ण विशेषताएँ है, प्रथम यह कि यह वटन के सर्वाधिक प्ररूपी मूल्य का प्रतिनिधित्व करता है और यह विद्यमान मदो से एकरूप होना चाहिए, द्वितीय यह कि बहुलक पर (सामान्य तौर पर परिकलित) बहुत ही बडी या छोटी मदो की उपस्थिति का प्रभाव नही पड़ता।



चार्ट 9.2 बहुलक के मूल्य के लिए अन्तर्वेशन करने की विधि का लेखा चित्री उदाहरण। Δ_1 ऊपर की ओर प्रभाव डालता है और Δ_2 नीचे की ओर प्रभाव डालता है, प्रत्येक अपने परिमाण के अनुपात मे, ताकि बहुलक बहुलकीय वर्ग के अन्तराल को दो भागों मे बाँटता है जो Δ_1 और Δ_2 के आनुपातिक हैं। अर्थात्,

$$\frac{Mo-l_1}{l_2-Mo}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

ज्यामितीय ढग से, दो विकर्णों के प्रतिच्छेद से एक लम्ब रूप रेखा गिराकर बहुलक का स्थान ज्ञात किया जा सकता है जैसा कि आरेख मे दिखाया गया है।

बीजीय रूप से व्यजक

$$Mo=l_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}i$$

को निम्न प्रकार से विकसित किया जा सकता है हम बहुलक जानना चाहते हैं ताकि

$$\frac{Mo-l_1}{l_2-Mo}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2},$$

$$\Delta_2 Mo-\Delta_2 l_1=\Delta_1 l_2-\Delta_1 Mo,$$

$$\Delta_1 Mo+\Delta_2 Mo=\Delta_1 l_2+\Delta_2 l_1,$$

$$Mo(\Delta_1+\Delta_2)=\Delta_1 l_2+\Delta_2 l_1.$$

यदि $l_2=l_1+i$

$$\therefore\ Mo=\frac{\Delta_1 l_1+\Delta_1 i+\Delta_2 l_1}{\Delta_1+\Delta_2},$$

$$=\frac{\Delta_1 l_1+\Delta_2 l_1}{\Delta_1+\Delta_2}+\frac{\Delta_1 i}{\Delta_1+\Delta_2}$$

$$=l_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}i.$$

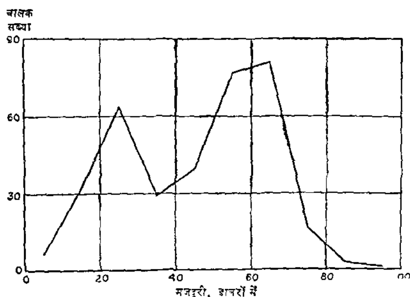
लेखाचित्री ढग मे हम एक स्तम्भ आरेख से बहुलक प्राप्त कर सकते हैं, जैसा कि चार्ट 9.2 मे है। बारबारता वक्र के उच्चतम बिन्दु अथवा तोरण के अधिकतम खडे भाग के अनुरूप X अक्ष पर मूल्य पढकर हम बहुलक का बहुत मोटा अनुमान लगा सकते हैं। वक्रो का मुक्त हस्त से समरेखण किया जा सकता है क्योकि जब तक श्रेणी को समरेखण प्रक्रिया के अन्तर्गत नही लाया जाता, तब तक हम बहुलकीय वर्ग के मध्य-मूल्य के तौर पर लगभग वही मूल्य प्राप्त करेंगे।

कभी-कभी, ऐसी श्रेणियां सामने आती हैं जिनके दो बहुलक हो। वे द्वि-बहुलकीय कहलाती हैं। इस प्रकार की एक श्रेणी चार्ट 9.3 मे चित्रित की गई है। कभी-कभी द्वि-बहुलकता *सयोग का परिणाम होती है, कभी-कभी यह इस तथ्य के कारण होती है* कि असम आँकडो के दो समुच्चय उपस्थित हैं। चार्ट 9.3 मे दो सकेन्द्रण इस तथ्य के कारण हुए हैं कि कुछ ड्राइवर पूरे (या लगभग पूरे) समय काम पर थे, जबकि अन्य सप्ताह मे केवल एक *या* दो दिन काम कर रहे थे।

माध्य-माध्यिका, और बहुलक की विशेषताएँ

केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्य मापो पर विचार करने से पूर्व हम इन तीन अपेक्षाकृत सरल और बहुत महत्त्वपूर्ण मापो की विशेषताओ का परीक्षण करेंगे।

प्रत्यय का परिचय—*समान्तर माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति के सब मापो मे* सबसे अधिक प्रयुक्त होता है। जैसा बाद मे सकेत किया जायेगा, यह ऐसी स्थितियों मे बहुलता से



चार्ट 9 3 बिटमनी कोयला खानों, इलीनोइस मे ड्राइवरो द्वारा ग्राधे मास में प्राप्त मजदूरी का बटन । आकड़े संयुक्त राज्य श्रम सांख्यिक, ब्यूरो येजिज एन्ड ग्रावर्स ग्रॉफ लेबर इन बिटुमिनस कोल माइनिंग, बुलेटिन न० 601, पृष्ठ 61 से ।

प्रयोग किया जाता है जो इसे पथभ्रष्ट करने वाला बना देती हैं । माध्यिका समान्तर माध्य की अपेक्षा कम प्रसिद्ध है परन्तु यह एक अधिक सरल प्रत्यय पर ग्राधारित है । समान्तर माध्य से कम प्रसिद्ध ही, बहुलक का प्रत्यय, मदो के एक दल के सर्वाधिक सामान्य या प्ररूपी के रूप मे, सभवत तीनो मे सबसे अधिक सरल है ।

तीनों मापो के प्रत्ययो को चार्ट 9 4 के तीन भागो के द्वारा चित्रित किया जा सकता है । माध्य सतुलन बिन्दु पर या गुरुत्व केन्द्र पर इस प्रकार से है, कि माध्य के एक ओर ΣfX दूसरी ओर ΣfX के समान है । माध्यिका वक्र को दो समान क्षेत्रो म बाँटता है । बहुलक वक्र के शिखर के नीचे का मूल्य है ।

बीजीय निरूपण—समान्तर माध्य का बीजत निरूपण किया जा सकता है

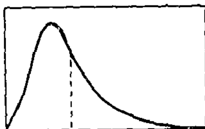
(क) क्योकि $\bar{X}=\frac{\Sigma X}{N}$, यह निष्कर्ष निकलता है कि यदि तीन कारको (योग, समान्तर माध्य, मदो की सख्या) मे से कोई दो मालूम हों तो तीसरे का सकलन किया जा सकता है । इस प्रकार

$$\bar{X}=\frac{\Sigma X}{N}, \quad \Sigma X=N\bar{X}, \qquad N=\frac{\Sigma X}{\bar{X}}$$

(ख) उचित भारो का प्रयोग करके, समान्तर माध्यों की एक श्रेणी का ग्रौसत निकला जा सकता है ताकि उन सब ग्राँकडो का समान्तर माध्य प्राप्त हो जिन पर वे माध्य ग्राधारित हैं ।

समान्तर माध्य के लिए विवेचित प्रकार का बीजीय प्रतिपादन माध्यिका पर लागू नही होता । माध्य के लिए ग्रारेखित के समान, बहुलक का बीजीय प्रतिपादन सभव नहीं है।

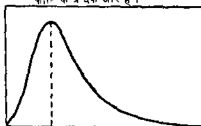
आंकडो के वर्गीकरण की आवश्यकता—समान्तर माध्य का परिकलन अवर्गीकृत आँकडो से, सरणीकृत आंकडो से, बारबारता बटन से, अथवा (जैसा ऊपर देखा गया है) केवल मात्र योग ΣX तथा मदो की संख्या N की जानकारी से किया जा सकता है। जब समान्तर माध्य का परिकलन एक बारबारता बटन से किया जाता है तो X का मूल्य अवर्गीकृत आँकडो के लिए $\bar{X}$ के मूल्य के बहुत निकट होगा। जितना अधिक सममित बटन होगा, उतनी ही अधिक निकटतर इन दो मूल्यो की समरूपता होगी।



A $\bar{X}$ के गग के मानो का $\bar{X}$ के व ग के ानो मे ्युनन है।



B वक्र के नीचे क्षेत्रफल का आधा भाग माध्यिका पर खडी को गई कोटि के प्र येक ओर है।



C बहुलक सीधा वक्र के शिखर के नीचे है।

चार्ट 9 4 दाई ओर को तिरछे बारबारता बटन मे समान्तर माध्य, माध्यिका और बहुलक को जानना।

माध्यिका के मूल्य के परिकलन के लिए, आँकडा का एक सरणी म (कम से कम केन्द्रीय मदे सरणीबद्ध होनी चाहिएँ) अथवा एक बारबारता बटन में होना आवश्यक है। बारबारता बटन से निर्धारित सरणी से परिकलित माध्यिका के साथ लगभग मेल खाएगा यदि माध्यिका वाले वर्ग के भीतर मदो का बटन नियमित है।

बहुलक बारबारता बटन से अत्यधिक शीघ्रता से खोजा जाता है और सरणी से केवल कुछ कठिनाई के साथ। एक लेखक ने कहा है कि संयुक्त राज्य के नगरो की, प्रत्येक की जनसंख्या के अनुसार, सरणी से कोई बहुलक दिखाई नही देगा। परन्तु यदि एसे आँकडो को वर्गो मे रखा जाए, तो एक बहुलकीय प्रवृत्ति उत्पन्न हो सकती है। इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि बहुलकीय समूह के भीतर बहुलकीय मूल्य के लिए अन्तर्वेशन की विधि अधिक से अधिक एक अनुमान मात्र है। बहुलक को खोजने के अधिक बढिया तरीको का अर्थ आवश्यक तौर पर सूत्र से आँकडो का समरेखण करना और अधिकतम कोटि के X मूल्य का निर्धारण करना है।

असमान वर्ग-अन्तरालो का प्रभाव—जब वर्ग विस्तार म भिन्न हो तो समान्तर माध्य के मूल्य का परिकलन किया जा सकता है। वर्ग अन्तरालो की ऐसी भिन्नता महत्त्वपूर्ण तिरछपन (लगभग निरपवाद रूप से दाएँ को या सकारात्मक) की उपस्थिति के कारण आवश्यक हो जाती है जिसका परिणाम $\bar{X}$ का एक ऐसा मूल्य होता है जिसकी अवर्गीकृत आँकडो पर आधारित मूल्य से निकट समरूपता न भी हो। ऐसे तिरछे बारबारता बटन से X के मूल्य की अवर्गीकृत आँकडो से $\bar{X}$ के मूल्य से अधिक होने की आशा होगी।

माध्यिका का निर्धारण साधारणतया भिन्न वर्ग अन्तरालों वाले बारबारता बटन से सन्तोषजनक ढंग से किया जा सकता है। परन्तु ऊपरी चतुर्थक अथवा ऊपरी पंचमकों या दशमकों में से एक या अधिक बारबारताओं से रहित एक विस्तृत वर्ग में आ सकते हैं। ऐसी स्थिति में आवश्यक अन्तर्वेशन अविश्वसनीय होगा।

जब एक बारबारता बटन के वर्ग अन्तराल विस्तार में भिन्न हों तो बहुलक सन्तोषजनक ढंग से मालूम किया जा सकता है, यदि बहुलकीय वर्ग और इसके दोनों ओर स्थित वर्ग अन्तरालों का विस्तार समान हो। अन्यथा निर्धारण की शुद्धता सीमित होने की सम्भावना है।

खुले सिरे वाले वर्गों का प्रभाव—एक बारबारता बटन के एक सिरे पर "अपेक्षाकृत कम..." वर्ग की और/अथवा दूसरे सिरे पर एक " अथवा अधिक" वर्ग की उपस्थिति का परिणाम λ का अयथार्थ निर्धारण होता है क्योंकि ऐसे वर्गों के लिए साधारणतया मध्य मूल्यों का सन्तोषजनक ढंग से निर्धारण नहीं किया जा सकता।

खुले सिरे वाले वर्गों की उपस्थिति का माध्यिका के निर्धारण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

अनिर्धारित समूहों ने बहुलकीय मूल्य की खोज करने की प्रक्रिया जटिल नहीं बनती। कभी-कभार, जैसा कि अत्यधिक तिरछे या उलटे *J*-आकार के बटन के साथ कार्य करते समय, बहुलक बटन के सिरे पर या उसके निकट होता है। ऐसी स्थितियों में बटन के उस सिरे पर एक अनिर्धारित समूह रखने का कोई कारण नहीं होगा। प्रासंगिक तौर पर, ऐसे बटनों की स्थिति में, बहुलक केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप नहीं है।

तिरछेपन का प्रभाव—सममित बटन के लिए माध्य, माध्यिका, और बहुलक समरूप हैं। यदि सममित बटन को केवल एक पिछला सिरा बढ़ा कर इस प्रकार बदल दिया जाए कि बटन तिरछा हो जाए तो बहुलक के मूल्य में (जैसा प्रायः परिकलित होता है) कोई आवश्यक परिवर्तन नहीं आता, परन्तु माध्यिका तिरछेपन की दिशा में बदल जाती है। इस प्रकार धनात्मक तिरछेपन में (दाईं ओर को तिरछेपन से) माध्यिका का मूल्य बढ़ जाता है। माध्य और भी अधिक बढ़ जाता है क्योंकि यह न केवल इस तथ्य से प्रभावित होता है कि अब बहुलक के एक ओर बटनों की अधिकता है, बल्कि उस मात्रा से भी जिसके द्वारा विभिन्न अधिक बटन बहुलक से अलग हों। यद्यपि उदार कला विद्यार्थियों के ग्रेडों का बटन केवल थोड़ा सा तिरछा हो तो तिरछेपन की उपस्थिति का प्रभाव उस समय दिखाई देता है जब हम यह स्मरण करते हैं कि बहुलक 83.95 है, माध्यिका 84.72 है, और माध्य 85.17 है। ये मूल्य चार्ट 10.7 में दिखाए गए हैं।

चरम मानों का प्रभाव—जब तिरछापन सामान्य नहीं होता बल्कि उन कुछ मदों के कारण होता है जो बहुलक से काफी कुछ अलग हों तो माध्यिका पर केवल मामूली सा प्रभाव पड़ेगा। परन्तु समान्तर माध्य श्रेणी में प्रत्येक मद के मूल्य से प्रभावित होता है और श्रेणी में कुछ बहुत ही बड़ी (या बहुत ही छोटी) मदों की उपस्थिति में एक ऐसा माध्य उत्पन्न हो सकता है जो बहुत भ्रामक हो। जैसे कि साधारणतया परिकलित होता है, बहुलक पर कुछ असामान्य तौर पर ऊँचे (या नीचे) चरम मूल्यों की उपस्थिति का बिल्कुल कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

ऊपर की बात इतनी अधिक महत्व की है कि हम इसकी ओर अधिक ध्यान देंगे। कल्पना कीजिए कि हमारे पास सात मूल्यों की निम्न श्रेणी है :

डालर 12, डा० 14, डा० 15, डा० 15, डा० 16, डा० 18, डा० 19,
जिनका माध्य डालर 15.57, माध्यिका डालर 15 और बहुलक डालर 15 हो। यदि इन मान में एक चरम मूल्य 25 डालर जोड दिया जाता है तो समान्तर माध्य 16.75 डालर बन जाता है, माध्यिका 15.50 डालर, जबकि बहुलक 15 डालर रहता है। अब यदि आठवीं मद के रूप में 25 डालर जोड़ने की बजाय हम 200 डालर जोड़ते हैं तो माध्य 38.62 डालर बन जाता है, परन्तु माध्यिका अभी भी 15.50 डालर है और बहुलक 15 डालर है। माध्यिका पर 16 डालर से ∞ तक किसी भी मूल्य के जोड़े जाने का प्रभाव एकसमान है। बहुलक पर चरम मूल्य का बिल्कुल कोई प्रभाव नहीं पड़ा, यद्यपि यदि हमने एक 16 डालर की मद जोड़ी होती तो इस पर प्रभाव पड़ता। इससे एक भिन्न बात का उदाहरण भी मिलता है, अर्थात् बहुलक एक उपयोगी माप नहीं है जब तक कि यह एक सुपरिभाषित संकेन्द्रण दिखाने के लिए पर्याप्त मदों पर आधारित न हो।

समान्तर माध्य पर चरम मूल्यों के प्रभाव के कारण, बंटन का वर्णन करने के लिए इस अंक का प्रयोग करना कभी कभी भ्रामक होता है। यदि हम एक मनुष्य समूह की आय पर विचार कर रहे हैं और यदि उनमें से अधिकतर की आय साधारण है परन्तु एक या कुछ की अत्यन्त ऊँची (या नीची) आय है, तो माध्य पर इन चरमताओं का प्रतिबिम्ब दिखाई देगा और उस सीमा तक वह प्ररूपी के बजाय अप्ररूपी होगा। छात्रों की एक परिषद् ने एक बार उन स्नातकों का अध्ययन किया जिन्हें कालेज से निकले 20 वर्ष हो चुके थे। पूछे गए अन्य प्रश्नों में एक प्रश्न वर्ष विशेष में आय के संबंध में था।[6] 350 से अधिक प्रश्नावलियाँ भेजी गईं, केवल 133 उत्तर प्राप्त हुए। इस बात की काफी संभावना है कि ये उत्तर चयनात्मक हों और इनसे व्युत्पन्न किन्हीं भी अंकों का मूल्य संदेहास्पद होगा। 133 उत्तरदाताओं की आय का माध्य 35,000 डालर था, परन्तु यह ऊँची औसत इस तथ्य के कारण थी कि कई बहुत ऊँची आय थीं जो निश्चित ही चरम मान थीं। माध्यिका आय 18,750 डालर थी, जबकि बहुलक 12,500 डालर के बहुत निकट था। इस प्रकार के मामले में, बंटन का वर्णन करने के लिए हम अकेले माध्य का प्रयोग नहीं करना चाहिए। यदि केवल एक अंक का प्रयोग करना हो तो माध्यिका या बहुलक का प्रयोग करना अधिक अच्छा है, यह इस बात पर निर्भर करेगा कि किस प्रत्यय का अधिक महत्त्व है। हाँ, यह बहुत अधिक अच्छा होगा कि तीनों मूल्य दिए जाएँ और यदि संभव हो तो बारंबारता बंटन या बारंबारता वक्र भी दिया जाए।

कभी-कभी एक ऐसी श्रेणी पर विचार करते समय जिसमें संदिग्ध विषमागता विद्यमान हो, समान्तर माध्य के स्थान पर माध्यिका का प्रयोग करना उचित हो सकता है। उदाहरणार्थ, संभव है कि कई स्वर्णमत्स्यों के वजन का माप लिया गया हो और अंकों से कई असामान्य तौर पर बड़े नमूनों की उपस्थिति का पता चला हो। यह संदेह किया जाता है कि अज्ञान या असावधानी के कारण गणनाकार ने स्वर्णमत्स्य के साथ कुछ कार्पो (शफरी) को सम्मिलित कर लिया हो। शंकास्पद मूल्यों को छोड़ा जा सकता है। परन्तु हम इस बात का विश्वास नहीं है कि भारी मछलियाँ कार्पें थीं और संभवतः उनके माप छोड़े नहीं जाने चाहिएँ। माध्यिका के प्रयोग से यह स्वीकृति हो जाती है कि चरम मूल्यों का श्रेणी में उनकी स्थिति से, न कि उनके आकार से, प्रतिनिधित्व किया जाए।

6 सभी अंक प्रचलित डालरों में और निकटतम 250 डालर तक पूर्णांकित हैं।

कभी-कभी हमारे पास एक ऐसी श्रेणी होती है जिसमे ऐसी चरमताएँ उपस्थित होनी हैं जिनकी सख्या हमे पता हो परन्तु अलग-अलग मूल्य पता न हो । ऐसी स्थिति मे हम माध्यिका या बहुलक का पता चला सकते है, परन्तु माध्य का नही ।

जब हमारे पास बडे परिसर मे व्याप्त मूल्यो की एक श्रेणी हो तो केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप की कोई भी सकल्पना सदेहास्पद है । कल्पना कीजिए कि हमारे पास 4, 6, 2000, तथा 2,100 मूल्य हैं । यह स्पष्ट है कि माध्य या माध्यिका का परिकलन हो सकता है, परन्तु दोनो मे से किसी का भी कोई व्यावहारिक अर्थ नही होगा।

आँकडो की अनियमितता का प्रभाव—जब आँकडे टूटे हुए या अनियमित हो तो एक बारबारता बटन से परिकलित माध्य का मूल्य असगठित आँकडो पर आधारित मूल्य से निश्चित रूप से भिन्न हो सकता है ।

यदि माध्यिका वाले वर्ग मे आने वाली मदो के बीच मे अन्तराल हों तो यही माध्यिका के लिए भी सत्य है । जब माध्यिका के आस-पास अन्तराल हो तो प्रयोग के लिए विशेष तौर पर अच्छा प्रत्यय माध्यिका नही है, क्योकि यदि एक या दो मदें श्रेणी मे जोड दी जाएँ या श्रेणी से घटा दी जाएँ तो इसका मूल्य अनियमित हो जाएगा ।

यदि एक बहुलक की स्पष्ट तौर पर परिभाषा की जाए तो उस मूल्य के निकट अन्तराल रहने की आशा नही है । जब बहुलक के समीप अन्तराल विद्यमान हो तो यह बिल्कुल सभव है कि श्रेणी मे इतनी कम मदें हो कि बहुलक की स्पष्ट तौर पर परिभाषा या अर्थ न दिया जा सके ।

प्रतिदर्शों पर आधारित होने पर विश्वस्तता—अध्याय 24 मे हम उस विचलन का विवरण देंगे जिसकी समान्तर माध्य के मूल्यों मे उस समय अपेक्षा की जा सकती है जब वह पुनरावृत्त यादृच्छिक प्रतिदर्शों पर आधारित हो । इस पुस्तक मे माध्यिकाओ या बहुलको के प्रतिदर्शो के विचलन का विवरण नही दिया जाएगा । तो भी एक सामान्य जनसख्या से एक ही आकार के प्रतिदर्शों के लिए, माध्यिका मे समान्तर माध्य की अपेक्षा प्रतिदर्श का विचलन अधिक हो सकता है और बहुलक माध्यिका से अधिक विचलित हो सकता है ।

गणितीय गुणधर्म—समान्तर माध्य के दो महत्त्वपूर्ण गुणधर्म हैं . प्रथम, $\Sigma x=0$, तथा द्वितीय $\Sigma x^2=$न्यूनतम । इस बाद के गुणधर्म के कारण माध्य, प्रसार के मापो के लिए सदर्भ का प्रायिक आधार होता है । माध्य बहुत सी प्रक्रियाओ मे, जो इस पुस्तक के बाद के परिच्छेदो मे आएँगी, एक महत्त्वपूर्ण फलन है । अन्य उपयोगो मे, यह प्रेक्षित आँकडो पर प्रसामान्य वक्र बिठाने के लिए आवश्यक है ।

माध्यिका से विचलनों का योग (चिह्न को उपेक्षित कर) न्यूनतम है । इस कारण से, प्रसार के कुछ माप कभी-कभी माध्यिका पर आधारित किए जाते हैं ।

समुचित माप का चयन—पूर्वगामी मापो का वर्णनात्मक विधियो के तौर पर प्रयोग करके सांख्यिकीविद् के समान यह निर्णय करने की समस्या आ सकती है कि आँकडो के एक दत्त समुच्चय का स्वरूप दिखाने के लिए कौनसा माप प्रयोग मे लाया जाए । साधारण तौर पर केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप जो उसे प्रयोग मे लाना चाहिए, (1) आँकडो के बटन के स्वभाव पर तथा (2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के प्रत्यय पर, जो विशिष्ट प्रयोजन के लिए वाछनीय है, आधारित है ।

यदि वटन, समसित या लगभग ऐसा हो तो तीनो मापो का लगभग एक दूसरे के स्थान पर प्रयोग किया जा सकता है। यदि एक श्रेणी तिरछी हो तो हमे यह ध्यान मे रखना चाहिए कि समान्तर माध्य प्राय प्ररूपी मूल्य नहीं है और बहुलक (जो प्ररूपी है) या माध्यिका का प्रयोग करना अधिक अच्छा हो सकता है। जब चरम विचलन हो या जब विषमागता का सदेह हो तो हम माध्य के स्थान पर माध्यिका का प्रयोग कर सकते है, अथवा एक सशोधित माध्य का प्रयोग किया जा सकता है।

यदि $\bar{X}$ का परिकलन किया जाता है तो जोड प्राप्त करने के लिए उस मूल्य का प्रयोग किया जा सकता है। इस प्रकार यदि वयस्को का औसत भार 150 पाउड है तो 3,000 पाउड उठा सकने की क्षमता वाले एक उत्थापक मे लगभग 20 व्यक्ति लादना सुरक्षित है। (150 पाउड का अक वयस्को के औसत भार के लिए कुछ ऊँचा है, परन्तु यह वह अक है जिसका प्राय उत्थापक क्षमता के परिकलन के लिए प्रयोग किया जाता है। यह स्पष्ट है कि सकेतित सभी 20 व्यक्ति भारी व्यक्ति नही होने चाहिएं।) यदि माप के सबध मे बाद के परिकलन करने है तो माध्य की आवश्यकता हो सकती है। यदि बारबारता बटन के अनुसार एक वक्र खीचना हो तो सभवत माध्य का प्रयोग किया जाएगा। यदि प्रसार के सबध मे अन्त म आँकडो की एक श्रेणी की दूसरी से तुलना करनी हो तो माध्य की आवश्यकता हो सकती है। परन्तु इसका यह अर्थ नही कि दोनो मे से किसी एक या दोनो श्रेणियो का वर्णन करने के लिए माध्यिका या बहुलक का प्रयोग नही करना चाहिए।

एक वर्ग मे किसी व्यक्ति का सापेक्ष स्थान यह बताकार सकेतित किया जा सकता है कि क्या उसका ग्रेड आधे सदस्यो के ग्रेडो से अच्छा है अथवा नही। इस योग्यता क्रम निर्धारण मे माध्यिका का प्रयोग आता है। विद्यार्थियो के विभिन्न अनुपातो के सबध म अन्य विवरण चतुर्थकों, पचमकों, दशमको या शततमको का प्रयोग करके दिए जा सकते है।

यदि हम मोटर चलाने वालो के गैसोलिन के लिए प्ररूपी वार्षिक व्यय जानने की रुचि रखते हो तो हम बहुलक का प्रयोग करना चाहिए।

क्योकि तीनो मापो मे भिन्न प्रत्ययो का समावेश है अत कभी कभी दो या सम्भव हो तो तीनो का प्रयोग करना उचित हो सकता है। माध्य और बहुलक या माध्य और माध्यिका के प्रयोग से हम विद्यमान तिरछेपन की मात्रा का आभास मिलता है, जैसाकि अगले अध्याय म दिखाया जाएगा।

कभी कभी एक श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति का शीघ्र अनुमान करना आवश्यक होता है। ऐसी स्थितियो म, बहुलक का बारबारता बटन से तुरन्त अनुमान लगाया जा सकता है और माध्यिका का या तो सरणी से या बारबारता बटन से शीघ्र अनुमान किया जा सकता है। हाँ, यदि जोड और मदो की सख्या दी हुई हो तो समान्तर माध्य का कुछ सेकड म परिकलन किया जा सकता है।

लघु माध्य

समान्तर माध्य, माध्यिका, तथा बहुलक, अपनी विस्तृत उपयोगिता, सरलता, तथा सामान्य प्रयोज्यता के कारण, केन्द्रीय प्रवृत्ति के प्राय अधिक महत्वपूर्ण माप समझे जाते है। कुछ स्थितिया मे केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्य माप उपयोगी हो सकते हैं और इसलिए हम गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य पर विचार करेंगे। जैसे पहले सकेत किया

गया है, "माध्य" पद का प्रयोग प्राय समान्तर माध्य को निर्दिष्ट करने के लिए किया जाता है, परिणामस्वरूप, किसी अन्य माध्य जैसे गुणोत्तर माध्य या हरात्मक माध्य की ओर सकेत करते समय हमे माप की ओर सदा इसकी पूर्ण पद सज्ञा से सकेत करना चाहिए।

गुणोत्तर माध्य—गुणोत्तर माध्य की "मदो के गुणनफल के N वें मूल" के रूप मे परिभाषा की जाती है। इस प्रकार, चार मदो 5, 8, 10, 12 के लिए गुणोत्तर माध्य है.

$$G = \sqrt[4]{5 \times 8 \times 10 \times 12} = \sqrt[4]{4800} = 8.3$$

यह जानना रुचिकर है कि इन चार मदो का समान्तर माध्य 8.75 है। धनात्मक मूल्यों (सभी एकसमान नही) की किसी श्रेणी के लिए गुणोत्तर माध्य समान्तर माध्य से छोटा है।[7] यदि श्रेणी का एक मूल्य शून्य के बराबर हो तो गुणोत्तर माध्य शून्य के बराबर होगा और इसीलिए अनुपयुक्त होगा। यदि एक या अधिक मूल्य ऋणात्मक हो तो गुणोत्तर माध्य का कभी-कभी परिकलन किया जा सकता है परन्तु वह निरर्थक हो सकता है। इसके प्रयोग मे ये महत्वपूर्ण कमियाँ है।

प्रतीकात्मक दृष्टि से गुणोत्तर माध्य $\sqrt[N]{X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_N}$ है। परिकलन प्राय लघुगणको के द्वारा इस प्रकार किया जाता है।

$$\log G = \frac{\log X_1 + \log X_2 + \log X_3 + \cdots + \log X_N}{N} = \frac{\Sigma \log X}{N}$$

इस प्रकार गुणोत्तर माध्य का लघुगणक मूल्यों के लघुगणको का समान्तर माध्य है।

जब बारबारताएँ विद्यमान हो तो प्रत्येक लघुगणक को तदनुरूप बारबारता मे गुणा करना आवश्यक है। इस प्रकार

$$\log G = \frac{f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + f_3 \log X_3 + \cdots}{N} = \frac{\Sigma f \log X}{N}$$

बारबारता बटन के लिए गुणोत्तर माध्य का प्राय निम्न द्वारा परिकलन किया जाता है (1) प्रत्येक वर्ग के मध्य मूल्य के लघुगणक को सुनिश्चित करके, (2) प्रत्येक लघुगणकीय मध्यमूल्य को इसकी उचित बारबारता से गुणा करके, (3) इन गुणनफलो को जोडकर, (4) मदो की सख्या से भाग करके, तथा (5) निष्कर्ष का प्रति-लघुगणक लेकर। यदि श्रेणी लघुगणकीय दृष्टि से सममित है (अध्याय 23 देखिए) और मदे वर्गों मे समान्तर दृष्टि की बजाय गुणोत्तर दृष्टि से समान रूप से बँटी हो तो वर्गों के मध्य मूल्यो के लघुगणको की बजाय वर्ग सीमाओ के लघुगणको के मध्य-मूल्यो का प्रयोग करना अधिक श्रेष्ठ है। यदि कच्चे आँकडे प्राप्त हैं तो बारबारता बटन का पुनर्निर्माण करना भी उचित है ताकि वर्ग अन्तरालो को गुणोत्तर दृष्टि से समान बनाया जाए, यदि पहले ही ऐसा न किया गया हो।

आपको ध्यान होगा कि समान्तर माध्य मूल्यो के योग को उनकी सख्या से भाग करके आता है, जबकि गुणोत्तर माध्य-मूल्यो के गुणनफल का N वाँ मूल है। जैसा पहले

7 निदर्शन के लिए परिशिष्ट घ, परिच्छेद 9.3 देखिए।

देखा गया है, $\bar{X}$ का N गुणा ΣX है। गुणोत्तर माध्य के लिए, $G^N = X_1 X_2 . X_3$ इत्यादि, अर्थात् गुणोत्तर माध्य की N वी शक्ति मूल्यो के गुणनफल के बराबर होती है। इसमे कुछ रुचिकर बिन्दु उत्पन्न होता है कि एक समान N और समान ΣX वाली सख्याओ की किसी श्रेणी का समान्तर माध्य समान होता है (उदाहरणत, 1 तथा 11, 2 तथा 10, 4 तथा 8, 5 तथा 7, -2 तथा 14 इन सब का समान्तर माध्य 6 है), और समान N और समान गुणनफल वाली सख्याओ की किसी श्रेणी का गुणोत्तर माध्य समान होता है (उदाहरणार्थ, 1 तथा 36, 2 तथा 18, 4 तथा 9 इन सबका गुणोत्तर माध्य 6 है)।

गुणोत्तर माध्य का एक अन्य गुण यह है कि गुणोत्तर माध्य के सबध मे गुणोत्तर माध्य के एक ओर मूल्यो के अनुपातो का गुणनफल गुणोत्तर माध्य के दूसरी ओर मूल्यो के सबध मे गुणोत्तर माध्य के अनुपातो के गुणनफल के बराबर है। उदाहरण के लिए, हम 4, 5, 20, 25 मूल्य ले, जिनका गुणोत्तर माध्य $\sqrt[4]{10000}=10$ है। गुणोत्तर माध्य के सबध मे 4 तथा 5 मूल्यो के अनुपात $\frac{4}{10}$ तथा $\frac{5}{10}$ है, जबकि 20 तथा 25 मूल्यो के सबध मे गुणोत्तर माध्य के अनुपात $\frac{10}{20}$ तथा $\frac{10}{25}$ है। इस प्रकार हमारे पास निम्नलिखित आता है

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{25},$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

इसी प्रकार, अनुपातो को उलट कर हम लिख सकते है

$$\frac{10}{4} \cdot \frac{10}{5} = \frac{20}{10} \cdot \frac{25}{10},$$

$$5=5.$$

निम्न अनुच्छेदो मे कुछ उदाहरणो का विवरण है जिनमे कि गुणोत्तर माध्य उपयोगी है।

(1) गुणोत्तर माध्य का प्रयोग अनुपातो का मध्यमान निकालने के लिए किया जा सकता है। निम्न आंकडो पर विचार कीजिए .

समुदाय	*देशज निवासी*	*विदेशज निवासी*	*देशजों के सबध मे विदेशजों का अनुपात* (*प्रतिशत*)	*विदेशजों के सम्बध मे देशजों का अनुपात* (*प्रतिशत*)
A...	8,000	4,000	50	200
B.	1,500	3,000	200	50

विदेशज जनसख्या के सबध मे विदेशजो के दो अनुपातो का समान्तर माध्य 125 प्रतिशत है। इसी प्रकार, विदेशज जनसख्या के सबध म देशजो के दो अनुपातो का समान्तर माध्य 125 प्रतिशत है ! ये दो औसते एक दूसरे के साथ असगत हैं। यदि हम गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करें तो यह बेतुका परिणाम नही निकलता, क्योकि अनुपातो के दो युगलो मे से प्रत्येक

का गुणोत्तर माध्य $\sqrt{0\,50.\ 2\,00} = 1\,0$ या 100 प्रतिशत है। हाँ, हम दोनो समुदायो के विदेशज निवासियो का योग या औसत, और देशज निवासियो का योग या औसत निकाल सकते थे, इस प्रकार दो ऐसे अनुपात कर सकते थे जो सगत हो। 7,000 विदेशज तथा 9,500 देशज निवासी है, या औसत 3,500 विदेशज तथा 4,750 देशज निवासी है। देशजो के सबध मे विदेशजो का अनुपात

$$\frac{7,000}{9,500} \text{ या } \frac{3,500}{4\,750} = 73\,7 \text{ प्रतिशत है,}$$

और विदेशजो के सबध मे देशजो का अनुपात

$$\frac{9,500}{7,000} \text{ या } \frac{4,750}{3,500} = 135\,7 \text{ प्रतिशत है।}$$

इन दो अनुपातों का गुणनफल 1 है, परन्तु यह अकगणितीय विधि दोनो अनुपातो पर समान भार नही डालती। ध्यान से देखिए, अकगणितीय विधि मे समान्तर माध्यो (या योगो) का अनुपात आता है, जबकि गुणोत्तर विधि मे अनुपातो का गुणोत्तर माध्य आता है। हमारे पास यहाँ दो भिन्न प्रत्यय है। एक दी हुई स्थिति मे किसका प्रयोग करना है यह प्रयोजन पर निर्भर करता है। यदि हम कई एक समुदायो के लिए एक प्ररूपी अनुपात निश्चित करना चाहते है और चाहते है कि वह अनुपात विभिन्न स्थानों मे उपस्थित देशज या विदेशज व्यक्तियो की सख्या से स्वतत्र हो, अर्थात् हम प्रत्येक अनुपात पर समान भार देना चाहते है, तो हम अनुपातो के गुणोत्तर माध्य का प्रयोग कर सकते है। यदि हम जनसख्याओ को अपना प्रभाव डालने की आज्ञा देना चाहते है तो हम योगों या समान्तर माध्यों का अनुपात निर्धारित कर सकते है। प्रश्न यह नही है कि अनुपातो का समान्तर माध्य प्रयोग किया जाए या गुणोत्तर माध्य, वरन् यह है कि समान्तर माध्यो (या योगो) पर आधारित अनुपात का प्रयोग किया जाए या अनुपातो का गुणोत्तर माध्य।

यदि देशजो के सबध मे विदेशजो के दो अनुपातो की अकगणितीय ढग से औसत निकाली जाए, परन्तु उन्हे देशज जनसख्याओ के अनुसार भारित किया जाए तो 73 7 प्रतिशत परिणाम प्राप्त होता है। यदि विदेशजों के सबध मे देशजो के दो अनुपातो की अकगणितीय ढग से औसत निकाली जाए परन्तु विदेशज जनसख्या के अनुसार भारित किया जाए तो हमारे पास 135 7 प्रतिशत आता है। हाँ, ये अक उनके साथ समरूप है जो योगो के अनुपात लेकर प्राप्त किए गए है।

जब हम परिवर्तन के समान अनुपातो पर समान भार डालना चाहते हैं तो गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जा सकता है। कल्पना कीजिए (क) कि दो वस्तुएँ 2 डालर और 10 डालर प्रति इकाई पर बिक रही हैं, (ख) कि बाद की तिथि मे प्रथम वस्तु का मूल्य दुगना हो जाता है जबकि द्वितीय का मूल्य आधा रह जाता है, और इस प्रकार वे क्रमश. 4 डालर तथा 5 डालर पर बिकती है; तथा (ग) कि और बाद की तिथि मे प्रथम वस्तु का प्रारभिक मूल्य आधा रह जाता है और 1 डालर हो जाता है, जबकि दूसरी वस्तु का दुगना हो जाता है और 20 डालर बन जाता है। इन तीन स्थितियो मे समान्तर माध्य (क) 6 डालर; (ख) 4 50 डालर, तथा (ग) 10 50 डालर प्रदान करता है। गुणोत्तर माध्य प्रदान करता है: (क) 4.47 डालर; (ख) 4 47 डालर; तथा (ग) 4 47 डालर। गुणोत्तर माध्य को उचित सिद्ध करने के लिए प्रयोग की गई कल्पना यह कहकर निर्देशित

की गई है कि मूल्य का दुगना मूल्य के आधे को प्रतिसन्तुलित कर देता है, मूल्य का चार गुना प्रारभिक अक के चौथाई मूल्य को प्रतिसन्तुलित कर देता है, और इसी प्रकार किन्ही भी दो अनुपातो के लिए जिनका गुणनफल 1 हो। इस विशेषता की ओर मूल्य सूचकाको के सबध म गुणोत्तर माध्य के सभव प्रयोग के बारे मे पुन सकेत किया जाएगा।

(2) कभी-कभी एक बारबारता बटन सामने आता है जो दाईं ओर को अत्यन्त तिरछा होता है। यदि वर्गों के मध्यमानो का आरेखन करने की बजाय हम मध्यमानो के लघुगणको का प्रयोग करे (अथवा इससे भी अधिक अच्छा, लघुगणकीय मध्यमानो, परिसीमाओ के प्रत्येक जोडे के गुणोत्तर माध्य को, लघुगणकीय X-पैमाने पर आरेखित करें) और इसका परिणाम एक सममित बटन हो तो एक गुणोत्तर विश्लेषण उचित हो सकता है। इसका अधिक पूर्ण विवरण अध्याय 23 मे दिया गया है।

(3) सभवत गुणोत्तर सिद्धान्त का सर्वाधिक होने वाला प्रयोग औसत प्रतिशत परिवर्तन निर्धारण मे सबधित है। यदि एक नगर की एक दिए हुए वर्ष मे जनसख्या 1,00 000 हो और दस वर्ष बाद 1,20,000 हो तो औसत वार्षिक प्रतिशत परिवर्तन क्या था? सम्पूर्ण अवधि म परिवर्तन 20 प्रतिशत था। यदि हम उस अक का दसवाँ भाग या 2 प्रतिशत वार्षिक प्रतिशत वृद्धि के तौर पर लें और प्रति वर्ष पहले के वर्ष की तुलना मे 2 प्रतिशत वृद्धि का सकलन कर तो दूसरा जनसख्या अक 1,21,900 बनता है! स्पष्ट है कि ठीक अक 2 प्रतिशत से थोड़ा कम है क्योंकि हम वास्तव मे चक्रवृद्धि कर रहे हैं। हम औसत वार्षिक प्रतिशत परिवर्तन का सकलन

$$P_n = P_0(1+r)^n,$$

का प्रयोग करके कर सकते हैं, जहाँ P_0 = अवधि के प्रारभ म जनसख्या,

P_n = अवधि के अत मे जनसख्या;

r = दशमलव के तौर पर व्यक्त प्रति वर्ष सापेक्ष वृद्धि (या कमी),

n = वर्ष सख्या।

ऊपर के आँकडो के लिए,

$$1,20,000 = 1,00,000\ (1+r)^{10}$$

लघुगणको के प्रयोग से इसे हल करने से

$5\ 079181 = 5\ 000000 + 10$ लॉग $(1+r)$ प्राप्त होता है।

$$\text{लॉग}\,(1+r) = \frac{0\ 079181}{10},$$

$$= 0\ 0079181.$$

$$1+r = 1.0184,$$

$$r = 1\ 84 \text{ प्रतिशत।}$$

$P_n = P_0\ (1+r)^n$ पद को कभी-कभी चक्रवृद्धि ब्याज की विभिन्न समस्याओ मे इसकी उपयोगिता के कारण चक्रवृद्धि ब्याज सूत्र कहा जाता है। हमने ऊपर इसकी औसत

वार्षिक प्रतिशत वृद्धि[8] को निर्धारित करने के लिए उपयोग किया है। दिखाए गए चार सकेतो मे से किन्ही तीन के मूल्य जानने पर हम चौथे को निकाल सकते है। इस प्रकार हम निर्धारित कर सकते है

(क) औसत वार्षिक प्रतिशत परिवर्तन r

(ख) कुछ निश्चित वर्ष बाद जनसख्या P_n, एक स्थिर सापेक्ष परिवर्तन की कल्पना के आधार पर।

(ग) पुन एक स्थिर सापेक्ष परिवर्तन के आधार पर, वर्ष सख्या n जब तक कि एक नियत जनसख्या प्राप्त न हो जाए।

(घ) कुछ निश्चित वर्ष पूर्व जनसख्या, P_o, यदि प्रतिशत परिवर्तन स्थिर हो।

यह ध्यान मे रखना चाहिए कि जनसख्या के लिए एक स्थिर सापेक्ष परिवर्तन की कल्पना सभवत "नए" देशो को छोडकर किन्ही अन्य के लिए बढी हुई अवधियो के लिए ठीक नही है।

हरात्मक माध्य—हरात्मक माध्य मूल्यो के व्युत्क्रमो के समान्तर माध्य का व्युत्क्रम है। इसका पद निम्नलिखित है

$$H=\frac{1}{\frac{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\cdot\cdot+\frac{1}{XN}}{N}}=\frac{1}{\frac{\Sigma\frac{1}{X}}{N}}.$$

परिकलन के प्रयोजन के लिए, निम्नलिखित रूप का प्रयोग करना अधिक सुविधाजनक है :

$$H=\frac{N}{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\quad\cdot+\frac{1}{X_N}}=\frac{N}{\Sigma\frac{1}{X}}$$

अथवा

$$\frac{1}{H}=\frac{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\cdot\quad\cdot+\frac{1}{X_N}}{N}=\frac{\Sigma\frac{1}{X}}{N}$$

3 और 12 इन दो मूल्यो का हरात्मक माध्य है :

$$\frac{1}{H}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{12}}{2}=\frac{5}{24},$$

$$H=4\ 8$$

8. ऊपर के विवेचन मे हमने दो चुने हुए बिन्दुओ के बीच मे औसत प्रतिशत वृद्धि को मालूम किया। कभी-कभी हम वह औसत प्रतिशत वृद्धि मालूम करना चाहते हैं जो विभिन्न वर्षों के लिए सर्वोत्तम ढग से कई एक मूल्यो का वर्णन करती है। ऐसी औसत किसी श्रेणी के केवल प्रथम और अतिम मूल्यो पर निर्भर नही होती और इसलिए इसके एक प्रतिनिधिक होने की अधिक सभावना है। ऐसी औसत प्राप्त करने के लिए एक वक्र लगाने की विधि अध्याय 13 मे दी है।

इन्ही मूल्यो के लिए, समान्तर माध्य 7 5 है, जबकि गुणोत्तर माध्य $\sqrt{3 \times 12} = 6$ है। मूल्यों की किन्ही श्रेणियो के लिए (सभी समान नही अथवा शून्य को एक मूल्य के रूप मे सम्मिलित न करते हुए) हरात्मक माध्य गुणोत्तर अथवा समान्तर माध्य दोनो से कम है।[9]

बारबारता बटन के लिए हरात्मक माध्य का परिकलन इतना कम होता है कि हम केवल वह विधि नोट करेंगे जिसमे प्रत्येक मध्यमान के व्युत्क्रम को (अथवा वर्ग सीमाओ के व्युत्क्रमो के मध्यमान को) इसकी बारबारता द्वारा गुणा करना, इन गुणनफलो को जोडना, N से भाग करना, तथा जो निष्कर्ष आए उसका व्युत्क्रम लेना आता है।

जबकि हरात्मक माध्य अधिक महत्त्वपूर्ण माप नही है, यह प्राय: भ्रामक है और इसलिए हम कुछ विस्तार सहित व्याख्या देगे और कई सभव प्रयोगो की ओर सकेत करेंगे।

अनुप्रयोग 1 यद्यपि सतरो का प्राय इस ढग से मूल्य तय नही होता, तथापि हम कल्पना कर ले कि सतरो के दो प्रकार 1 डालर के 10 तथा 1 डालर के 20 बिक रहे है। समान्तर माध्य का परिकलन इस प्रकार किया जा सकता है :

$$\bar{X} = \frac{10+20}{2} = 15$$

अर्थात्, 1 डालर के 15, अथवा 0 067 डालर प्रति सतरा। *यदि हम प्रत्येक प्रकार के सतरों के लिए समान द्रव्य खर्च कर तो हमारे लिए प्रति सतरा यह मूल्य देना आवश्यक है।* 30 सतरो मे से प्रत्येक के लिए 0 067 डालर देकर हम कुल के लिए 2 00 डालर खर्च करेंगे। हरात्मक माध्य से भिन्न परिणाम निकलता है

$$H = \frac{2}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}} = \frac{2}{\frac{3}{20}} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

अर्थात्, 1 डालर के $13\frac{1}{3}$ हैं, अथवा 0 075 डालर प्रति सतरा। *यदि प्रत्येक मूल्य पर समान सख्या मे सतरे खरीदे जाते हैं तो प्रति सतरा हमे यह मूल्य देना आवश्यक है।* इस प्रकार यदि हम 15 सतरे 1 डालर के 10 के हिसाब से, तथा 15 सतरे 1 डालर के 20 के हिसाब से खरीदें तो कुल 30 के लिए हम 2 25 डालर खर्च करेंगे। इसी प्रकार यदि हम 30 सतरे 0 075 डालर प्रति सतरे के हिसाब से खरीदे तो कुल के लिए हम 2 25 डालर व्यय करेंगे।

यदि हम प्रत्येक मूल्य पर खरीदी मात्राओ से वजन करें तो हरात्मक माध्य से वही परिणाम निकलेंगे जो समान्तर माध्य से। इस प्रकार

$$H = \frac{30}{10\left(\frac{1}{10}\right) + 20\left(\frac{1}{20}\right)} = 15$$ सतरे प्रति डालर, अथवा 0 067 डालर प्रति सतरा,

प्रत्येक प्रकार के सतरे के लिए समान मुद्रा के व्यय की कल्पना के आधार पर।

यदि मूल्य सामान्य ढग से बताए जाएँ, अर्थात् इतना प्रति दर्जन, तो ये सतरे 1 20 डालर प्रति दर्जन तथा 0 60 डालर प्रति दर्जन के हिसाब से बिक रहे हैं। सरल समान्तर माध्य है :

9. परिशिष्ट घ, अनुभाग 9.4 देखिए।

$$Y = \frac{\text{डालर } 1\ 20 + \text{डालर } 0\ 60}{2} = 0\ 90$$ डालर प्रति दजन, अथवा 0 075 डालर प्रति सतरा।

यह प्रथम हरात्मक माध्य के समान है क्योंकि हम अपने परिकलन म यह कल्पना कर रहे हैं कि प्रत्येक मूल्य पर समान मात्राएँ खरीदी जाती है। (यदि भाव प्रति दजन सतरो के स्थान पर प्रति सतरा हैं तो समान परिणाम प्राप्त होते है।) दूसरी ओर यदि हम विचार करें कि 10 सतरे 1 20 डालर प्रति दजन के हिसाब से खरीदे जाएँ तथा 20 सतरे 0 60 डालर प्रति दजन क हिसाब से खरीदे जाएँ तो हमारे पास

$$Y = \frac{(\text{डालर } 1\ 20 \times 10) + (\text{डालर } 0\ 60 \times 20)}{30} = 0\ 80$$ डालर प्रति दजन अथवा 0 067 डालर प्रति सतरा आता है।

यह परिणाम वही है जो हमारी प्रथम और तृतीय गणनाओ मे प्राप्त हुआ क्योंकि हमने यह कल्पना की है कि प्रत्येक प्रकार के सतरे के लिए मुद्रा की समान मात्राएँ खर्च की जाती हैं।

यदि कीमतें निम्नलिखित रूप मे दी गई है	यदि कल्पना की गई है कि	
	प्रत्येक प्रकार या वस्तु पर मुद्रा की समान रकम खर्च की गई	प्रत्येक कीमत पर प्रत्येक प्रकार या वस्तु की समान इकाइया खरीदी गइ
प्रति इकाई कीमत	1 X मुद्रा की समान रकमो के लिए मात्राओ से भारित (यहा प्रति डालर इकाइया)	I X इकाइयो की सख्या से भारित (या समान रूप से)
	2 H डालरो से भारित (या समान रूप से)	II H इकाइयो की समान सख्याओ के लिए डालरो से भारित (अथवा प्रति इकाई कीमत)
प्रति डालर इकाइयाँ	3 X डालरो से भारित (या समान रूप से)	III X इकाइयो की समान सख्याओ के लिए डालरो से भारित (अथवा प्रति इकाई कीमत)
	4 H मुद्रा की समान रकमो के लिए मात्राओ से भारित (यहाँ प्रति डालर इकाइयाँ)	IV H, इकाइयो की सख्या से भारित (या समान रूप से)

ऊपर के उदाहरण मे हरात्मक माध्य से कोई ऐसी जानकारी प्राप्त नही हुई है जो समान्तर माध्य के प्रयोग से पहले ही प्राप्त न हो चुकी हो। तो भी हरात्मक माध्य उस समय उपयोगी हो सकता है जब आकडे परम्परागत रूप से या सुगमता से प्रति मिनट हल की गई समस्याओ प्रति घण्टा तय किए गए मीलो प्रति डालर खरीदी गई इकाइयो, इत्यादि के रूप मे दिए गए हो।

यदि (क) आंकड कैसे दिए गए है और (ख) कौनसे भारो का प्रयोग करना है पर उचित विचार किया जाए तो समान्तर माध्य और हरात्मक माध्य से सगत परिणाम प्राप्त होते है। कीमतो को उदाहरण के तौर पर लेकर निम्न तालिका म सबध दिखाए गए है। व्यजक 1 2, 3 4 से एक दूसरे के साथ सगत निष्कर्ष प्राप्त होते है। इसी प्रकार, व्यजक I II II IV से सगत निष्कर्ष प्राप्त होते है।

वस्तु A को प्रति डालर 4 इकाइया के हिसाब से, अथवा 0 25 डालर प्रति इकाई के हिसाब मे बिकती हुई तथा वस्तु B को प्रति डालर 10 इकाइया के हिसाब से या 0 10 डालर प्रति इकाई के हिसाब से बिकती हुई विचार कीजिए।

यदि प्रत्यक वस्तु के लिए समान रकमो म मुद्रा खच की जाती है

1 $\bar{X}=\dfrac{(0\ 25\times 4)+(0\ 10\times 10)}{14}=\dfrac{2\ 00}{14}=0\ 1429$ डालर प्रति इकाई, अथवा 1 डालर की 7 इकाइया।

2 $H=\dfrac{2}{1\left(\dfrac{1}{0\ 25}\right)+1\left(\dfrac{1}{0\ 10}\right)}=\dfrac{2}{\dfrac{7}{0\ 50}}=\dfrac{1\ 00}{7}=0\ 1429$ डालर प्रति इकाई, अथवा 1 डालर की 7 इकाइयां।

3 $\bar{X}=\dfrac{(4\times 1)+(10\times 1)}{2}=\dfrac{14}{2}=$ 1 डालर की 7 इकाइयां, या 0 1429 डालर प्रति इकाई।

4 $H=\dfrac{14}{4\left(\dfrac{1}{4}\right)+10\left(\dfrac{1}{10}\right)}=\dfrac{14}{2}=$ 1 डालर की 7 इकाइयां, या 0 1429 डालर प्रति इकाई।

यदि प्रत्यक कीमत पर प्रत्येक वस्तु की समान सख्या मे इकाइयां खरीदी जाती हैं

I $\bar{X}=\dfrac{(0\ 25\times 1)+(0\ 10\times 1)}{2}=\dfrac{0\ 35}{2}=0\ 175$ डालर प्रति इकाई या 1 डालर की 5 71 इकाइयां।

II $H=\dfrac{0\ 35}{0\ 25\left(\dfrac{1}{0\ 25}\right)+0\ 10\left(\dfrac{1}{0\ 10}\right)}=\dfrac{0\ 35}{2}$

$=0\ 175$ डालर प्रति इकाई या 1 डालर की 5 71 इकाइयां।

III $\bar{X} = \dfrac{(4 \times 0.25) + (10 \times 0.10)}{0.35} = \dfrac{2.00}{0.35}$

=1 डालर की 5.71 इकाइयाँ, या 0.175 डालर प्रति इकाई।

IV. $H = \dfrac{2}{1\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{10}\right)} = \dfrac{2}{\frac{14}{40}} = \dfrac{80}{14}$ =1 डालर की 5.71 इकाइयाँ या 0.175 डालर प्रति इकाई।

अभी-अभी जो कुछ कहा गया है उससे यह देखा जा सकता है कि (दोनों में से किसी एक कल्पना के लिए) जब हम समान्तर या हरात्मक विधि से भिन्नों (अनुपातों) की औसतें निकालते हैं तो हम समान्तर माध्य का प्रयोग करते हैं यदि भार हर वाले रूप में हों, हम और हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं यदि भार भाज्य वाले रूप में हों। हाँ, यदि भार भाज्य वाले रूप में हैं तो उन्हें हर के रूप में बदला जा सकता है और समान्तर माध्य का प्रयोग किया जा सकता है।

कल्पना कीजिए कि एक सौदा हुआ जिसमें 40 रूमाल 1 डालर के 10 के हिसाब से और 60 रूमाल 1 डालर के 20 के हिसाब से बेचे गए। अब ऊपर दी गई दोनों में से किसी भी कल्पना में हमारी रुचि नहीं है। जब 40 रूमाल 1 डालर के 10 के हिसाब से और 60 एक डालर के 20 के हिसाब से बिकते हैं तो हम जो चाहते हैं वह मध्यमान कीमत है। दिए हुए भावों का प्रयोग करके (अर्थात् प्रति डालर इकाइयों की संख्या के रूप में) हम मात्रा भारों के साथ हरात्मक माध्य का प्रयोग कर सकते हैं। इस प्रकार

$$H = \frac{100}{40\left(\frac{1}{10}\right) + 60\left(\frac{1}{20}\right)} = \frac{100}{7} = 14\tfrac{2}{7}$$ प्रति डालर, अथवा 0.07 डालर प्रति इकाई।

फिर प्रति डालर इकाइयों के रूप में भावों का प्रयोग करके, हम समान्तर माध्य के द्वारा उसी परिणाम पर पहुँच सकते हैं, यदि हमारे भार प्रत्येक श्रेणी के लिए खर्च की गई मुद्रा की रकमें हैं। इस प्रकार

$$\bar{X} = \frac{(10 \times 4) + (20 \times 3)}{7} = \frac{100}{7} = 14\tfrac{2}{7}$$ प्रति डालर, अथवा 0.07 डालर प्रति इकाई।

यदि हम अपने भाव को प्रति इकाई मूल्य में बदल दें तो हमारे पास 40 रूमाल प्रति 0.10 डालर की दर से और 60 रूमाल प्रति 0.05 डालर की दर से बिकते हैं। अब, हरात्मक माध्य का प्रयोग करके, हम प्रत्येक प्रकार के रूमाल के लिए खर्च की गई मुद्रा की रकम के द्वारा भारित करते हैं। इस प्रकार

$$H = \frac{7}{4\left(\frac{1}{0.10}\right) + 3\left(\frac{1}{0.05}\right)} = \frac{7}{\frac{10}{0.10}} = 0.07$$ डालर प्रति इकाई, अथवा $14\tfrac{2}{7}$ प्रति डालर।

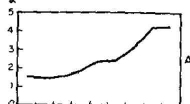
अन्त में, प्रति इकाई मूल्यों के समान्तर माध्य का प्रयोग करके तथा बेची गई मात्राओं द्वारा भारित करके, हमारे पास

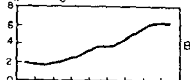
$$\bar{X} = \frac{(0.10 \times 40) + (0.05 \times 60)}{100} = \frac{7}{100} = 0.07$$ डालर प्रति इकाई, अथवा $14\tfrac{2}{7}$ प्रति डालर, आता है।

अनुप्रयोग (2) कभी-कभी एक बारबारता बटन ऐसा भी आ सकता है जो दाईं ओर को इस प्रकार झुका हुआ है कि यदि इसे वर्ग मध्यमानो के व्युत्क्रमों के रूप मे आलेखित किया जाए तो यह लगभग सामान्य रूप धारण कर लेता है। इस प्रकार के उदाहरणो मे हरात्मक प्रतिपादन इंगित किया जा सकता है। परन्तु इस प्रकार की स्थितियाँ कुछ असामान्य हैं और उनका इस पुस्तक म प्रतिपादन नहीं किया जाएगा।

अनुप्रयोग (3) हालबुक वकिंग[10] द्वारा एक लेख मे हरात्मका माध्य का एक रुचिकर और देखने मे सही प्रयोग दिया गया है। आलुओ के मूल्य पर प्रभाव डालने वाले कारकों के अपने अध्ययन मे, वकिंग हरात्मक माध्य का प्रयोग करत हैं, क्योकि जैसा कि वे सकेत करते है, ऋतु के कुछ भाग मे कम कीमत शेष ऋतु के दौरान केवल एक आनुपातिक ऊँचे मूल्य द्वारा पूर्ण होगी। उदाहरणार्थ, हमने एक फसल वर्ष के लिए मासिक मूल्यों को चुना है और उन्हें चार्ट 9 5 मे दिखाया है। जब व्युत्क्रमो अथवा लघुगणको को आलेखित किया है तो *अकगणितीय मूल्यों के आलेखन के समय की अपक्षा वक्र अधिक सीधा हो गया है*, व्युत्क्रमो से सभवत सबसे अधिक सीधी रेखा प्राप्त हुई है। इससे सकेत मिलता है कि एक ऋतु के दौरान आलुओ के औसत मूल्य के माप के तौर पर हरात्मक माध्य अनुचित नहीं है।

कभी-कभी यह तर्क दिया जाता है कि आँकडो की उन श्रेणियो के लिए जिनकी निश्चित निम्न सीमा और अनिश्चित ऊपरी सीमा है गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया *जाना चाहिए। ऐसे आँकडो का एक प्रकार* मूल्य से सबध रखता है, जो 100 के आधार के साथ शून्य पर गिर सकता है परन्तु *असीम (∞) तक चढ सकता है। प्रश्न* ऐसी सीमाओ के अस्तित्व का उतना नही है जितना इस बात का है कि वास्तव मे कौनसे *मूल्य उत्पन्न होते हैं और सीमाएँ कैसे प्राप्त* होती हैं—अकगणितीय ढग से, गुणोत्तर ढग से या व्युत्क्रम ढग मे—*तथा क्या, यदि हम एक बारबारता बटन का प्रतिपादन कर रहे* है तो श्रेणी X के रूप मे लगभग समभित है, लघुX के रूप मे तिरछी, परन्तु लगभग सममित है, या $\frac{1}{X}$ के रूप मे तिरछी परन्तु लगभग सामान्य है।







चार्ट 9 5 आलुओं का प्रति बुशल मूल्य A मूल्य, B मूल्य का लघुगणक, C मूल्य का व्युत्क्रम। आँकडे हालबुक वकिंग से उद्धृत, पृष्ठ 40।

अकगणितीय दृष्टि से, मूल्य की 33 3 प्रतिशत कमी (मूल आधार की) 33 3 प्रतिशत मूल्य वृद्धि से पूरी होती है, 50 प्रतिशत कमी 50 प्रतिशत वृद्धि से पूर्ण

10 हालबुक वकिंग, फैक्टर्स डिटरमिनिंग दि प्राइस आफ पोटैटोज इन सेंट पाल एण्ड *मिनिपोलिस*, तकनीकी बुलेटिन 10, *मिन्नेसोटा विश्वविद्यालय कृषि प्रयोग स्टेशन, पृष्ठ 9 तथा 10।*

होती है, और 90 प्रतिशत गिरावट 90 प्रतिशत वृद्धि से पूरी होती है। इस प्रकार

$$\frac{66\ 7+133.3}{2}=100,$$

$$\frac{50+150}{2}=100,$$

$$\frac{10+190}{2}=100.$$

गुणोत्तर दृष्टि से, मूल्य की 33 3 प्रतिशत कमी (मूल आधार की) 50 प्रतिशत वृद्धि से पूर्ण होती है, 50 प्रतिशत कमी 100 प्रतिशत वृद्धि से पूरी होती है और 90 प्रतिशत गिरावट 900 प्रतिशत वृद्धि से पूरी होती है। इस प्रकार

$$\sqrt{66\ 7\times150}=100,$$

$$\sqrt{50\times200}=100,$$

$$\sqrt{10\times1000}=100.$$

व्युत्क्रम दृष्टि से, मूल्य की 33 3 प्रतिशत कमी (मूल आधार की) 100 प्रतिशत वृद्धि से पूरी होती है, 50 प्रतिशत कमी ∞ तक वृद्धि से पूर्ण होती है और 50 प्रतिशत से अधिक कमी कितनी भी बडी वृद्धि से पूरी नही की जा सकती। इस प्रकार

$$\frac{2}{\frac{1}{66.7}+\frac{1}{200}}=100$$

$$\frac{2}{\frac{1}{50}+\frac{1}{\infty}}=100.$$

केन्द्रीय प्रवृत्ति के कई एक अन्य माप है जो गणितीय तथा सैद्धान्तिक महत्त्व के है न कि व्यावहारिक महत्त्व के। इनमे से एक द्विघातीय माध्य है :

$$\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}}$$

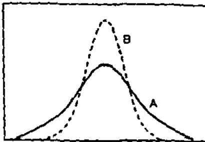
यह मूल्यो के वर्गों के समान्तर माध्य का वर्गमूल है। जब तक कि सभी मूल्य समान न हो द्विघातीय माध्य समान्तर माध्य से बड़ा होता है। द्विघातीय माध्य का यहाँ इसलिए जिक्र किया है क्योकि यह प्रत्यय महत्त्वपूर्ण है। यद्यपि हम "द्विघातीय" अथवा 'माध्य' पद का प्रयोग नही करते, हम शीघ्र ही समान्तर माध्य से विचलनों के द्विघातीय माध्य का परिकलन करेंगे। यह केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप नही होगा, बल्कि प्रमार का माप होगा, हम इसे मानक विचलन, या s कहेंगे और इसकी अभिव्यक्ति है

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}\ .$$

10

विक्षपण, तिरछापन, तथा ककुदता

पिछले अध्याय मे हमने कुछ मापो पर विचार किया है जिनमे बारवारता बटन की केन्द्रीय प्रवृत्ति का वणन करन का प्रयत्न किया गया। बारवारता बटनो के अन्य पहलू भी है जो महत्वपूर्ण है। पहले हम प्रसार या आकडा के प्रसार पर विचार करेंगे। दो काउन्टियो म से प्रत्येक मे एक एकड मे 15 बुशल गेहूँ की औसत उपज हो सकती है, परन्तु यदि आकडो पर सेत के अनुसार विचार किया जाए तो एक काउन्टी मे प्रति एकड 10 से 20 बुशल के सीमा मूल्य दिखाई दे सकते है जबकि दूसरी मे प्रति एकड 5 बुशल जितनी कम उपज तथा 25 बुशल जितनी ऊँची उपज दिखाई पड सकती है। यदि प्रसार का ऐसा अपरिष्कृत माप प्रयोग मे लाया जाए तो यह स्पष्ट है कि प्रथम काउन्टी मे उपज की अधिक साम्यता है। चार्ट 10 1 मे दो सममित वक्र दिखाए गए हैं जिनका माध्य एक है परन्तु जिनमे प्रसार की भिन्नता है।



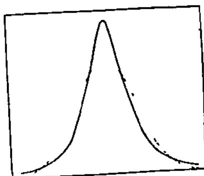
चार्ट 10 1 विभिन्न प्रसारो वाले दो बारवारता वक्र।

यदि एक बारवारता वक्र या बारवारता बटन सममित न हो तो इसे तिरछा या असममित कहा जाता है। अधिकतर बारवारता बटन अधिक या कम तिरछे होते हैं।


चार्ट 10 2 दाई ओर को तिरछा एक वक्र (गहरी रेखा) तथा एक सममित वक्र (टूटी रेखा)।

चार्ट 10 2 मे दो वक्र दिखाए गए हैं जिनमे से एक सममित है और एक तिरछा है। तिरछा वक्र दाई ओर को तिरछा है—जिस दिशा मे अधिक पूँछ दिखाई देती है।

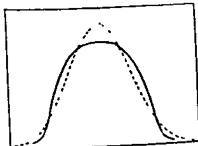
बारबारता बटनों के वक्र समभित हो सकते हैं परन्तु वे विद्यमान ककुदता की मात्रा के सबध मे एक दूसरे से भिन्न हो सकते है। सकेत का आधार अध्याय 23 मे वर्णित सामान्य या मध्यककुदी वक्र है। एक तुगककुदी वक्र का केन्द्रीय भाग सामान्य वक्र की अपेक्षा अधिक तग और उसकी पूँछें अधिक ऊँची होती हैं। इन दोनो की तुलना चार्ट 10 3 मे दिखाई गई है। चार्ट 10 4 मे एक चर्पटककुदी वक्र और एक सामान्य वक्र दिखाया है। जैसा कि स्पष्ट है, चर्पट-ककुदी वक्र का केन्द्रीय भाग अधिक चौडा और पूँछें अधिक नीची है।



चार्ट 10 3 एक तुगककुदी वक्र (घन रेखा) और एक सामान्य या मध्यककुदी वक्र (टूटी रेखा)।

निरपेक्ष विक्षेपण के माप

लैक्सिग्टन, केन्टकी मे माध्य वार्षिक तापमान 55 2 दर्जे है। सैनफ्रासिस्को, कैलिफोर्निया मे माध्य वार्षिक तापमान 55 7 दर्जे है जो लैक्सिग्टन के तापमान से बहुत कम भिन्न है। परन्तु दोनों नगरों की जलवायु सबधी स्थिति के इस पक्ष को दिखाने के लिए ये दो आकडे पर्याप्त नही है। यह विदित है कि लैक्सिग्टन मे तापमान —20 दर्जे तक नीचे गिरता है और 108 दर्जे तक ऊँचा चढता है। सैनफ्रासिस्को मे अकित किया गया कम से कम तापमान 20 दर्जे है और अधिकतम 104 दर्जे है। यह बिल्कुल स्पष्ट है कि सैनफ्रासिस्को की अपेक्षा लैक्सिग्टन मे तापमान की परिवर्तनशीलता अधिक है।



चार्ट 10 4 एक चर्पटककुदी वक्र (घन रेखा) तथा एक सामान्य या मध्यककुदी वक्र (टूटी रेखा)।

आइए, हम एक दूसरे उदाहरण पर विचार करें। एक बडे विभागीय स्टोर के लिए एक क्रेता के सामने स्टोर मे प्रयोग के लिए दो प्रकार के बल्ब प्रस्तुत किए जाते है। प्रत्येक विक्रेता अपने बल्वो के लिए समान औसत वय-अवधि का दावा करता है। क्रेता दोनो कम्पनियो के 40 वाट के लैम्पों के लिए एक परीक्षण प्रयोगशाला मे आंकडे प्राप्त करता है और देखता है कि दोनों प्रकार के बल्वो मे से प्रत्येक की औसत आयु लगभग 1,000 घण्टे है। परन्तु और अधिक आँकडो के परीक्षण मे पता चलता है कि बल्वो की एक श्रेणी मे एक लैम्प 325 घण्टे जला जब कि एक 1,570 घण्टे ठहरा। दूसरी श्रेणी मे एक लैम्प 105 घण्टे ठहरा जब कि एक 2 910 घण्टे बीतने पर बुझा। इस सीमित जानकारी से पहली श्रेणी के लैम्पो मे समानता की अधिक मात्रा का सकेत मिलता है।

परिसर—विक्षेपण का माप मोटे तौर पर न्यूनतम और अधिकतम मूल्यो के सकेत से किया जा सकता है जैसा कि इसमे पूर्व के अनुच्छेदों मे किया गया। यह एक अत्यन्त सरल और समझने के लिए आसान माप है। परिसर म आँकडो का विस्तृत मूल्य मिलता है क्योंकि इसमे वे सीमाएँ सम्मिलित हैं जिनके अन्दर सब मदें आईं। तथापि परिसर की

कुछ हानिया हैं। यह दो चरम मूल्यों[1] व बीच के मूल्यो के प्रबन्ध को महत्त्व देने मे असफल है। साथ ही, यदि सीमा के मूल्यो म से एक भी असाधारण हो तो परिसर भ्रामक है।

सारणी 10 3 म उदार कला विद्यार्थियो के ग्रेडो के सबध म यह कहा गया है कि परिसर 74 95 (प्रथम श्रेणी की निचली सीमा) स 98 95 (अन्तिम श्रेणी की ऊपरी सीमा) तक है। यदि हम मध्यों की ओर सकेत कर सकते हैं, जैसा कि सारणी 8 2 में है, तो परिसर को कुछ अधिक शुद्ध रूप से 76 5 स 98 3 तक कहा जा सकता है। बारबारता बटन म परिसर हम केवल मात्र यह बताता है कि वर्ग मे किसी को 74 95 से कम तथा 98 95 स अधिक ग्रेड नही मिला। परिसर प्राय दो चरम मूल्यो के बीच का अन्तर कहलाता है। विद्यार्थियों के लिए 98 95 — 74 95 — 24 00। परन्तु यदि केवल यह अकेला अक दिया जाता है तो हम यह विदित नहीं होता कि परिसर 0 स 24 है, या 70 से 94 है, या सीमाएँ क्या होगी।

10—90 शततमक परिसर—कभी-कभी हमारी उस परिसर को जानने की रुचि होती है जिसके भीतर मदो का निश्चित अनुपात आता है। एक ऐसा परिसर जो कभी-कभी शैक्षणिक माप म प्रयुक्त होता है 10—90 शततमक परिसर है। यह माप निम्नतम 10 प्रतिशत तथा उच्चतम 10 प्रतिशत छोड़ देता है और व दो मूल्य बताता है जिनके भीतर केन्द्र की 80 प्रतिशत मदे आती है। हा 10वा शततमक प्रथम दशमक है और 90वाँ शततमक 9वाँ दशमक है। तो भी इस माप की ओर 10—90 शततमक परिसर के तौर पर सकेत किया जाता है न कि 1—9 दशमक परिसर के तौर पर, क्योकि पहले से केन्द्रीय 80 प्रतिशत का विचार अधिक स्पष्ट है।

जैसा कि परिसर म है 10—90 शततमक परिसर सीमा के मूल्यो से प्रभावित नही होता। परन्तु इस माप म एक बहुत गभीर कमी है क्योकि यह सब मदो के मूल्यो का प्रयोग नहीं करता। परिणामस्वरूप 10वे शततमक के नीचे (या 90वे शततमक के ऊपर) के मूल्य साथ साथ निकट इकट्ठे हो सकते है या विस्तृत फैले हो सकते है, 10—90 शततमक परिसर पर एकसमान प्रभाव होगा। तथा 10वें शततमक और 90वें शततमक के बीच के मूल्यो की किसी भी सभव ढग से व्यवस्था की जा सकती है जब तक कि वे 10वें और 90वें शततमको के बीच म कहीं है।

चतुर्थक विचलन—अध्याय 9 म Q_1 तथा Q_3 निचले और ऊपरी चतुर्थको, का उल्लेख किया गया था। इन मूल्यों पर आधारित विक्षेपण का एक माप *चतुर्थक विक्षेपण* अथवा अर्ध अन्त चतुर्थक परिसर कहलाता है। यह $Q = \frac{Q_3 \quad Q_1}{2}$ द्वारा प्राप्त होता है।

यदि एक श्रेणी सममित है तो यह स्पष्ट है कि Q_1 और Q_3 माध्यिका से समान अन्तर पर है। अत यदि हम माध्यिका से $\pm Q$ मापें तो हम श्रेणी की 50 प्रतिशत मदें सम्मिलित करते हैं क्योकि हमने पीछे Q_1 और Q_3 की ओर मापा है। यदि एक श्रेणी तिरछी है, जैसाकि प्राय सत्य होता है, तो हम $\pm Q$ माध्यिका के इर्दगिर्द ले सकते हैं, और जबकि हम Q_1 या Q_3 किसी पर भी नहीं पहुँचेंगे, हम लगभग 50 प्रतिशत मदो को सम्मिलित करने की आशा कर सकते है, यदि तिरछापन अधिक न हो।

---

1. यह स्पष्ट होना आवश्यक है कि जब N=2, तो यह कठिनाई नहीं आती। एक सामान्य जनसख्या के छोटे प्रतिदर्शों के लिए यह कम महत्त्वपूर्ण है।

चतुर्थक विचलन, 10—90 शतनमक परिसर के समान, सीमा के मूल्यो से प्रभावित नही होता, और सब मदो के मूल्यो को विचाराधीन लाने मे असफल है।

औसत विचलन—औसत विचलन अथवा माध्य विचलन, जैसाकि यह कभी-कभी कहलाता है, प्राय समान्तर माध्य के सबध मे मापा जाता है। समान्तर माध्य से मदो के विचलनो का, चिह्नो का ध्यान किए बिना, जोड लेकर और उसे मदो की सख्या से भाग करके औसत विचलन प्राप्त किया जाता है। आपको यह स्मरण होगा कि $\Sigma x=0$ और यही कारण है कि विभिन्न x मूल्यो के चिह्नो की ओर ध्यान नही दिया जाता। इस प्रकार,

$$AD=\frac{\Sigma |x|}{N},$$

अथवा, बारबारता बटन के लिए,

$$AD=\frac{\Sigma f|x|}{N},$$

जहाँ | | का अर्थ यह है कि चिह्नो की ओर ध्यान नही दिया गया। क्योकि विचलनो का जोड (चिह्न छोडकर), जब उसे माध्यिका के इदगिर्द लिया जाए, न्यूनतम है, इसलिए माध्य विचलन का परिकलन कभी कभी माध्यिका के सबध से किया जाता है। परन्तु व्यवहार मे प्राय. माध्य का प्रयोग किया जाता है और यदि श्रेणी सममित है तो परिणाम-स्वरूप AD समान होता है। क्योकि AD की उपयोगिता आगे वर्णित प्रसार के माप की तुलना मे सीमित है, इसलिए यहाँ AD का परिकलन नही दिखाया है। एक बारबारता बटन के लिए AD के निर्धारण का निदर्शन मूल अग्रेजी पुस्तक के प्रथम सस्करण मे पृष्ठ 236 और 239 पर किया गया है।

यदि बटन सामान्य है तो 57 5 प्रतिशत मदें $\bar{X} \pm$ AD के परिसर मे सम्मिलित की जाती है। यदि बटन मामूली तिरछा है तो यह लगभग सत्य होगा।

मानक विचलन, असमूहित आंकडे—समान्तर माध्य से विचलनो के चिह्नो को केवल छोड देने के स्थान पर हम विचलनो के वर्ग बना सकते है और इस प्रकार उन सबको धनात्मक बना सकते है। इस प्रकार, हमारे पास एक माप आ सकता है

$$s^2=\frac{\Sigma x^2}{N},$$

विचरण या माध्य वर्ग विचलन। (बाद मे Σx^2 का सकेत करने के लिए हम विचरण पद का प्रयोग करेंगे।) s^2 बटन का दूसरा घूर्ण π_2, भी कहलाता है क्योकि विचलनो को दूसरी शक्ति तक बढा दिया गया है। हम पुस्तक के बाद के भागो मे विचरण का प्रयोग करेंगे।

यहाँ हमारी रुचि इस माप के वर्गमूल मे है,

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}},$$

जिसे मानक विचलन या कभी-कभी मूल-माध्य-वर्ग विचलन कहा जाता है। यह पहले सकेत किया जा चुका है कि जब समान्तर माध्य के इर्दगिर्द लिया जाए तो Σx^2 न्यूनतम

सारणी 10 1

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}$$

व्यजक के प्रयोग मे विज्ञापित उत्पादनो के व्यापार नामो को स्मरण करने मे 15 व्यक्तियो के प्राप्ताकों के लिए मानक विचलन का परिकलन

व्यक्ति	प्राप्ताक X	x	x^2
1	12	−20 87	435 56
2	21	−11 87	140 90
3	21	−11 87	140 90
4	23	− 9 87	97 42
5	27	5 87	34 46
6	28	− 4 87	23 72
7	30	− 2 87	8 24
8	34	1 13	1 28
9	37	4 13	17 06
10	39	6 13	37 58
11	39	6 13	37 58
12	39	6 13	37 58
13	40	7 13	50 84
14	49	16 13	260 18
15	54	21 13	446 48
जोड	493		1,769 78

एस० एन० न्यूहाल तथा एम० एन० हीम के मैमरि वेल्यू आफ एब्साल्यूट साइज इन मैगज़ीन एडवर्टाइजिंग। जरनल आफ एप्लाइड साइकालोजी खण्ड 13 पृष्ठ 62−75। ऊपर के आकडे प्रति 150 वर्ग इंच विज्ञापनो के लिए थे और प्रत्येक का प्रक्षण 5 सेकड के लिए किया गया। अधिकतम सभव प्राप्ताक 81 था।

$$\bar{X}=\frac{493}{15}=32\ 87$$

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}=\sqrt{\frac{1\ 769\ 78}{15}}=\sqrt{117\ 98}=10\ 9$$

है।[2] प्रत मानक विचलन का सदा समान्तर माध्य के सकेत से परिकलन किया जाता है। जैसा कि ऊपर के व्यजक मे सकेत है, s के परिकलन म आने वाले पग हैं

(1) $\bar{X}$ से प्रत्येक मद का विचलन x निर्धारित कीजिए,

(2) इन विचलनो के वर्ग बनाइए,

(3) उनका जोड कीजिए,

---

2 निदर्शन के लिए, देखिए परिशिष्ट, ग परिच्छेद 10 1

(4) इस योग को N से भाग कीजिए,
(5) वर्गमूल निकालिए।

अवर्गित आँकडो की एक श्रेणी के लिए s की परिकलन तालिका 10 1 मे दिखाई है। इस प्रविधि मे प्रत्येक पद के लिए x का परिकलन आता है और यदि मदे अधिक सख्या मे हो तो यह कुछ परिश्रमपूर्ण प्रविधि होगी। s का मूल्य, प्रत्येक x का परिकलन किए बिना, निम्न व्यजक[3] के द्वारा प्राप्त किया जा सकता है

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

इस छोटी विधि से s के परिकलन का निरूपण सारणी 10 2 मे किया गया है। ध्यान दीजिए, कि सशोधन $\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2$ घटाया गया है। यह सर्वदा सत्य है। वर्गीकृत विचलनो का जोड उस समय न्यूनतम होता है जब वे $\bar{X}$ के इर्दगिर्द लिए गए हो। परन्तु हमने अपने विचलन कुछ अन्य मूल्यो के इर्दगिर्द लिए (इस उदाहरण मे, 0) और ये वर्गित विचलन इसलिए बहुत बडे है।

सारणी 10 1 के सकेत से यह दिखाई देगा कि $\bar{X}$ का मूल्य दो दशमलव तक पूर्णांकित किया गया और इस प्रकार x तथा x^2 का प्रत्येक मूल्य एक सन्निकटन है। यदि $\bar{X}$ तथा x पर्याप्त अको तक दिखाए गए है तो दोनो विधियो से परिणाम समान होगा। यहाँ दोनो विधियो से परिणाम 10 9 आता है।

यहाँ यह ध्यान करना अच्छा होगा कि s प्रतिदर्श मे प्रसार का माप करता है। अध्याय 24 मे हम σ, जनसख्या मानक विचलन, और एक प्रतिदर्श पर आधारित जनसख्या मानक विचलन के एक अनुमान σ, का विवरण देंगे।

मानक विचलन, समूहित आकडे—s की विशेषताओ पर विचार करने से पूर्व आइए हम देखें कि एक बारबारता बटन के लिए s का परिकलन कैसे किया जाए। क्योकि बारबारताएँ उपस्थित है,

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}},$$

जहाँ x माध्य से वर्ग मध्यमान के विचलन का प्रतिनिधित्व करता है। सारणी 10 3 उदार कला विद्यार्थियो के लिए s के परिकलन का निरूपण करती है। यह पर्याप्त स्पष्ट है कि यह विधि, जिसमे कई x मूल्यो का निर्धारण आता है, जटिल है।

s के लिए एक छोटी विधि प्राप्य है जिसमे किसी वर्ग का मध्य-मान कल्पित माध्य के रूप मे लेने, इस मूल्य के इर्द-गिर्द विचलनो पर कार्य करने और आवश्यक शोधन करने की अनुमति है। व्यजक है

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}.$$

---

3 इस व्यंजक प्रमाण के लिए परिशिष्ट घ, परिच्छेद 10 2 देखिए।

सारणी 10 2

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

व्यजक के प्रयोग से विक्षापित उत्पादनो के व्यापार नामो को स्मरण करने मे 15 व्यक्तियो के प्राप्तांको के लिए मानक विचलन का परिकलन

व्यक्ति	प्राप्तांक X	X
1	12	144
2	21	441
3	21	441
4	23	529
5	27	729
6	28	784
7	30	900
8	34	1 156
9	37	1 369
10	39	1,521
11	39	1,521
12	39	1 521
13	40	1,600
14	49	2,401
15	54	2,916
कुल	493	17 973

आंकड़े सारणी 10.1 वाले स्रोत मे लिए गए।

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}=\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}-\sqrt{\frac{17{,}973}{15}-\left(\frac{493}{15}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1\ 198\ 20-1{,}080\ 22}=\sqrt{117\ 98}$$

$$\approx 10\ 9$$

प्रक्रिया को और छोटा करने के लिए, विचलनो को वर्गो के रूप मे लिया गया है जिससे आता

$$s=i\sqrt{\frac{(\Sigma fd)^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2},$$

है,[4] जिसमे d' कल्पित माध्य से वर्ग मध्य-मान के विचलन का वर्गो के रूप मे सकेत करता

4 निरूपण के लिए, परिशिष्ट घ परिच्छेद 10 2 देखिए।

है और i वर्ग-अन्तराल है। यह ध्यान करना रुचिकर है कि शोधन कारक $\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2$ छोटी विधि से समान्तर माध्य के परिकलन म प्रयुक्त शोधन कारक का वग है। छोटी प्रविधि से s का परिकलन सारणी 10 4 मे दिखाया गया है।

मानक विचलन के गुणधम—निरपक्ष विक्षपण विभिन्न वर्णित मापो म से मानक विचलन (और इसका वर्ग, प्रसरण) सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण है। इसके बाद वर्णित विभिन्न साँख्यिकीय विधियो के सबध म इसका प्रयोग किया जाएगा। एक महत्वपूर्ण विचार यह है कि यह ग्रध्याय 23 मे वर्णित सामान्य वक्र और विभिन्न तिरछे वक्रो के लिए समीकरण मे आने वाले कारको म से एक है। इसका व्यापार चक्र का विश्लेषण के सबध मे और सहसबध मे विशिष्ट साख्यिकीय मापो की विश्वस्तता का आकने मे भी प्रयोग किया जाता है।

सारणी 10 3

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}}$$

व्यजक के प्रयोग द्वारा रूगस स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातको के ग्रेडो के लिए मानक विचलन का परिकलन

ग्रेड	विद्यार्थियो की सख्या f	वर्गो के मध्य मान X	$x=X-\bar{X}$	x^2	fx^2
75 0—76 9	3	75 95	− 9 22	85 0084	255 0252
77 0—78 9	23	77 95	− 7 22	52 1284	1,198 9532
79 0—80 9	52	79 95	− 5 22	27 2484	1 416 9168
81 0—82 9	61	81 95	− 3 22	10 3684	632 4724
83 0—84 9	74	83.95	− 1 22	1 4884	110 1416
85 0—86 9	61	85 95	+ 0 78	0 6084	37 1124
87 0—88 9	53	87 95	+ 2 78	7 7284	409.6052
89 0—90 9	35	89 95	+ 4 78	22 8484	799 6940
91 0—92 9	23	91 95	+ 6 78	45 9684	1,057 2732
93 0—94 9	15	93 95	+ 8 78	77 0884	1,156 3260
95 0—96 9	7	95 95	+10 78	116 2084	813 4588
97 0—98 9	2	97 95	+12 78	163 3284	326 6568
कुल	409				8 213 6356

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}}=\sqrt{\frac{8\ 213\ 6356}{409}}=\sqrt{20\ 0822}=4\ 48$$

$\bar{X}$ = 85 17

सारणी 10 4

$$s = i\sqrt{\frac{\Sigma f(d)^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

ध्यजक के प्रयोग से हार्स यूनिवर्सिटी के 1965 के व्यापारी उदार कला ग्रेडों के लिए मानक विचलन का परिकलन

ग्रेड	विद्यार्थियों की संख्या f	d	fd	$f(d)^2$
75 0—76 9	3	−4	− 12	48
77 0 —78 9	23	−3	− 69	207
79 0—80 9	52	−2	−104	208
81 0—82 9	61	−1	− 61	61
83 0—84 9	74	0		
85 0 – 86 9	61	+1	+ 61	61
87 0—88 9	53	+2	+106	212
89 0—90 9	35	+3	+ 105	315
91 0—92 9	23	+4	+ 92	368
93 0—94 9	15	+5	+ 75	375
95 0—96 9	7	+6	+ 42	252
97 0—98 9	2	+7	+ 14	98
कुल	409		+249	2,205

$$s = i\sqrt{\frac{\Sigma f(d)^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{2{,}205}{409} - \left(\frac{249}{409}\right)^2},$$

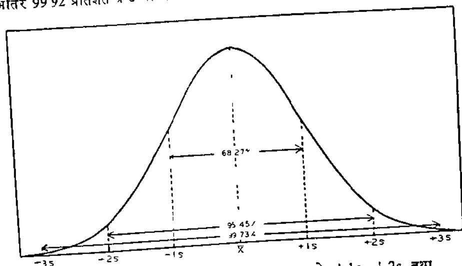
$$= 2\sqrt{5\ 020561} - 2(2\ 241),$$

$$= 4\ 48$$

आँकड़ों की श्रेणी के प्रसार मे से मानक विचलन सर्वाधिक बहुलता से प्रयुक्त होने वाला माप है। यदि $\pm s$ को एक सामान्य बटन के समान्तर माध्य से मापा जाए तो 68 27 प्रतिशत मदें सम्मिलित होती है, $X \pm 2s$ के परिसर मे 95 45 प्रतिशत सम्मिलित होती है, और $\bar{X} \pm 3s$ मे 99 73 प्रतिशत[5] या लगभग सभी मदें सम्मिलित होती है। चार्ट 10 5 मे जो अभी-अभी कहा गया है उसका निरूपण है। अभी दी गई प्रतिशतताओं का सकेत एक सामान्य वक्र की ओर है। यदि बटन तिरछा हो तो ये प्रतिशतताएँ केवल लगभग ठीक होंगी। विद्यार्थियों के ग्रेडों के लिए (सारणी 10 4), $\bar{X} \pm s$ है 85.17 ±

5 परिशिष्ट ङ देखिए जिसमे सामान्य वक्र के केन्द्रीय भाग के आधे मे क्षेत्रफल दिए गए हैं। अधिक शुद्ध रूप से 68 27 दुगना है 34 13447 का, 95 45 दुगना है 47.72499 का, 99 73 दुगना है 49 86501 का।

4.48 – 80 69 तथा 89.65 । सारणी 10 4 में विद्यार्थियों का, जो 80 69 और 89 65 के बीच में आते है, अनुपात निम्नांकित रूप से जानने के लिए हम पहले 80.69 और 80.95 के बीच मे आने वाली संख्या (तीसरे वर्ग की ऊपरी सीमा) निर्धारित करते है जो 6 8 है; तब हम अगले चार वर्गों में सब बारंबारताएँ सम्मिलित करते है जिसके बाद हम 88.95 (आठवें वर्ग की निचली सीमा) और 89.65 के बीच की संख्या का परिकलन करते है जो 12.3 है। योग 268 1 या 65 6 प्रतिशत है। $\bar{X}\pm 2s$ के भीतर (अर्थात् 76 21 से 94 13 तक) हमें 392.0 या 95 8 प्रतिशत ग्रेड प्राप्त हैं। $\bar{X}\pm 3s$ (71.73 से 98 51 तक) के भीतर 99 92 प्रतिशत ग्रेड सम्मिलित हैं।



चार्ट 10.5 एक सामान्य वक्र में समान्तर माध्य के $\pm 1s$, $\pm 2s$, तथा $\pm 3s$ के भीतर सम्मिलित मदों का अनुपात।

बाद के अध्यायों में सामान्य वक्र पर विचार करने में हम माध्य के $\pm s$, $\pm 2s$, तथा $\pm 3s$ में सम्मिलित अनुपातिक क्षेत्रों तक अपने आपको सीमित नहीं रखेंगे, परन्तु s के किन्हीं वाछित गुणजों पर विचार करेंगे। उदाहरणार्थ, बाद में हमारी यह जानने में रुचि होगी कि 95 प्रतिशत मदें $\bar{X}\pm 1\ 96s$ के भीतर पाई जाएँ और 99 प्रतिशत $\bar{X}\pm$ 2 58s के भीतर हों। वास्तव में हमारी अधिक रुचि वर्णित सीमाओं, अर्थात् 5 प्रतिशत और 1 प्रतिशत, के परे के अनुपातों में होगी।

निरपेक्ष विक्षेपण का विषय छोड़ने से पूर्व यह संकेत करना रुचिकर हो सकता है कि मानों की किसी श्रेणी के लिए, फिर उनका बटन चाहे कैसे भी क्यों न हो, चेबीचैफ की असमता से यह दिखाया जा सकता है कि $\bar{X}\pm Ms$ की सीमाओं के भीतर आने वाले मानों का अनुपात (जहाँ M का मूल्य 1 से अधिक है) $1-\frac{1}{M^2}$ से अधिक होगा, और $\bar{X}\pm Ms$ की सीमाओं के परे का अनुपात $\frac{1}{M^2}$ से कम होगा। यदि एक बटन एक-बहुलकी है और यदि बहुलक और माध्य के बीच का अन्तर s से अधिक नहीं है तो कैम्प-मीडैल असमता कहती है कि $1-\frac{1}{2.25M^2}$

से अधिक मान $\bar{X} \pm Ms$ के भीतर है और $\frac{1}{2.25M^2}$ से कम मान $\bar{X} \pm Ms$ से परे पड़ते है।

जितना अधिक एक श्रेणी का विक्षेपण होगा, उतना ही अधिक s का मूल्य होगा। मापी गई विशेषता की साम्यता के माप के तौर पर, जितना कम s का मूल्य होगा उतनी ही अधिक साम्यता होगी। यह प्रतिलोम सबध दूर रखने के लिए, कभी-कभी एक सुधार जिसे *सूक्ष्मता का माप* कहा जाता है, प्रयोग किया जाता है, विशेषकर भौतिक मापो की श्रेणी की सूक्ष्मता के सबध मे। यह माप $h^2 = \frac{1}{2s^2}$ है। यह सामाजिक विज्ञानो मे सांख्यिकीय कार्य मे प्राय प्रयोग मे नही आता।

सापेक्ष विक्षेपण के माप

पहले के अनुच्छेदो मे हमने निरपेक्ष विक्षेपण के मापो का विवेचन किया है जिनमे से प्रत्येक को समस्या की इकाइयो के रूप मे व्यक्त किया गया है। ये इकाइयाँ डालर, पाउड, इच, प्रतिशतताएँ इत्यादि हो सकती है। जब हम दो या अधिक श्रेणियो के प्रकारो की तुलना करना चाहते है तो इस प्रकार के माप का प्रयोग, हो सकता है, वाछनीय हो या न हो। दो या अधिक श्रेणियो के विक्षेपणो की तुलना का तात्पर्य तीन सभव स्थितियाँ हो सकती हैं

(1) तुलना की जाने वाली श्रेणियो को समान इकाइयो मे व्यक्त किया जाए और माध्य आकार मे समान, या लगभग समान, हो सकते है। उदार कला विद्यार्थियो के ग्रेडो का माध्य 85.17 आया और मानक विचलन 4.48 हुआ। यदि एक अन्य स्नातक होने वाली कक्षा के लिए $\bar{X} = 85.05$ तथा $s = 4.25$ हुआ तो यह स्पष्ट है कि द्वितीय कक्षा कम विक्षेपण दर्शायेगी।

(2) तुलना की जाने वाली श्रेणियो को समान इकाइयो म व्यक्त किया जा सकता है परन्तु समान्तर माध्य भिन्न हो सकते है। कुछ वर्ष पहले एक टायर कम्पनी ने मोटर गाडी के टायरो के लिए एक नए प्रकार की डोरी विकसित की। नई डोरी साधारण डोरी से इस दृष्टि से बढिया थी कि यह अधिक खिच सकती थी और इसकी नति आयु अधिक लम्बी थी। कपास की फैक्टरी मे प्राप्त हुई डोरी पर टायरो मे गढाई से पूर्व किए गए परीक्षणो से नई डोरी की नति आयु के सबध मे पता चला

$\bar{X} = 138.64$ मिनट, तथा $s = 15.27$ मिनट,

जब कि सामान्य डोरी के आँकडे थे

$\bar{X} = 87.66$ मिनट, तथा $s = 14.12$ मिनट।

यदि हम दोनो s मानो की तुलना करें तो यह प्रतीत होता है कि नति जीवन की दृष्टि से नई डोरी सामान्य डोरी की अपेक्षा अधिक परिवर्तनशील है। तो भी यह ध्यान देना आवश्यक है कि नई डोरी का औसत नति जीवन सामान्य डोरी की अपेक्षा कही अधिक है। इस बात पर विचार करते हुए हम सापेक्ष विक्षेपण का एक माप निकाल सकते है,

$$V = \frac{s}{\bar{X}}.$$

यह विचरण गुणाक है और इसे प्राय प्रतिशतता के तौर पर व्यक्त किया जाता है। नई डोरी के लिए

$$V = \frac{15\ 27}{138\ 64} = 0\ 1101 \text{ अथवा } 11\ 0 \text{ प्रतिशत,}$$

जबकि सामान्य डोरी के लिए

$$V = \frac{14\ 12}{87\ 66} - 0\ 1611 \text{ अथवा } 16\ 1 \text{ प्रतिशत।}$$

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि नति जीवन का सापेक्ष विचरण नई डोरी के लिए सामान्य डोरी की अपेक्षा कही कम है।

चार्ट 10 6 भी दो भिन्न माध्य मानो वाली श्रेणियो क विक्षेपणो की तुलना का निदर्शन करता है। परिच्छेद A मे समान निरपक्ष विक्षेपणा परन्तु भिन्न सापक्ष विक्षेपणो वाले दो बटनो के वक्र हैं। परिच्छेद B मे नितान्त भिन्न निरपक्ष विक्षेपण किन्तु समान सापेक्ष विक्षेपण वाले दो बटनो के वक्र है। यदि शून्य वा समतल पैमाने पर दिखाया जाता है जैसा कि चार्ट 10 6 मे है तो एक श्रेणी के सापेक्ष विक्षपण का एक बहुत मोटा दृष्टि प्रभाव हो सकता है। इस कारण मे कुछ साख्यिकीविदा का विचार है कि शून्य को समतल पैमाने पर दिखाना वाछनीय है। परन्तु यह बहुत महत्त्वपूर्ण वात प्रतीत नही होती, क्योकि सापेक्ष विक्षेपण को सर्वोत्तम ढग से केवल लगभग रूप से ही देखा जा सकता है। कभी-कभी, मूल इकाइयो के रूप मे नही बल्कि माध्य की प्रतिशतताओ के तौर पर व्यक्त वर्ग अन्तरालो से बारबारता बटन बनाए जाते है जबकि अन्तराल के कुछ सुविधाजनक आँकडे, जैसे कि माध्य का 10 प्रतिशत, होते हैं। यदि दो ऐसे बटन एक चार्ट पर अकित किए जाएँ तो उनके सापक्ष विक्षेपणो की दृष्टिगत तुलना करना सरल है।

(3) तुलना की जाने वाली श्रेणी को विभिन्न इकाइयो मे व्यक्त किया जा सकता है। ऐसी स्थिति म मानक विचलनो की सीध तुलना नही की जा सकती। पुरुष औद्योगिक श्रमिको[6] की एक सरया के अध्ययन से प्रति मिनट 81 1 स्पदन औसत नाडी दर और प्रति मिनट लगभग 12 2 स्पदन के मानक विचलन का पता चला। ऊँचाई के मापो मे $X =$ 66 9 इच और $s = 2\ 7$ इच विदित हुए। ऊँचाई के मापो मे छोटी सख्या मे ऐसे व्यक्ति भी आए जिनकी नाडी दर नही मापी गई। अपने उदाहरण के प्रयोजन के लिए आइए हम इस कठिनाई को छोड दे। औद्योगिक श्रमिको म नाडी दर की दृष्टि से अधिक भिन्नता है या ऊँचाई की दृष्टि से ? स्पष्ट है कि भिन्न इकाइयो मे होन के कारण दोनो मानक विचलनो की तुलना नही की जा सकती। विभिन्नता के दो गुणाको का परिकलन करन से, नाडी दर के लिए

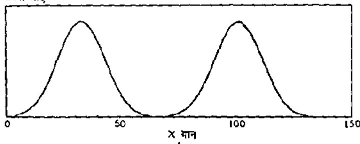
$$V = \frac{12\ 2}{81\ 1} = 0\ 149, \text{ अथवा } 14\ 9 \text{ प्रतिशत,}$$

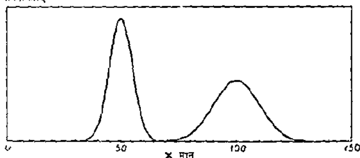
तथा ऊँचाई के लिए

$$V = \frac{2\ 7}{66\ 9} = 0\ 040, \text{ अथवा } 4\ 0 \text{ प्रतिशत}$$

6 ए हैल्थ स्टडी ऑफ टॅन थाउजेन्ड मेल इडस्ट्रियल वर्कर्ज, पृष्ठ 45 तथा 59, सयुक्त राज्य जन स्वास्थ्य सेवा, पब्लिक हैल्थ बुलेटिन, 162 पर आधारित आँकडे

का पता चलता है। स्पष्ट है कि मनुष्यों के इस दल के लिए नाड़ी दर ऊँचाई की अपेक्षा अधिक विक्षेपणशील है।





चार्ट 10 6 भिन्न समान्तर माध्यों वाली श्रेणियों के विक्षेपणों की तुलनाएँ। A समान निरपेक्ष विक्षेपण, भिन्न सापेक्ष प्रसार वाम वक्र, $\bar{X}=33$, $s=10$, $V=30\,3$ प्रतिशत, दक्षिण वक्र, $\bar{X}=101$, $s=10$, $V=9\,9$ प्रतिशत। B भिन्न निरपेक्ष विक्षेपण, समान सापेक्ष विक्षेपण वाम वक्र, $\bar{X}=50$, $s=5$, $V=10$ प्रतिशत, दक्षिण वक्र, $\bar{X}=100$, $s=10$, $V=10$, प्रतिशत। (परिच्छेद A और B के ऊर्ध्वाधर पैमाने भिन्न हैं क्योंकि इनकी तुलना अपेक्षित नहीं है। तथापि यदि परिच्छेद B का ऊर्ध्वाधर पैमाना 50 प्रतिशत बढ़ा दिया जाए तो सब वक्रों का क्षेत्रफल समान हो जाएगा।)

सापेक्ष विक्षेपण के हमारे माप के कुछ-कुछ समान एक निश्चित मान को माध्य से उसके अपसरण के रूप में तथा श्रेणी के विक्षेपण के रूप में भी व्यक्त करने की संभावना है। जब हम केवल एक मान का विचार करते हैं अथवा एक ही श्रेणी के दो मानों की तुलना करते हैं तो इस प्रकार की विधि विशेष रूप से उपयोगी नहीं होती। इसकी उपयोगिता तब स्पष्ट हो जाती है जब हम भिन्न श्रेणियों के दो मानों की तुलना करना चाहते हैं और जब वे दो श्रेणियाँ (1) $\bar{X}$ अथवा s अथवा दोनों की दृष्टि से भिन्न हों, अथवा (2) विभिन्न इकाइयों में व्यक्त की गई हों। कल्पना कीजिए कि एक विशेष विद्यार्थी ने बुद्धि-परीक्षण में 180 का स्तर प्राप्त किया और उसके वर्ग से $\bar{X}=160$ तथा $s=15$ प्राप्त हुए। इसी विद्यार्थी ने इतिहास में 86 का स्तर प्राप्त किया और वर्ग से $\bar{X}=70$ और $s=12$ प्राप्त हुए। हमारी यह जानने में रुचि है कि उसकी सापेक्ष स्थिति बुद्धि-परीक्षण में श्रेष्ठ है या इतिहास में। बुद्धि-परीक्षण में वह माध्य से 20 बिन्दु ऊपर था और इतिहास में वह

माध्य से 16 बिन्दु ऊपर था। तथापि ये विचलन तुलना योग्य नहीं है परन्तु इन्हें अपने-अपने मानक विचलनों से माप कर तुलना योग्य बनाया जा सकता है। इस प्रकार

$$\text{बुद्धि परीक्षण} \quad \frac{X-\bar{X}}{s} = \frac{180-160}{15} = \frac{+20}{15} = +1.33,$$

$$\text{इतिहास} \quad \frac{X-\bar{X}}{s} = \frac{86-70}{12} = \frac{+16}{12} = +1.33$$

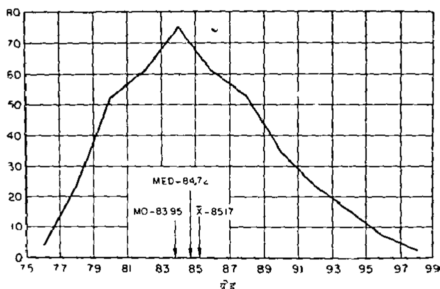
स्पष्ट है कि वह विद्यार्थी इतिहास में और बुद्धि परीक्षण में समान सापेक्ष स्थिति अर्थात् प्रत्येक में माध्य से +1.33s अधिक दर्शाता है। इस विधि की उपयोगिता किसी भी प्रकार से शिक्षा क्षेत्र तक ही सीमित नहीं है। परन्तु परीक्षण सामग्री के साथ प्राय इसका प्रयोग होता है और तब इसे "मानक अंक" कहा जाता है।

तिरछापन

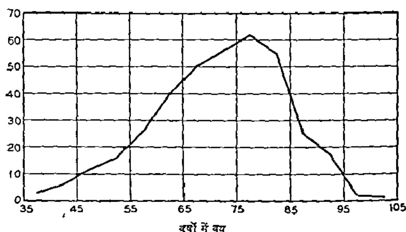
जब एक श्रेणी सममित नहीं है तो इसे असममित अथवा *तिरछी* कहते है। चार्ट 10.2 में एक तिरछे वक्र को एक सममित वक्र के संबंध में दिखाया गया। उदार कला छात्रों के ग्रेडों का वक्र (चार्ट 10.7) तिरछा है। तिरछेपन के माप से न केवल तिरछेपन की मात्रा का बल्कि उसकी *दिशा* का भी संकेत मिलता है। एक श्रेणी चरम मूल्यों की दिशा में तिरछी कही जाती है अथवा, यदि वक्र के रूप में कहा जाय, तो अतिरिक्त सिरे की दिशा में। इस प्रकार जिन दो वक्रों की ओर ऊपर संकेत किया गया है वे दानों निश्चित रूप में अथवा दाहिनी ओर तिरछे है। सामाजिक विज्ञानों म आने वाले अधिकतर तिरछे वक्र दाहिनी ओर को तिरछे होते है। चार्ट 10.8 के समान, बाईं ओर का तिरछे, वक्र कम ही होते है और विशेष रूप से बाइ ओर को तिरछे आँकडे और भी कम मिलते हैं।

परन्तु बहुत सी श्रेणियाँ विशेष रूप मे दाइ ओर को ही तिरछी होती है। उदाहरणार्थ मजदूरी या वेतनों के बारबारता बटन बिजली का प्रयोग (चार्ट 22.13 देखिए), वयस्क पुरुषो के तोल और अनेक चर अन्य। स्तरो के बटन दाइ ओर को साधारण तिरछे अथवा लगभग सममित हो सकते हैं। विद्यार्थियो के ग्रेडो की दिशा म तिरछापन अंशत इस तथ्य के कारण है क्योंकि हम केवल उन्ही मनुष्यो पर विचार कर रहे है जो कि पूर्व के तीन वर्षो मे बच गए ये जब कि कुछ कम योग्य छोड दिए गए थे। चार्ट 10.8 म अमरीकी आविष्कारकों की मृत्यु के समय आयुओ का बटन विशेष रूप से बाईं ओर का तिरछा हो सकता है क्योंकि कम आयु वाले व्यक्तियो के नाम से प्राय पर्याप्त आविष्कार नहीं होते कि उनको "आविष्कारकों" की श्रेणी म लाया जाए अथवा तिरछापन इस तथ्य के कारण हो सकता है कि समय तत्त्व उपस्थित है—इस अध्याय म सम्मिलित आविष्कारकों में से लगभग पाँचवें भाग का जन्म 1800 से पूर्व हुआ था।

तिरछेपन का निरपेक्ष का माप—इससे पूर्व के अध्याय म यह संकेत किया गया था कि चरम मानो की उपस्थिति से बहुलक पर प्रभाव नहीं पडता, उनकी स्थिति म केवल माध्यिका पर प्रभाव पडता है, और समान्तर माध्य चरमताओ के आकार से प्रभावित होता है। परिणामस्वरूप तिरछेपन को मापने के लिए हम बहुलक और माध्य का प्रयोग कर सकते हैं। तब हम कह सकते हैं कि तिरछापन=माध्य—बहुलक। परन्तु इस प्रकार के माप की कुछ कमियाँ हैं। प्रथम, निरपेक्ष तिरछेपन का माप होने के कारण यह समस्या की



चार्ट 10 7. रुगर्स स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 के उदार कला स्नातको के ग्रेडों के समान्तर माध्य, माध्यिका, और बहुलक की स्थिति ।



चार्ट 10 8. 371 अमरीकी आविष्कारक की मृत्यु के समय आयु ।
आंकड़े *अमेरिकन सोश्योलॉजिकल रिव्यू*, खण्ड 2, संख्या 6, पृष्ठ 837—849 में सनफोर्ड विंस्टन द्वारा लिखित "बायो-सोशल कैरेक्टरिस्टिक्स ऑफ अमेरिकन इन्वेन्टर्ज" से उद्धृत ।

सारणी 10 5

371 अमरीकी आविष्कारकों की मृत्यु के समय वय के लिए विभिन्न मापों का परिकलन

मृत्यु के समय आयु वर्गीम	f	d	fd	$f(d')^2$	$f(d)^3$
35 और 40 से कम	3	−6	−18	108	−648
40 और 45 से कम	6	−5	−30	150	−750
45 और 50 से कम	12	−4	−48	192	−768
50 और 55 स कम	16	−3	−48	144	−432
55 और 60 से कम	26	−2	−52	104	−208
60 और 65 से कम	40	−1	−40	40	−40
65 और 70 से कम	50	0	0	0	0
70 और 75 से कम	56	1	56	56	56
75 और 80 से कम	62	2	124	248	496
80 और 85 से कम	55	3	165	495	1,485
85 और 90 से कम	25	4	100	400	1,600
90 और 95 से कम	17	5	85	425	2,125
95 और 100 से कम	2	6	12	72	432
100 और ऊपर*	1	7	7	49	343
योग .	371		+313	2,483	+3,691

*इस वर्ग ने अपना मध्य मान 102 5 होने की कल्पना की ।

वाकड *अमरिकन सोश्योलाजिकल रिव्यू*, खण्ड 2 अक 6 पृष्ठ 848 में प्रकाशित सनफोर्ड विस्टन के 'बायो सोशल कैरेक्टरिस्टिक्स आफ अमेरिकन इनवेटर्स' तथा पत्र व्यवहार से प्राप्त ।

$$\frac{N}{2}=185\ 5$$

$$\text{Med}=70+\frac{32\ 5}{56}\times 5=72\ 90 \text{ वर्ष ।} \quad \bar{X}=67\ 5+\frac{313}{371}\times 5=71\ 72 \text{ वर्ष ।}$$

$$s=5\sqrt{\frac{2\ 483}{371}-\left(\frac{313}{371}\right)^2}=12\ 23 \text{ वर्ष ।}$$

$$\nu_1=\frac{\Sigma fd}{N}=\frac{+313}{371}=0\ 843666$$

$$\nu_2=\frac{\Sigma f(d)^2}{N}=\frac{2\ 483}{371}=6\ 692722$$

$$\nu_3=\frac{\Sigma f(d)^3}{N}=\frac{+3\ 691}{371}=9\ 948787$$

$$\pi_1=0$$

$$\pi_2=\nu_2-\nu_1^2=6\ 692722-(0\ 843666)^2=5\ 980950$$

$$\pi_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3=+9\ 948787-3(0\ 843666)(6\ 692722)+2(0\ 843666)^3$$

$$=-5\ 789483$$

इकाइयो के रूप मे होगा। साथ ही, इसका विस्तृत रूप मे प्रसारित श्रेणी की तुलना मे लघु प्रकार की श्रेणी के लिए काफी भिन्न अर्थ होगा। सांख्यिकीविद प्राय कभी कभी निरपेक्ष तिरछेपन के माप का प्रयोग नही करते और सापेक्ष तिरछेपन के माप को अधिक पसन्द करते है। अभी अभी बताए गए माप को सापेक्ष मदो मे रखा जा सकता है और s से भाग करके दोनो कठिनाइयाँ दूर की जा सकती है। अब

$$\text{तिरछापन} \quad \frac{\bar{X}-\text{Mo}}{s}$$

इससे हम धनात्मक चिह्न वाला सापेक्ष माप प्राप्त होता है जब तिरछापन दाहिनी ओर को है और ऋणात्मक चिह्न वाला माप जब तिरछापन बाइ ओर को है। परन्तु एक और महत्त्वपूर्ण कठिनाई है जो इस तथ्य म मे उत्पन्न होती है कि अधिकतर बारबारता बटनो के लिए बहुलक केवल एक सन्निकटन मात्र है। माध्यिका की स्थिति अधिक सन्तोषजनक हो सकती है और इसलिए हम इस माप का प्रयोग करते है।[7]

$$\text{Sk} = \frac{3(\bar{X}-\text{Med})}{s}$$

पूर्वगामी अध्याय म यह मालूम किया गया था कि उदार कला छात्रो के ग्रेडो के लिए $\bar{X}$ 85 17 तथा Med=84 72 है। इस अध्याय म s का मान 4 48 निश्चित किया गया। तब तिरछापन है

$$\text{Sk} \quad \frac{3(85\ 17-84\ 72)}{4\ 48} = +0\ 301$$

इसे साधारण मात्रा का तिरछापन माना जा सकता है क्योकि यह माप ± 3 की सीमाओं[8] के बीच परिवर्तित होता है। यह आगे सकेत कर देना चाहिए कि ± 1 जैसे ऊँचे मान कुछ असामान्य होते हैं।

अमरीकी आविष्कारकों की मृत्यु के समय आयु के आँकडो के लिए सारणी 10 5 मे यह दिखाया गया है कि $\bar{X}=71\ 72$ वर्ष, जब कि Med=72 90 वर्ष तथा $s=12\ 23$ वर्ष। तिरछेपन का पियरसन का माप है

$$\text{Sk} = \frac{3(71\ 72-72\ 90)}{12\ 23} = -0\ 29$$

7 व्यजक में 3 की उपस्थिति की निम्न प्रकार से व्याख्या की गई है कार्ल पियरसन ने अनुभव के आधार पर दिखाया कि एक सतत चर के साधारण तौर पर तिरछे विवरणो में माध्यिका म बहुलक से मध्य की ओर दूरी लगभग 2/3 गिरने की प्रवृत्ति है। परिणामस्वरूप उसने लिखा $\text{Mo}=\bar{X}-3(\bar{X}-\text{Med})$ तथा तिरछपन के माप मे बहुलक के लिए यह व्यजक प्रतिस्थापित करके उसने प्राप्त किया

$$\text{Sk} = \frac{\bar{X}-[\bar{X}-3(\bar{X}-\text{Med})]}{s} = \frac{(3\bar{X}-\text{Med})}{s}$$

8 हैरोल्ड होटलिंग तथा ल्योनाड एम० सोलोमन्स (दि लिमिटस आफ ए मैजर आफ स्कूस, एनल्स ऑफ मैथमेटिकल स्टैटिस्टिक्स, मई 1932 पृष्ठ 141–142) ने दिखाया है कि $\frac{\bar{X}-\text{Med}}{s}$ ± 1 के बीच रहता है।

चतुर्थकों और शततमकों पर आधारित तिरछेपन के माप—तिरछेपन को तिरछेपन के चतुर्थक माप के माध्यम से भी मापा जा सकता है,

$$\frac{(Q_3-\text{Med})-(\text{Med}-Q_1)}{Q_3-Q_1}=\frac{Q_1+Q_3-2\text{Med}}{Q_3-Q_1},$$

तथा एक ऐसे व्यंजक का प्रयोग करके जिसमें 10वें और 90वें शततमक प्रयुक्त हों,

$$\frac{(P_{90}-\text{Med})-(\text{Med}-P_{10})}{P_{90}-P_{10}}=\frac{P_{10}+P_{90}-2\text{Med}}{P_{90}-P_{10}}$$

क्योंकि इन मापों में वैसी ही कमियाँ हैं जैसी कि चतुर्थकों और शततमकों पर आधारित विक्षेपण के मापों के लिए पहले बताई गई हैं, अत वे तिरछेपन के नितान्त सन्तोषजनक माप नहीं हैं और उन पर यहाँ और अधिक विचार नहीं किया जाएगा।

तृतीय घूर्ण पर आधारित तिरछेपन का माप—हम देख चुके हैं कि विक्षेपण का सर्वाधिक सन्तोषजनक माप मानक विचलन है जोकि माध्य के इर्द-गिर्द द्वितीय घूर्ण पर आधारित है

$$\pi_2=\frac{\Sigma x^2}{N},\text{ तथा } s=\sqrt{\pi_2}=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}.$$

तिरछेपन का माप माध्य के इर्द-गिर्द तृतीय घूर्ण का प्रयोग करके प्राप्त किया जा सकता है,

$$\pi_3=\frac{\Sigma x^3}{N}$$

स्मरण रहे कि माध्य के इर्द-गिर्द प्रथम घूर्ण

$$\pi_1=\frac{\Sigma x}{N},$$

सदा शून्य होता है। परन्तु, माध्य के इर्द-गिर्द तृतीय घूर्ण शून्य नहीं होता जब तक कि बटन माध्य के इर्द-गिर्द सममित न हो। विचलन के घन बनाने से इसका चिह्न नहीं बदलता। परन्तु इसका बड़े विचलनों पर असगत रूप से अत्यधिक प्रभाव अवश्य पड़ता है। उदाहरणत., सारणी 10 6 और 10 7 में दिए गए आँकड़ों के दो समुच्चयों पर विचार कीजिए। जिनमें से प्रथम, 6 के माध्य के इर्द-गिर्द सममित है जब कि द्वितीय, 6 के माध्य के इर्द-गिर्द सममित नहीं है। आँकड़ों के दोनों समुच्चयों में

$$\pi_1=\frac{\Sigma x}{N}=0,$$

और सारणी 10 6 के आँकड़ों में

$$\pi_3=\frac{\Sigma x^3}{N}=0$$

परन्तु सारणी 10 7 के आँकड़ों से प्रदर्शित है

$$\pi_3=\frac{\Sigma x^3}{N}=+6.$$

सारणी 10 6

एक सममित श्रेणी के प्रथम तथा तृतीय घूर्णों का परिकलन

X	x	x^3
2	−4	−64
4	−2	− 8
6	0	0
8	+2	+8
10	+4	+64
	0	0

$$\pi_1=\frac{\Sigma x}{N}=\frac{0}{5}=0.$$

$$\pi_3=\frac{\Sigma x^3}{N}=\frac{0}{5}=0.$$

सारणी 10.7

एक असममित श्रेणी के प्रथम तथा तृतीय घूर्णों का परिकलन

X	x	x^3
3	−3	−27
4	−2	− 8
6	0	0
7	+1	+1
10	+4	+64
	0	+30

$$\pi_1=\frac{\Sigma x}{N}=\frac{0}{5}=0,$$

$$\pi_3=\frac{\Sigma x^3}{N}=\frac{+30}{5}=+6.$$

एक बारम्बारता बटन के तृतीय घूर्ण का परिकलन करने से,

$$\pi_3=\frac{\Sigma fx^3}{N},$$

समान्तर माध्य से वास्तविक विचलनों को लेना, उनके घन बनाना, आवृत्तियों से गुणा करना, जोड़ना और N से भाग करना श्रमकारक होगा। जैसा कि परिशिष्ट ध के परिच्छेद 10.2 में दिखाया गया है, द्वितीय घूर्ण s^2, अथवा π_2, एक छोटी विधि से प्राप्त किया जा सकता है। वर्ग अन्तरालों के वर्गों के रूप में,

$$\pi_2=\frac{\Sigma f(d')^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2.$$

तृतीय घूर्ण का मूल्य (वर्ग अन्तरालों को घन बना कर) प्राप्त होता है[9]

$$\pi_3=\frac{\Sigma f(d')^3}{N}-3\frac{\Sigma fd'}{N}\ \frac{\Sigma f(d')^2}{N}+2\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^3$$

अथवा, यदि $\nu_1=\frac{\Sigma fd'}{N}$, $\nu_2=\frac{\Sigma f(d')^2}{N}$, तथा $\nu_3=\frac{\Sigma f(d')^3}{N}$,

तो $\pi_2=\nu_2-\nu_1^2$,

तथा $\pi_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3$.

---

9. परिशिष्ट ध, परिच्छेद 10.3 देखिए।

स्पष्ट ही, π_3 निरपेक्ष तिरछेपन का एक माप है। सापेक्ष तिरछेपन का माप है

$$\beta_1 = \frac{\pi_3^2}{\pi_2^3},$$

सारणी 10 8

रूगर्स स्टेट यूनिवर्सिटी के 1965 उदार कला स्नातकों के ग्रेडों के लिए प्रथम तीन घूर्णों का परिकलन

ग्रेड	विद्यार्थियों की सख्या d	d	fd'	$f(d')^2$	$f(d')^3$
75 0—76 9	3	−4	− 12	48	−192
77 0—78 9	23	−3	− 69	207	−621
79 0—80 9	52	−2	−104	208	−416
81 0—82 9	61	−1	− 61	61	− 61
83 0—84 9	74	0			
85 0—86 9	61	+1	+ 61	61	61
87 0—88 9	53	+2	+106	212	424
89 0—90 9	35	+3	+105	315	945
91 0—92 9	23	+4	+ 92	368	1 472
93 0—94 9	15	+5	+ 75	375	1,875
95 0—96 9	7	+6	+ 42	252	1,512
97 0—98 9	2	7+	+ 14	98	686
योग	409		+ 249	2 205	+5 685

$$\nu_1 = \frac{\Sigma fd'}{N} = \frac{+249}{409} = +0\ 608802$$

$$\nu_2 = \frac{\Sigma f(d)^2}{N} = \frac{2\ 205}{409} = 5\ 391198$$

$$\nu_3 = \frac{\Sigma f(d)^3}{N} = \frac{+5{,}685}{409} = +13\ 899756$$

$\pi_1 \quad 0$

$\pi_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 5\ 391198 - (0\ 608802)^2 = 5\ 020558$

$\pi_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$

$= 13\ 899756 - 3(0\ 608802)\ (5\ 391198) + 2(0\ 608802)^3$

$= 4\ 504532$

जहाँ अंश या भाज्य तथा हर दोनो वर्ग अन्तरालों की छठी शक्ति के रूप मे हो। तिरछापन कभी-कभी α_3 से भी मापा जाता है जहाँ [10]

$$\alpha_3=\sqrt{\beta_1}=\frac{\pi_3}{\sqrt{\pi_2^3}}$$

α_3 को π_3 वाला चिह्न दिया जा सकता है। हम अध्याय 23 मे एक तिरछे वक्र को फिट करने मे α_3 का प्रयोग करेंगे।

उदार कला छात्रों के ग्रेडो के आँकडो के लिए द्वितीय और तृतीय घूर्णों के मूल्य सारणी 10 8 के नीचे दिखाए गए है। इनसे हमे

$$\beta_1=\frac{\pi_3^2}{\pi_2^3}=\frac{(4\ 504532)^2}{(5\ 020558)^3}=0\ 16$$

प्राप्त होता है। इसी प्रकार अमरीकन आविष्कारको की मृत्युकालीन आयु के लिए द्वितीय तथा तृतीय घूर्णों का परिकलन सारणी 10 5 मे किया गया है। इनसे हम

$$\beta_1=\frac{(-5\ 789483)^2}{(5\ 980950)^3}=0\ 16.$$

प्राप्त करते है।

क्योकि $\pi_3=0$, जब कोई तिरछापन उपस्थित न हो, तो यह निष्कर्ष निकलता है कि एक पूर्णरूपेण सममित श्रेणी के लिए $\beta_1=0$ होगा। जितना अधिक β_1 का मान होगा, उतना ही अधिक किसी श्रेणी मे तिरछापन होगा। इस समय हम यह कहने की स्थिति मे नही है कि β_1 के लिए अभी-अभी दिए गए दो मानो मे से कोई शून्य से महत्त्वपूर्ण रूप से अधिक है या नही। इस समस्या पर हम अध्याय 26 मे विचार करेंगे।

ककुदता

चार्ट 10 9 मे तुगककुदी वटन दिखाया गया है। चर्पटककुदी बटन चार्ट 10 10 मे दिखाया गया है। सामान्य वक्र को *मध्यककुदी*[11] कहा जाता है। किसी श्रेणी मे उपस्थित ककुदता की मात्रा को चतुर्थ घूर्ण का प्रयोग करके मापा जा सकता है,

$$\pi_4=\frac{\Sigma x^4}{N},$$

अथवा, एक बारबारता बटन के लिए,

$$\pi_4=\frac{\Sigma fx^4}{N}$$

---

10. α_1 अथवा α_2 का पहले कही जिक्र नही आया। आँकडो की किसी भी श्रेणी के लिए,

$$\alpha_1=\frac{\pi_1}{\sqrt{\pi_2}}=0;$$

$$\alpha_2=\frac{\pi_2}{\sqrt{\pi_2^2}}=1$$

11. ककुदी=उभरी पीठ वाला, अत, कुबडा या एक-बहुलक। तुग=पतला, मकीर्ण। चर्पट=मड़ा, चौड़ा, चपटा। मध्य=बीच में, बीच का।

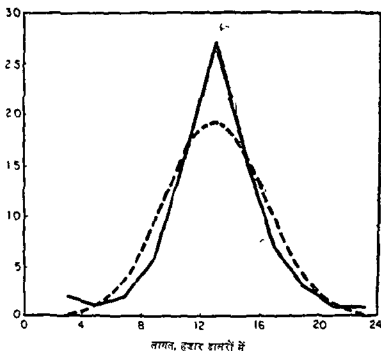
परिशिष्ट ध, अनुभाग 10 3, मे दी गई विधि जैसी विधि से यह दिखाया जा सकता है कि

$$\pi_4 = \frac{\Sigma f(d')^4}{N} - 4\frac{\Sigma fd'}{N}\frac{\Sigma f(d')^3}{N} + 6\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2\frac{\Sigma f(d')^2}{N} - 3\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^4$$

$$v_4 = \frac{\Sigma f(d')}{N}$$

$$^4\pi_4 = v_4 4v_1v_3 + 6v_1 - ^2v_2 - 3v_1^4$$

गृह संख्या



चार्ट 10.9 क्लीवलैंड मे पाँच कमरों वाले नए घर की लागत और क्रेता का भाग (गहरी रेखा) तथा प्रसामान्य वक्र (टूटी रेखा) जिसके N, $\bar{X}$, तथा s समान हैं। *सारणी 10 9 की सामग्री पर आधारित।*

अब π_4 से ककुदता के लिए एक पूर्ण व्यंजक प्राप्त होता है। इसे सापेक्ष रूप मे π_2^2 से भाग करके रखा जा सकता है। इस माप को β_2 या α_4 कहते हैं, तथा

$$\beta_2 = \alpha_4 = \frac{\pi_4}{\pi_2^2}$$

जिसमे अंश और हर दोनो वर्ग अन्तरालो की चतुर्थ शक्ति के रूप मे है। इस व्यंजक का प्रसामान्य वक्र के लिए 3.0 मान है। चपटककुदी वक्र के लिए $\beta_2 < 3 0$ कूटककुदी वक्र के लिए $\beta_2 > 3 0$

चार्ट 10 9 का तुंगककुदी वक्र N, $\bar{X}$, तथा s वाले प्रसामान्य वक्र की तुलना मे *दिखाया गया है। सारणी 10.9 मे इस वितरण के घूर्णों का परिकलन किया गया है,* और $\beta_2 = 4 46$

सारणी 10 9

1967 में क्लीवलैंड मे 5 कमरों वाले लकड़ी के नए घर और क्रेता को नीलाम की लागत के लिए प्रथम भार घूर्णी और β_2 का परिकलन

लागत (माध्य मान)	f	d	fd'	$f(d)'$	$f(d')^3$	$f(d')^4$
\$ 3,000	2	−5	−10	50	−250	1,250
5,000	1	−4	−4	16	−64	256
7,000	2	−3	−6	18	−54	162
9 000	6	−2	−12	24	−48	96
11,000	16	−1	−16	16	−16	16
13 000	27	0	0	0	0	0
15,000	16	1	16	16	16	16
17 000	7	2	14	28	56	112
19 000	3	3	9	27	81	243
21 000	1	4	4	16	64	256
23,000	1	5	5	25	125	625
योग	82		0	236	−90	3,032

आँकड़, जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, खण्ड 32, अंक 200 पृष्ठ 647 पर प्रकाशित फ्रैंक आर० गारफील्ड तथा विलियम एम० हुड द्वारा लिखित 'कंस्ट्रक्शन कॉस्टस एंड रीअल प्रापर्टी वेल्यूज' से उद्धृत। लागतें प्रचलित डालरों मे व्यक्त हैं।

$$v_1 = \frac{\Sigma fd'}{N} = \frac{0}{82} = 0$$

$$v_2 = \frac{\Sigma f(d')^2}{N} = \frac{236}{82} = 2\,878049.$$

$$v_3 = \frac{\Sigma f(d')^3}{N} = \frac{-90}{82} = -1\,097561$$

$$v_4 = \frac{\Sigma f(d')^4}{N} = \frac{3{,}032}{82} = 36.975601.$$

$$\pi_1 = 0$$

$$\pi_2 = v_2 - v_1^2 = 2.878049$$

$$\pi_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 = -1\,097561.$$

$$\pi_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4 = 36\,975601$$

$$\beta_2 = \frac{\pi_4}{\pi_2^2} = \frac{36\,975601}{(2\,878049)^2} = 4\,46$$

नोट कल्पित माध्य (13,000 डालर) और माध्य का समान होता है। जिसके परिणामस्वरूप v_1 का मूल्य 0 होना है। अत v तथा π मूल्यों में कोई भेद नहीं है, क्योंकि $v_1^2=0$, $v_1v_2=0$, $v_1^3=0$, $v_1v_3=0$, आदि।

सारणी 10 10

बिजली के लैम्पो के एक वग की आयु के लिए प्रथम चार घूर्णों तथा β_2 का परिकलन

घण्टो मे आयु (मध्य मान)	प्रतिशतता बारबारता f	d	fd	$f(d')^2$	$f(d)^3$	$f(d')^4$
50	1 0	−9	− 9 0	81 0	− 729 0	6 561 0
150	1 5	−8	−12 0	96 0	− 768 0	6,144 0
250	3 1	−7	−21 7	151 9	−1 063 3	7,443 1
350	4 4	−6	−26 4	158 4	− 950 4	5,702 4
450	5 0	−5	−25 0	125 0	− 625.0	3,125 0
550	5 7	−4	−22 8	91 2	− 364 8	1,459 2
650	6 6	−3	−19 8	59 4	− 178 2	534 6
750	7 3	−2	−14 6	29 2	− 58 4	116 8
850	7 6	−1	− 7 6	7 6	− 7 6	7 6
950	7 8	0	0	0	0	0
1050	7 8	1	7 8	7 8	7 8	7 8
1150	7 6	2	15 2	30 4	60 8	121 6
1250	7 3	3	21 9	65 7	197 1	591 3
1350	6 6	4	26 4	105 6	422 4	1,989 6
1450	5 7	5	28 5	142 5	712 5	3 562 5
1550	5 0	6	30 0	180 0	1 080 0	6 480 0
1650	4 4	7	30 8	215 6	1,509 2	10 564 4
1750	3 1	8	24 8	198 4	1,587 2	12 697 6
1850	1 5	9	13 5	121 5	1,093 5	9 841 5
1950	1 0	10	10 0	100 0	1,000 0	10,000 0
योग	100 0		+50 0	1 967 2	+2 925 8	86,650 0

*ऑकड़ आयोवा इजीनियरिंग एक्सपेरिमेंट स्टशन पृष्ठ 58 प्रापटी ग्रुप 28 2 के बुलेटिन 203 मे रा०ने वि * तथा गड वन बी कुज द्वारा लिख, लाइफ कैरैक्टरिस्टिक्स ग्राफ फिजीकल प्रापर्टी से ।*

$$\nu_1=\frac{\Sigma fd'}{N}=\frac{+50}{100\ 0}=+0\ 50$$

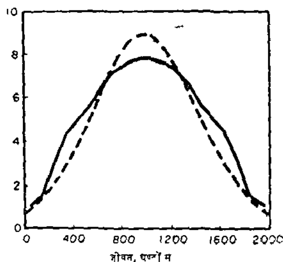
$$\nu_2=\frac{\Sigma f(d')^2}{N}=\frac{1,967\ 2}{100\ 0}=19\ 672$$

$$\nu_3=\frac{\Sigma f(d)^3}{N}=\frac{+2\ 925\ 8}{100\ 0}=+29\ 258$$

$$\nu_4=\frac{\Sigma f(d)^4}{N}=\frac{86,650\ 0}{100\ 0}=866\ 500$$

$$\pi_1 = 0$$
$$\pi_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 19\ 672 - (0\ 50)^2 = 19\ 422.$$
$$\pi_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 29\ 258 - 3(0\ 50)(19\ 672) + 2(0\ 50)^3 = 0.$$
$$\pi_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$
$$= 866\ 500 - 4(0\ 50)(29.258) + 6(0\ 50)^2(19\ 672) - 3(0\ 50)^4$$
$$= 837\ 3045$$
$$\beta_2 = \frac{\pi_4}{\pi_2^2} = \frac{837\ 3045}{(19\ 422)^2} = 2\ 22$$

चार्ट 10 10 मे चर्पटककुदी वक्र को भी समान N, $\bar{X}$, तथा s वाले प्रमामान्य वक्र के सम्बन्ध म दिखाया गया है। चर्पटककुदी श्रेणी के घूर्णों को सारणी 10 10 मे दिखाया गया है और इनसे β_2 मालूम किया गया है जो 2 22 है।



चार्ट 10 10 बिजली के लैम्पों के एक वर्ग की आयु (गहरी रेखा) तथा प्रसामान्य वक्र (टूटी रेखा) जिसके N, $\bar{X}$ तथा s समान हैं। सारणी 10 10 के आँकड़ों पर आधारित। प्रसामान्य वक्र के सिरे नही दिखाए गए। बायां सिरा y अक्ष के पार निकल जाएगा।

जब एक विचलन को चतुर्थ या द्वितीय शक्ति तक बढाया जाए तो इसका चिह्न धन बन जाता है। चरम विचलनो को द्वितीय शक्ति से बढाने की अपक्षा चतुर्थ शक्ति से बढाने पर वे अनुपात से कही अधिक बढ जाते हैं। परिणामस्वरूप, जितने अधिक सकीर्ण बटन के कधे हागे और जितने अधिक बडे सिरे होगे उतना ही अधिक π_2^2 के सबन्ध मे π_4 होगा।

अध्याय 26 मे हम यह निश्चय करने की एक विधि पर विचार करेंगे कि क्या β_2 का मूल्य 3,0 से काफी कम या काफी अधिक है।

समूहन-त्रुटि के लिए घूर्णों का संशोधन

वारंवारता बटनों के लिए माध्य π_2 (या s), π_3 तथा π_4 का परिकलन करने में हमने वर्गों के मध्य-मानों का प्रतिनिधि मानों के तौर पर प्रयोग किया। हमने इससे पूर्व के अध्याय में देखा है कि मध्य-मानों की अशुद्ध कल्पनाएँ थी परन्तु जब हम समान्तर माध्य का परिकलन करते हैं तो उपस्थित अशुद्धियों की एक दूसरे को सन्तुलित करने की प्रवृत्ति है। यह सन्तुलन उस समय भी विद्यमान है जब तृतीय घूर्ण का परिकलन किया जाता है। यह स्मरण होगा कि बहुलकीय वर्ग में पूर्व के वर्गों के मध्य-मानों की प्रवृत्ति बहुत कम होने की है, जबकि बहुलकीय वर्ग में बाद के वर्गों के मध्य-मानों की प्रवृत्ति बहुत अधिक होने की है। परिणाम यह होता है कि भिन्न x मूल्यों में जितने वे होने चाहिएँ उससे कुछ थोड़ा अधिक (निरपेक्ष मान में) होने की प्रवृत्ति है और जब उन्हें द्वितीय या चतुर्थ शक्ति तक बढ़ाया जाता है उस समय कोई सन्तुलन नहीं होता। परिणामस्वरूप π_2 (तथा s) और π_4 के मूल्य अवर्गीकृत उन्हीं आँकड़ों से परिकलित मानों की अपेक्षा कुछ थोड़े अधिक होने की सम्भावना है। शेपर्ड के संशोधन ऊपर की ओर इस झुकाव का सन्तुलन करने की चेष्टा करते हैं। संशोधित घूर्णों को μ से इंगित किया गया है और वे हैं.[12]

$$\mu_1 = \pi_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \pi_2 - \tfrac{1}{12},$$
$$\mu_3 = \pi_3,$$
$$\mu_4 = \pi_4 - \tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{7}{240},$$

जहाँ सब परिकलन वर्ग अन्तरालों के रूप में है।

यदि हम वर्ग मध्य-मानों के स्थान पर वर्ग माध्यों का प्रयोग करते तो समान्तर माध्य का ठीक-ठीक परिकलन किया जा सकता था। परन्तु यदि वर्ग माध्यों का प्रयोग किया जाए तो उन्हीं अवर्गीकृत आँकड़ों से परिकलित की अपेक्षा π_2 (s^2) तथा π_4 के मूल्य और भी अधिक कम होंगे।

जब हम एक सतत चर पर विचार कर रहे हैं जो कि लेखाचित्र की दृष्टि से बटन के दोनों सिरों पर अनन्त स्पर्शत X-अक्ष के समीप पहुँचता है तो शेपर्ड के संशोधनों का प्रयोग किया जा सकता है। इस बात की विशेषता को प्राय "X-अक्ष के साथ अत्यधिक सम्पर्क" कह कर संकेत किया जाता है। यदि ये शर्तें पूरी नहीं उतरतीं तो शेपर्ड के संशोधनों का प्रयोग नहीं होना चाहिए क्योंकि संशोधनों से आवश्यकता से अधिक संशोधन हो सकता है।[13] यदि मूल्य अवलोकन पर्याप्त यथार्थता से नहीं किए गए हैं तो शेपर्ड के संशोधन लागू करना तर्कसंगत नहीं है।

---

12 शेपर्ड के संशोधन को लागू करने के एक उदाहरण के लिए मूल अंग्रेजी पुस्तक के द्वितीय संस्करण में पृष्ठ 237—238 देखिए।

13. अध्याय 23 में पादटिप्पणी 8 देखिए। साथ ही डब्ल्यू॰ यू॰ ए॰ श्यूहार्ट द्वारा लिखित ईकनॉमिक कन्ट्रोल ऑफ क्वालिटी 'मैनुफैक्चर्ड प्रोडक्ट,' डी॰ वान नास्ट्रैंड कम्पनी, प्रिंसटन, एन॰ जे॰, 1931, पृष्ठ 78—79 भी देखिए।

जब शेपर्ड के सशोधन समुचित हैं तो β तथा α का निम्न प्रकार से μ से परिकलन किया जा सकता है

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_2}} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2^2}} = 1\ 0$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \qquad \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \sqrt{\beta_1}$$

$$\beta_2 = \frac{u_4}{\mu_2^2} \qquad \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sqrt{\mu_2^4}} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \beta_2$$

11

काल-श्रेणी का परिचय

काल-श्रेणियाँ पहले ही अध्याय 4, 5, और 6 में लेखाचित्रीय रूप में देखी जा चुकी हैं। उन अध्यायों में सम्मिलित कालानुक्रमिक आँकडों के विभिन्न चार्टों में केवलमात्र श्रेणियों को प्रस्तुत किया गया न कि उनका विश्लेषण। इस अध्याय में तथा अगले पाँच अध्यायों में हम काल-श्रेणियों को उनके अधिक महत्त्वपूर्ण भागों में विघटित करने के ढंगों की जाँच करेंगे। काल-श्रेणियों के विश्लेषण में प्रयुक्त सांख्यिकीय विधियाँ बारंबारता बंटन विश्लेषणों में प्रयुक्त विधियों से बिल्कुल भिन्न परन्तु निकट से संबधित हैं। यद्यपि अर्थ-शास्त्री काल-श्रेणियों के विश्लेषण के तन्त्रों के विकास के लिए मुख्यतया उत्तरदायी हैं तथापि काल-श्रेणियों का अध्ययन अन्य बहुत से क्षेत्रों में काम करने वालों, जैसे व्यापारियों, समाज विज्ञानियों, जीवविज्ञानियों भूविज्ञानियों जन-स्वास्थ्य कार्यकर्त्ताओं तथा अन्यों के लिये रुचिकर है।

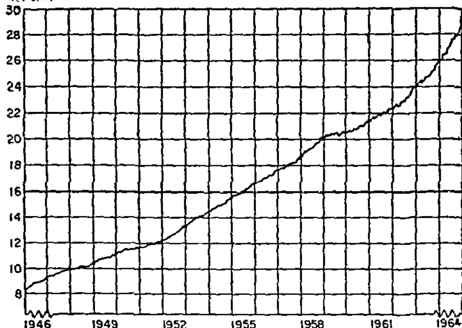
काल-श्रेणी की गतियाँ

काल-श्रेणियों की गतियाँ, जो हमारा ध्यान ग्रहण करेंगी, चिरकालिक प्रवृत्ति, चक्रीय और अनियमित हैं। कुछ श्रेणियों में इन गतियों में से एक या दो अन्यों से अधिक महत्त्व-पूर्ण हो सकती हैं। सामान्यतया ये चारों गतियाँ एक सामयिक काल-श्रेणी में विद्यमान होंगी और जब उपस्थित होंगी तो सहगामिनी होंगी। हम क्रमश इन चारों गतियों में से प्रत्येक पर विचार करेंगे।

दीर्घकालिक उन्नति—बारह अथवा इससे अधिक वर्षों की अवधि में काल-श्रेणी में बढ़ने अथवा घटने की उन्नति को प्रदर्शित करने की बहुत संभावना है। चार्ट 11 1 में जो न्यूयार्क राज्य बचत बैंकों के जनवरी 1946 से दिसम्बर 1964 तक के निक्षेप के आँकडे उपस्थित करता है, एक उद्घोषित ऊर्ध्वमुखी उन्नति दर्शाती है। यह श्रेणी हमें एक रोचक उदाहरण प्रदान करती है क्योंकि यह उन्नति असामान्य रूप से प्रबल है, वास्तव में कोई अन्य गतियाँ प्रत्यक्ष नहीं हैं।

ऊर्ध्वमुखी उन्नति वाली एक अन्य श्रेणी 11 2 चार्ट में दृष्टिगोचर होती है जो संयुक्त राज्य में 1945 से 1963 तक आसुत स्पिरिट का उपयोग (और प्रति वयस्क उपभोग) दिखाती है। इस तथा दूसरी बहुत सी श्रेणियों के लिए ऊर्ध्वमुखी उन्नति के उत्तरदायी कारकों में से एक जनसंख्या की वृद्धि है और चार्ट 11 2 लघुगणकीय ऊर्ध्वाधर पैमाने से बनाया गया है ताकि प्रति वयस्क अंक भी दिखाए जा सकें। प्रति वयस्क उन्नति 1952 के बाद कुल उपभोग की उन्नति के संबंध में कुछ गिरती है। अन्य कारणों में से द्वितीय महा-युद्ध के अन्त से संयुक्त राज्य की अधिकांश जनसंख्या की प्राप्त क्रय शक्ति में निरन्तर सुधार के कारण बहुत से उत्पादनों और सेवाओं का प्रति व्यक्ति विक्रय बढ़ गया है।

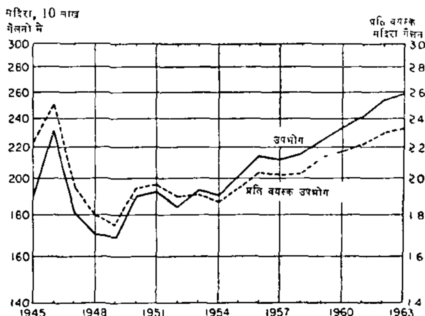
जैसा कि दिखाई दे सकता है काल-श्रेणी के विकास मे बहुत से विशिष्ट कारक उत्तरदायी हो सकते हैं। प्राकृतिक विज्ञानों का उद्योग तथा कृषि मे उनके उत्पादन को तीव्रता से बढाने मे प्रयोग किया गया है। सर्वदा इन तकनीकी परिवर्तनो के साथ-साथ चलकर नही, अपितु इनसे प्रेरित होकर, व्यापारिक सस्थाओ और उनके ढगो मे परिवर्तन होते रहे हैं। निगमो के विकास से विशेषज्ञता तथा अधिक मात्रा मे उत्पादन के लिये पर्याप्त मात्रा मे पूँजी का सचय सभव हो गया है। वैज्ञानिक प्रबन्ध, कार्मिक प्रबन्ध, तथा गुण नियत्रण ने भी उद्योग की उत्पादिता बढाने म महत्त्वपूर्ण भाग लिया है। नि सन्देह स्वचालन से औद्योगिक उत्पादकता बढती ही जाएगी। मण्डी के बढिया ढगों तथा अधिक अच्छी जलयान सुविधाओ ने वस्तुओ को उन स्थाना तथा उन समया पर जहा वे पहले नही मिलती थी उपलब्ध बना दिया है।



चार्ट 11 1 न्यूयार्क राज्य बचत बैंकों मे निक्षेप, जनवरी 1946 से दिसम्बर 1964 तक। आकड ' सर्वे आफ करेंट बिजनेस के विभिन्न अको से।

सभी कालिक-श्रेणियाँ ऊर्ध्वमुखी उपनतिया नही दिखाती। कुछ जैसे कि अशोधित मृत्यु दर, जो कि चार्ट 11 3 मे दिखाई गई है, प्राय निम्नगामी उपनति प्रदर्शित करती है। यह विशेष निम्नगामी उपनति अधिक अच्छे तथा अधिक विस्तृत रूप मे प्राप्त चिकित्सा ज्ञान के कारण है और मोटे तौर पर उच्चतर जीवन स्तर को पुन प्रतिबिम्बित करती है। आर्थिक श्रेणी की निम्नगामी उपनति इसलिए हो सकती है क्योकि श्रेष्ठतर और अधिक सस्त विकल्प प्राप्त हो गए। इस प्रकार सश्लिष्ट तन्तुओ जैसे कि ओरलोन और नाइलोन ने कुछ उपयोगों मे प्राकृतिक तन्तुओ को आशिक रूप मे विस्थापित कर दिया है और कई प्रकार के साबुनो के स्थान पर सश्लिष्ट प्रक्षालकों का उपयोग किया जा रहा है। रेलमार्गो

का विकास अधिक आश्चर्यजनक था यद्यपि वह हममे से बहुतो की स्मृति से बहुत परे की बात है, जिसने इस देश मे अधिकतर नहरो को लुप्तप्राय होने को बाधित कर दिया। अब ट्रको, बसो, तथा वायुयानो की स्पर्धा से रेलमार्गो के रास्ते मे बाधा उपस्थित हो गई है।



चार्ट 11 2 सयुक्त राज्य अमरीका मे 1945—1963 मे आसुत स्पिरिट का उपभोग तथा प्रति वयस्क उपभोग। *आंकड लायसस प्राप्त पेय उद्योग की* फैक्ट्स बुक, *1964* पृष्ठ 56 से।

उत्पादकीय ढग मे सुधार प्रारम्भ मे तीव्र होने उचित हैं और मांग तीव्र हो सकती है। तो भी जैसे-जैसे समय बीतता जाता है, यह प्राय सत्य है कि, आगे तकनीकी तथा प्रबन्ध सम्बन्धी सुधारो का उत्पादन पर प्रभाव कम होता जाता है जबकि साथ ही बाजार पहले के समान तेजी से नही बढता जाता। कच्चे माल जैसे कि खनिज पदार्थ, जिसका छोटी खानो और निम्न स्तर की कच्ची धातु से प्राप्त होना आवश्यक है, को प्राप्त करने की बढ़ती हुई कठिनाई के कारण भी विकास मे बाधा पड सकती है। हम उन कारको की जिनमे वित्तीय कारक भी सम्मिलित है, एक पूर्ण सूची नही बना सकते जो प्राय मिलकर एक उद्योग मे उत्पादन के विकास को धीमा कर देते हैं। किसी एक प्रदत्त उद्योग मे कोई भी विशेष कारण क्यो न हो, बहुत से अधिकारियो का यह विश्वास है कि न केवल सापक्ष विकास की उपनति गिरने की होती है बल्कि अन्तत आगे विस्तार प्राकृतिक नियम के अनुसार असभव हो जाएगा। एक लेखक ने, जिस प्रवृत्ति का हम उल्लेख कर आए हैं, उस "विकास का नियम" कहकर सबोधित किया है, जो सभी उद्योगो पर लागू होता बताया जाता है। इस नियम के अन्तर्गत चार अवस्थाएँ आती हैं (1) प्रयोग का काल, जिसमे विकास की मात्रा लघु है, (2) सामाजिक रचना मे विकास का काल, (3) वह काल जिसमे सतुष्टि बिन्दु आ जाने के कारण विकास मे बाधा पडती है, (4) स्थायित्व का काल। चार्ट

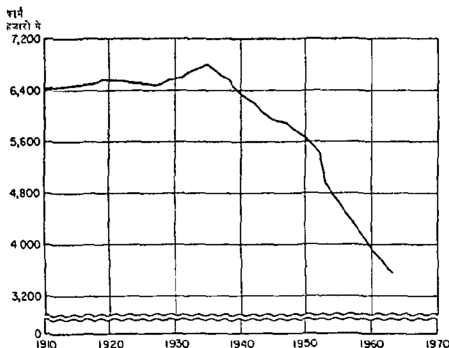
13.10 और 13.11 प्रकट करते हैं कि आइसक्रीम का स्वदेशीय उत्पादन इस ढग से होता है। इन चार्टों मे से पहले मे यह दिखाई पडता है कि 1929—1961 के काल मे विकास की वार्षिक मात्रा प्रारम्भ मे कम थी, परन्तु धीरे-धीरे बढी; दूसरे चार्ट से यह स्पष्ट है कि विकास की वार्षिक प्रतिशतता धीरे-धीरे गिरी है।



चार्ट 11 3 सयुक्त राज्य अमरीका के पजीकरण क्षेत्र मे अशोधित मृत्यु दर, 1900—1966 आँकडे स्टैटिस्टिकल ऐब्स्ट्रैक्ट ऑफ दि यूनाइटिड स्टेट्स के विभिन्न अकों मे। 1963 का अक अन्तिम है।

जैसा कि पहले सुझाया गया है, कभी-कभी किसी एक उद्योग को इतनी घोर स्पर्धा का सामना करना पडता है, अथवा इसकी पूर्ति का स्रोत इतना सीमित होता है कि यह विकास से गिरावट की ओर सक्रमण का अनुभव करता है। इस प्रकार के उद्योग का एक उदाहरण एन्थ्रेसाइट कोयले की खान है। विकास और गिरावट का एक अन्य उदाहरण सयुक्त राज्य मे 1790 से 1966 तक खेतो की सख्या का है जो अशत. चार्ट 11 4 में दिखाया है।

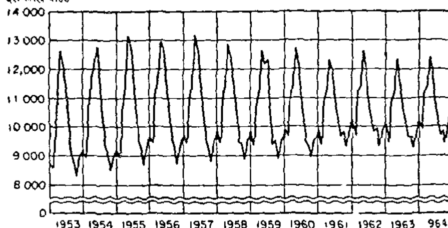
हम काल-श्रेणी की उपनति का अध्ययन करें, क्योकि हम स्वय उपनति मे रुचि रखते है या हम श्रेणी की एक या अधिक अन्य गतियो को प्रकट करने के लिये उपनति को साख्यिकीय रूप मे समाप्त करने की इच्छा करें। साख्यिकीय समस्या मे पहले उस उपनति के प्रकार का निर्णय करने की बात आती है जो आँकडो को उचित रूप से जोडेगी और जो आँकडो का तर्कपूर्ण विवरण है और दूसरे, चुने हुए प्रकार की उपनति को जोडने की बात आती है।



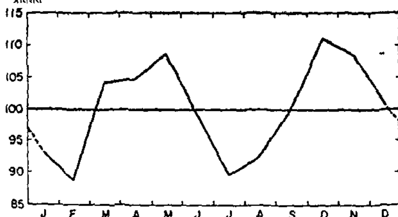
चार्ट 11 4 1910—1963 तक सयुक्त राज्य मे फार्मों की सख्या।
आँकड़े सयुक्त राज्य वाणिज्य विभाग *हिस्टॉरिकल स्टैटिस्टिक्स ऑफ दि यूनाइटिड, स्टेट्स कालोनियल टाइम्स टु 1957*, पृष्ठ 278, सयुक्त राज्य कृषि विभाग, *एग्रिकल्चरल स्टैटिस्टिक्स, 1964* पृष्ठ 481 से।

आवर्ती गतियां—*आवर्ती गति वह है जो, किसी निश्चित समय मे, नियमितता की* किसी मात्रा मे आवृत्त होती है। सबसे अधिक अध्ययन की जाने वाली आवर्ती गति वह है जो एक वर्ष के भीतर उत्पन्न होती है और जिसे *ऋतुनिष्ठ परिवर्तन* या केवल ऋतुनिष्ठ कहते हैं। चार्ट 11 5 मे जनवरी 1953 से दिसम्बर 1964 तक का फार्म के दूध का मासिक उत्पादन दिखाया गया है। इस चार्ट मे ऋतुनिष्ठ गति दूसरी गतियो की तुलना मे पर्याप्त स्पष्ट है। ध्यान दीजिए कि दूध के उत्पादन का ऋतुनिष्ठ परिवर्तन वर्षानुवर्ष काफी समान है। यह सयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा उपभोग मे लाये गए समाचार पत्रीय कागज के आँकडो के लिए भी सत्य है जिसके लिये विशिष्ट ऋतुनिष्ठ चार्ट 11.6 मे दिखाया गया है। अध्याय 14 मे हम देखेंगे कि ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप को किस प्रकार निश्चित किया जाए जब कि वह प्रतिरूप सतत अथवा लगभग सतत हो। तो भी बहुत सी श्रेणियां उस ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप का प्रदर्शन करती हैं जो समय के साथ-साथ धीरे-धीरे परिवर्तित हो रहा है। पत्रिकाओ मे विज्ञापन के लिए स्थान की मात्रा एक ऐसी श्रेणी है और हम सयुक्त राज्य अमरीका की पत्रिकाओं के विज्ञापन आँकडो के लिए ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप का अध्याय 15 में निर्धारण करेंगे।

जलवायु सम्बन्धी वे अवस्थाएं, जिनमे वर्षा, हिम, बर्फ, धूप, आर्द्रता, ताप और पवन मे परिवर्तन सम्मिलित हैं, माँग मे परिवर्तन उत्पन्न करती हैं जो कि प्राय, उपज के



चार्ट 11 5 जनवरी 1953 से दिसम्बर 1964 तक सयुक्त राज्य मे फार्मों पर दूध का उत्पादन। आंकड़ सर्वे ऑफ करेण्ट बिज़नेस के विभिन्न अको से।



चार्ट 11 6 1955—1963 तक सयुक्त राज्य के प्रकाशको द्वारा उपभोग मे लाए गए समाचारपत्रीय कागज का ऋतुनिष्ठ सूचक। आंकड़े सारणी 14 7 से।

परिवर्तन मे प्रत्यावर्तित होती हैं। जलवायु सम्बन्धी अवस्थाएँ कुछ उद्योगो, उदाहरणत' कृषि तथा बाहरी निर्माण के उत्पादन पर प्रत्यक्ष प्रभाव डालती हैं। यद्यपि काल-श्रेणी द्वारा प्रदर्शित अधिकतम ऋतुनिष्ठ परिवर्तनो के लिये प्रकृति मुख्यतया उत्तरदायी है तथापि अन्य कारण भी हैं। क्रिसमस के अवसर पर उपहार देने की प्रथा दिसम्बर म परचून (विशेष रूप मे विभाग भण्डार) विक्रय मे विशेष वृद्धि का कारण बनती है। दूसरे इस प्रकार के विक्रय शिखर के दृष्टिगोचर होने की आशा तब हो सकती है जबकि विज्ञापन करने वाले ग्राउण्डहाग दिवस या सेडी हाकिन्स दिवस जैसे अवसरो पर उपहार देने को विस्तृत रूप

से प्रोत्साहित करने मे सफल हो जाएँ। ईस्टर और थैक्सगिविंग से पूर्व परचून क्रिया मे विक्रय-शिखर अप्रत्यक्ष रूप से ऋतुओ के कारण होता है, क्योकि उन छुट्टियो के प्रारम्भ का आधार आंशिक रूप से ऋतुसम्बन्धी अवस्थाएँ है। तो भी बसन्त या पतझड मे किसी के कपडो और मोटर गाडी के ढग मे परिवर्तन की इच्छा आंशिक रूप से आत्मप्रदर्शन का परिणाम है।

मोटर गाडी विक्रय मे ऋतुनिष्ठ परिवर्तन (तथा मोटर गाडियो एव उनके भागो का उत्पादन) न केवल ऋतुनिष्ठ परिवर्तनो के कारण है अपितु निश्चित मनुष्यकृत निर्णयो का परिणाम भी है। एक वर्ष मद मितव्ययता को गति प्रदान करने के प्रयत्न के फलस्वरूप मोटर गाडी प्रदर्शनी, जो साधारण तौर पर जनवरी मे हुई होती, सरका कर पहले ही नवम्बर मे कर दी गई। पहले की अपेक्षा कई महीने पूर्व नए मॉडल आने के कारण वास्तव मे ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप मे सहसा परिवर्तन हो गया। विभिन्न मेक की कारो के नए मॉडल आजकल बिल्कुल उसी समय प्रचलित नही किए जाते परन्तु लगभग सभी एक दूसरे से एक या दो महीने पश्चात् सामने आते है। नये मॉडलो का प्रचालन विशेषकर यदि उनमे आकृति सम्बन्धी अथवा यान्त्रिक परिवतन भी सम्मिलित हो, मोटर गाडियो के विक्रय पर सुनिश्चित प्रभाव डालना जारी रखते है।

हम आवर्ती परिवर्तन मे या तो इसीलिए रुचि रखते हैं कि हम आवर्ती परिवर्तन को समय श्रेणी से हटाना चाहते है या हम स्वय आवर्ती परिवर्तन मे रुचि रखने वाले हैं। दूसरी गतिविधियो (विशेषकर चक्रीय) को अधिक अनावर्ती करने के उद्देश्य से समय-श्रेणी के आकडो को प्रत्यक्ष करने के लिए अध्याय 16 मे ध्यान दिया जाएगा।

स्वय आवर्ती गतिविधि मे रुचि का कारण अनेक उद्देश्यो मे से कोई एक हो सकता है। प्रथम यह हो सकता है कि हम आवर्ती गतिविधियो को "सचिकनाता" चाहते हैं ताकि अर्थसूचक वर्ष मे घटाबढी कम सुदृढ होगी। इसलिए विज्ञापनो द्वारा "आइसक्रीम आपके सर्वोत्तम भोजन मे से एक है, प्रतिदिन एक प्लेट आइसक्रीम खाओ" कह कर सर्दी मे आइसक्रीम की माग को बढाने के प्रयत्न किए गए। उत्पादन पक्ष मे मुर्गियो को, कृत्रिम प्रकाश द्वारा दिन के समय को बढाकर, बिना ऋतु के (सर्दी मे) अण्डे देने के लिए प्रेरित किया गया।

दूसरे, एक निर्माण प्रतिष्ठान अनुपूरक ऋतुनिष्ठ वस्तुओ के उत्पादन को बढा कर इसकी गतिविधियो मे ऋतुनिष्ठ प्रकृति को कम करने की इच्छा कर सकता है। इस प्रकार एक व्यवसाय सघ स्लैड (बिना पहिये बर्फ पर चलने वाली गाडी) तथा गार्डन कल्टीवेटर बनाता है। एक बहुत बडे पैमाने पर उद्देश्य है ब्रिटेन से फ्रास तक इन दोनो देशो मे विद्युत् शक्ति का सम्बन्ध बनाने के लिए पानी मे समुद्री तार बिछाना। फ्रास की विद्युत् शक्ति का बहुत बडा अश जल विद्युत् यन्त्रो से आता है जो उत्तर ग्रीष्म काल मे पानी की न्यूनता झेलते है जब कि ब्रिटेन के कोयले से चलने वाले जनित्र क्षमता से कम कार्य करते है। इसके विपरीत, अधिकतर शीत ऋतुओ मे जब ब्रिटेन के जनित्रो पर क्षमता से अधिक दबाव डाला जाता है तो फ्रास के पास अपने जल विद्युत् सयत्रो को चलाने के लिये फालतू पानी पडा रहता है।

तीसरे, आवर्ती गतिविधियो मे कोई इसलिए रुचि लेता है जिससे वह इसका लाभ उठा सके। इसलिये गृहिणियाँ डिब्बाबन्दी तथा परिरक्षण के लिए उन दिनो मे फलो का क्रय करती है जब उनकी भरमार हो, मूल्य कम हो और वस्तु बढिया प्रकार की हो।

यद्यपि हम इस पुस्तक में उनका वर्णन करने का प्रयास नहीं करेंगे तथापि कुछ आवर्ती गतिविधियाँ हैं जो मासान्तर, सप्ताहान्तर और दिनान्तर के रूप में व्यक्त की जा सकती हैं। मासान्तर गतिविधि के उदाहरण के रूप में एक वाणिज्य बैंक के विषय में सोचिये जो महीने की पहली तथा पन्द्रहवीं तिथि के आस-पास चरम गतिविधि प्रदर्शित करे। यदि बैंक ऐसे क्षेत्र में है जहाँ कारखानों की साप्ताहिक वेतन-सूचियाँ बनाई जाती हों तो उनका व्यापार सप्ताहान्तर गतिविधि के गुण को भी प्रदर्शित कर सकता है जो इस बात पर निर्भर करेगा कि कारखानेदार अपने काम करने वालों को सप्ताह के कौनसे दिन (अथवा दिनों में) वेतन देते हैं। जब मासिक और साप्ताहिक चरमताएँ आपस में मिलती हैं तो बैंक का कर्मचारी-वर्ग वास्तव में व्यस्त हो सकता है। एक रुचिकर सप्ताहान्तर आवर्त का डाक के प्रति पाउंड नकद विक्रय के अंकों में सीयर्स रोयबक एण्ड कम्पनी द्वारा परीक्षण किया गया है। सामान्य सप्ताह के मध्य आँकड़े इस प्रकार हैं: सोमवार 30, मंगलवार 37 बुधवार 35, बृहस्पतिवार 32, शुक्रवार 31। एक रेस्तराँ का व्यापार दिनान्तर गति का निरूपण प्रस्तुत करता है। प्रति सप्ताह दिवस की तीन चरमताओं के साथ प्रबन्धक को आगे की योजना बनानी चाहिए और पर्याप्त भोजन तथा इन अपेक्षतया अल्प किन्तु व्यस्त समयों के लिए पर्याप्त सहायता रखनी चाहिए। ब्रिटेन से फ्रान्स तक विद्युत् समुद्री तार, जिसका अभी-अभी वर्णन किया गया था, दोनों देशों में विद्युत् की असमान अन्तर्दिन माँगों को सन्तुष्ट करना है। यद्यपि किसी ने अभी तक विद्युत्शक्ति को संचय करने का सक्षम साधन नहीं बनाया है, तथापि पानी का बाँध के पीछे संचित किया जाना सम्भव है। यदि सूखे के मौसम में या किसी और मौसम में जबकि बाँध भरे हुए हों, फ्रांस चौबीस घण्टों में से किसी भी समय ब्रिटेन की विद्युत् का प्रयोग करता है, तो कुछ फ्रांसीसी पानी फ्राम के बांधों के पीछे दोनों में से किसी भी देश की चरम माँगों को पूर्ण करने के लिये इकट्ठा किया जा रहा है।

चक्रीय गतियाँ—चक्रीय गतियाँ वे उतार चढ़ाव हैं जो कालिक गतिविधियों में इस प्रकार भिन्न हैं कि वे एक वर्ष से अधिक अन्तर की होती हैं और इस प्रकार भी कि वे साधारणतया नियमित कालक्रम का प्रदर्शन नहीं करतीं। व्यापार चक्र में आकस्मिक गतियाँ नहीं हैं क्योंकि किसी एक व्यापार चक्र में किसी दिये गए बिन्दु पर व्यापार की अवस्था पहले महीनों की गति से प्रभावित की जाती है और क्रमश निकट भविष्य में व्यापार पर प्रभाव डालती है। दूसरे शब्दों में निम्न बिन्दु से उच्च बिन्दु पर संक्रमण एक प्रगतिशील विकास है, तथा इसी प्रकार इसके विपरीत। चक्र कुछ पैन्डुलम के सिद्धान्त पर कार्य करते हुए दीखते हैं। जिस प्रकार *पैन्डुलम लम्बांधर स्थिति की ओर गुरुत्वाकर्षण* द्वारा खींचा जाता है परन्तु वह सतत अपनी सन्तुलन की स्थिति को पार करने की प्रवृत्ति में लगा रहता है, अतः ऐसा कहा जाता है कि *व्यापार माँग और पूर्ति की शक्तियों के द्वारा सन्तुलन की ओर खींचा जाता है तथा इसी प्रकार एक ओर की त्रुटियाँ विपरीत दिशा की त्रुटियों में आधिक्य करने की प्रवृत्ति रखती हैं।* व्यापार चक्रों की इस प्रकार की परिभाषा "स्वयं-उत्पादक सिद्धान्त" के नाम से जानी जाती है। जो प्रायः वैसले सी० मिच्चल के नाम से सम्बन्धित है। परन्तु जिस प्रकार पैन्डुलम की यान्त्रिक क्रिया को प्रेरित करने के लिये समय पर चाबी देनी पड़ती है, इसी प्रकार यह सम्भव है कि आर्थिक सक्रियता सन्तुलन प्राप्त कर लेगी, जबकि दूसरे नोदनों के लिये प्रबलता की विभिन्न मात्राएँ न हों, चक्रों का साधारण व्यापार में या चक्रों का विशेष उद्योगों में जैसे कि आवास निर्माण

पशुपालन या कपडा उत्पादन मे ज़िक्र करना सम्भव है। मुश्किल से चक्र एक विशेष उद्योग मे अथवा व्यवसाय मे परम्परागत दिखाई दे सकते है, अपितु वे, किसी भी क्षण, साधारण व्यापार मे चक्र की अवस्था के द्वारा ढाल लिए जाते है। इसके अतिरिक्त, क्योंकि सभी उद्योग इतने अधिक अन्योन्याश्रित हैं। अतः एक मूल उद्योग या उद्योगो के समूह मे पुनरुज्जीवन अथवा सुस्ती अपने प्रभाव को गतिविधि की दूसरी शाखाओ मे सचारित करती है।

ऐसा दीखता है कि अनेक महत्त्वपूर्ण उद्योगो की गतिविधि के उसी चक्रीय पक्ष के सगमन से साधारण गतिविधि के चक्रीय उतार-चढाव उत्पन्न किये जाते है; या वे व्यापार के बाहर की अडचनो से उत्पन्न किये जाते हैं। ये अडचनें बहुत बडे परिमाण मे कभी-कभी होने वाली घटनाएँ जैसे कि युद्ध, खोज, असाधारण मौसम, या कोई राजनैतिक घटना हो सकती हैं, या वे कुछ छोटी-छोटी घटनाओ के युगपत् सगम हो सकते हैं जो एक दूसरे के प्रभाव पर पुन दबाव डालते है।

जब चक्रो मे स्थूल नियमितता दिखाई देती है, तो यह नियमितता कुछ बाहरी घटनाओ के कालक्रम द्वारा वर्णित की जा सकती है। इस विषय मे कुछ विशेषज्ञो का विचार है कि वे अशत. उत्तरदायी है। ऋतु मे चक्रो का सुझाव दिया गया है। तथापि, इसकी अधिक सम्भावना है कि जिस नियमितता की ओर ध्यान देना है वह समय की उचित सतत अवधि के कारण है, जो कि व्यापार को उद्दीपनो के प्रति अनुक्रिया करने मे लगता है। उदाहरणार्थ, भवन बनवाने या गिरवी चीज़ को छुडवाने या दिवाला निकालने का निर्णय करने मे लगाने वाला समय एकदम अनियमित नही होता। यदि यह आकस्मिक घटनाओ की अनियमितता के कारण न हो तो कदाचित् अधिक नियमितता दिखाई देगी।

कुछ और लोग है जो चक्रो के स्वय-उत्पत्ति के सिद्धान्त को अस्वीकार करते हैं, और यह विश्वास करते हैं कि चक्र अधिकतर बाह्य प्रभावो के कारण आते हैं। ये प्रेक्षक भी उत्पादन और उपभोग बढ रहे है या गिर रहे है और विशेष रूप से स्थिरता के लिये व्यावहारिक साधनो की खोज मे ध्यान देने की ओर रुचि रखते हैं। चार्ट 16 6 से, चाहे वे स्वय उत्पन्न अथवा बाह्य कारको से उद्भूत हो, यह स्पष्ट है कि सयुक्त राज्य समाचारपत्र विज्ञापन मे चक्रीय उतार-चढाव रहे है, और चक्र एक ही लम्बाई के नही रहे है। चार्ट 16 6 भी समय श्रेणी के अध्ययन मे प्रायश आने वाली कठिनाई का चित्रण करता है। यह इस निर्णय से कि चक्र क्या है सम्बन्धित है। क्या चार्ट 16 6 का वक्र बडे-बडे दो चक्रो के विषय मे प्रदर्शित करता है अथवा कुछ छोटे चक्रो के ? श्रेणी के लिये प्रयुक्त उपनति के द्वारा निर्णय को प्रभावित किया जा सकता है। जैसाकि बाद मे दिखाई देगा, प्रयुक्त उपनति एक सरल रेखा थी जिसे 1932—1960 के वर्षों से जोडा हुआ था तथा उसे 1964 मे से बढाया गया था। यदि हम एक बहुत छोटे समय, उदाहरणार्थ 1946—1964, से सम्बन्धित होते और केवल उन्ही वर्षों के लिए उपनति का उपयोग किया होता, तो 19 वर्ष के काल मे चक्रो की एक बडी सख्या प्रकट हुई होती।

अनियमित विचरण—एक समय-श्रेणी मे अनियमित विचरणो को दो वर्गों मे विभक्त किया जाता है प्रासगिक तथा आकस्मिक। समय-श्रेणी मे जब प्रासगिक गतियाँ उत्पन्न होती हैं तो उन्हे श्रेणी के चार्ट मे एकदम पहचाना जा सकता है, यदि वे विशिष्ट घटनाएँ हैं, जैसे भूचाल, प्रचण्ड आग, हडतालें, महान् झीलो मे पहले तथा देर से बर्फ का पिघलना, भयकर तूफान या अन्य घटनाएँ। एक प्रासगिक गति जोकि वार्षिक आँकडो मे प्रतिबिम्बित होने के लिये महत्त्वपूर्ण है, चार्ट 11.3 मे दिखाई देती है। 1918 मे बहुत ऊँची

मृत्यु दर इन्फ्लूएन्ज़ा महामारी के परिणामस्वरूप थी जिससे सैनिक तथा असैनिक व्यक्तियों का बहुत मौतें हुई।

जैसाकि पहले कहा गया है, एक घटना श्रेणी चक्रीय उतार-चढाव उत्पन्न करने मे या उत्पन्न करने म सहायक होने के लिये पर्याप्त महत्वपूर्ण हो सकती है। कभी-कभी एक प्रासगिक गति तथा एक चक्र मे अन्तर करना कठिन हो सकता है।

आकस्मिक गतियाँ छोटे उतार-चढाव होते हैं जो निर्दिष्ट प्रसगों के कारण नही होती और इतनी अधिक छोटी हैं कि इन पर अलग-अलग विचार की आवश्यकता नही। कई बार ये आकस्मिक उतार-चढाव यादृच्छिक प्रकृति वाले होते हैं। सयुक्त राज्य के समाचार-पत्र विज्ञापन की इन अनियमित घटकों (प्रासगिक तथा आकस्मिक मिला कर) को चार्ट 16.7 तथा 16.8 मे दिखाया गया है।

अन्य गतियाँ—समय-श्रेणी मे सामान्यत पाई जाने वाली चार गतियाँ जिनका वर्णन किया जा चुका है, सबसे अधिक महत्वपूर्ण हैं। कभी-कभी अन्वेषकों को "लम्बे चक्र" मिलते हैं जिनकी अवधि सामान्य व्यापार चक्रो की अवधि से बहुत लम्बी होती है और जो लगभग 50 वर्ष के होते हैं। दोनो प्रकार के चक्र इकट्ठे विद्यमान हो सकते हैं और एक-दूसरे पर अध्यारोपित किए जा सकते हैं। कई बार समय-श्रेणी के विद्यार्थी एक समय-श्रेणी मे दो से अधिक चक्रीय घटकों की विद्यमानता का दावा करते हैं। कई बार लम्बे चक्र तथा व्यापार चक्र के बीच मध्यस्थ जिस गति को "गौण उपनति" के नाम से पुकारते हैं, मिलती है। इस पुस्तक मे हम लम्बे चक्रो या गौण उपनतियो की ओर आगे ध्यान नही देंगे अपितु उन चार गतियो पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे जिनका पहले वर्णन किया जा चुका है।

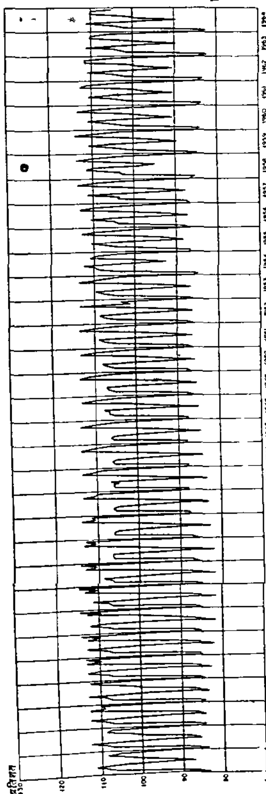
लेखाचित्रीय पूर्वदर्शन

यदि हम सयुक्त राज्य समाचारपत्र विज्ञापन के आँकडो के चार्ट को ध्यान से देखें, जिनका विस्तार से वर्णन बाद मे किया जाएगा, तो समय-श्रेणी मे चार प्रमुख गतियो की उपनति को अधिक स्पष्टतया समझा जा सकता है। चार्ट 16.4 की हल्की टूटी हुई रेखा लाखो रेखाओं के रूप म मूलभूत आँकडो को दिखाती है। इस वक्र मे सबकी सब गतियाँ · उपनति ऋतुनिष्ठ, चक्रीय तथा अनियमित आती है। चार्ट 11 7 श्रेणी मे विद्यमान ऋतुनिष्ठ विचरण दिखाता है, और चार्ट 16 4 म ठोस रेखा ऋतुनिष्ठ विचरण के लिये समजित किये जाने के बाद के आँकडो को प्रदर्शित करती है। चक्रीय गतियो को चार्ट 16 6 मे दिखाया गया है। यहाँ पर अनियमित गतिया का कोई भी चार्ट नही दिखाया गया है, परन्तु जैसे पहले देखा गया है, उन्हे चार्ट 16 7 तथा 16 8 मे देखा जा सकता है।

आँकडों का प्रारंभिक प्रतिपादन

समय-श्रेणी में कुछ विचरण उन शब्दो के कारण है जिनमे आँकडो को व्यक्त किया गया है और कई बार समय-श्रेणी का विश्लेषण प्रारम्भ करने के पहले कुछ समजन करना उपयोगी हो सकता है।

कैलेन्डर भिन्नता—प्राय, यद्यपि सर्वदा नही, एक वर्ष मे 365 दिन होते हैं। यद्यपि प्रत्येक वर्ष मे 12 मास होते हैं तथापि महीनो की अवधि 28 से 31 दिन तक भिन्न-भिन्न होती है। स्थिति को और भी जटिल बनाने के लिये, विभिन्न मास न तो सप्ताह के उसी दिन आरभ होते है और न ही वही महीना अगले वर्षों मे उस दिन आरम्भ होता



चार्ट 11.7. संयुक्त राज्य मे समाचारपत्र विज्ञापन की ऋतुनिष्ठ गतियाँ, 1933—1964। आँकड़ो के स्रोतो के लिये सारणी 16.3 की टिप्पणी देखिये।

है। एक और कठिनाई महीने मे काम के दिनों की सख्या के बारे मे आती है। महीने मे न केवल शनिवारो और रविवारो की सख्या बदलती रहती है अपितु फरवरी मे जिसके 28 या 29 दिन होने है वाशिंगटन तथा लिंकन के जन्म दिवस आते है, जबकि मार्च 31 दिन का होता है परन्तु हो सकता है, उसमे कोई छुट्टी न आए। फरवरी मे काम करने के दिन कम से कम 18 हो सकते है जबकि मार्च मे अधिक से अधिक 23 हो सकते है। ईस्टर के मार्च और अप्रैल मे दोलन भी भ्रम के तत्त्व का परिचायक है।

यद्यपि एक वर्ष के पूर्ण सप्ताहो को बराबर सख्या मे तिमाहियों मे विभक्त करना असम्भव दिखाई देता है तो भी कुछ व्यापारिक फर्मों ने इस कठिनाई को न्यूनतम करने का प्रयास किया है। कुछ फर्में 4 सप्ताह के अन्तरो का लेखा रखती है। इस प्रकार के 13 अन्तर एक वर्ष मे आते है परन्तु इस ढग से त्रैमासिक आँकडो को नही रखा जा सकता। कुछ और फर्में तिमाहियो के अनुसार वृत्त रखती है, प्रत्येक तिमाही तीन मास की होती है, पहले दो मास चार-चार सप्ताह के और तीसरा मास पाँच सप्ताह का। वास्तव मे इन दोनो योजनाओ मे से कोई भी सन्तोषजनक नही जबकि दोनो कृत्रिम महीनो मे से किसी एक मे प्रदत्त कैलेन्डर का महीना आ जाए। और किसी भी योजना के अन्तर्गत छुट्टियो के अनुपयुक्त ढग से आने से परिणाम यह होता है कि आने वाले कृत्रिम मासो मे काम करने के दिनो की सख्या बदल जाती है। कैलेन्डर के इन दोषो को दूर करने के लिये कई आन्दोलन हुए। एक योजना समरूप तिमाहियो का सुझाव देती है, प्रत्येक मे तीन मास होगे, मास समरूप नही, अपितु प्रत्येक मासिक प्रतिरूप तीस अथवा इकतीस दिनो का होगा, इन तीनो प्रतिरूपो को दोहराया जाएगा ताकि एक वर्ष मे ये चार बार आएँ। तथापि एक फालतू दिन जो साल का दिन के नाम से जाना जाएगा वर्ष के मध्य मे आएगा।

सांख्यिकी-विद् के सामने कई बार या तो महीने मे कैलेन्डर दिवसों की सख्या या एक मास मे कार्य-दिवसों की सख्या के लिये काल-श्रेणी की व्यवस्था करने की कठिनाई आती है। यदि घरो मे पानी के उपभोग के मासिक आँकडे कैलेन्डर भिन्नता के लिये समजित किये जाने है, तो समुचित समजन कार्य-दिवसो की अपेक्षा कैलेन्डर-दिवसो के आधार पर होगा। प्रत्येक मासिक आँकडे को दिनो की सख्या से भाग करके, प्रतिदिन का उपभोग बताते हुए यह समजन पूर्ण किया जाता है। यदि अको को उनके मूल विस्तार मे रखना वाछित हो तो प्रतिदिन के उपभोग को प्रति मास के दिनो की औसत सख्या से गुणा किया जा सकता है, जोकि 365 दिनो के वर्ष के लिये 365 — 12=30 4167 है। मासिक उत्पादन आँकडो के लिये कैलेन्डर भिन्नता के समजन मे प्रत्येक मास मे कैलेन्डर के दिनो की अपेक्षा कार्य-दिवसो की सख्या का विचार आएगा।[1]

कुछ काल-श्रेणियो का कैलेन्डर भिन्नता के लिये समजन करना पूर्णतया अनुचित होगा। बहुत से निगमों के कार्यकारी प्रशासकीय तथा पर्यवेक्षण सम्बन्धी वेतन व्यय के लिये ऐसा करना स्पष्टतया भ्रामक होगा क्योंकि इस प्रकार के वेतन मास के दिनो अथवा मास के कार्य-दिवसो की सख्या पर विचार किए बिना प्राय मासिक आधार पर दिए जाते है। समजन चाहने वाले आँकडो के लिए यह प्राय: कठिन सांख्यिकीय समस्या है कि काम करने वाले दिनों की व्यवस्था की जाए अथवा केवल कैलेन्डर-दिनो को कुछ वस्तुओ के बारे

---

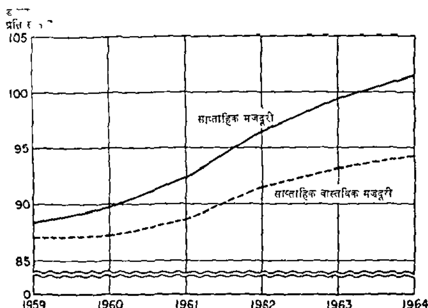
1 प्रक्रिया के सम्बन्ध मे विस्तृत अनुदेशो के लिए इस पुस्तक का द्वितीय सस्करण, पृष्ठ 255—256 देखिए।

मे तर्क की दृष्टि से यह कहा जा सकता है कि महीने के भीतर छुट्टियाँ, उस मास मे उपभोक्ता त्र्यो मे कमी लाने की अपेक्षा, वास्तव मे उन्हे बढा सकती है। यदि अवकाश मास के अन्तिम दिन हो और भण्डार बन्द हो तो भी इससे विक्रय घट सकते है। उन सस्थाओ का, जोकि डाक द्वारा बहुत दूर से आदेश प्राप्त करती हैं, पहले मास के अन्तिम कुछ दिनो मे होने वाले अवकाशो द्वारा विक्रय घट सकता है। तार्किक समजन का निर्धारण करना प्राय: बहुत कठिन है और सम्बन्धित व्यापार या उद्योग की जानकारी आवश्यक है। सन्देह के मामले मे प्रयोग द्वारा ऐसे नियम का निर्धारण करना सर्वदा सम्भव है जो समजन किये जाने के बाद सर्वथा निर्विघ्न परिणाम देता है। इस प्रकार का परीक्षण कोई निश्चयात्मक प्रमाण नही देता अपितु केवल काल्पनिक होता है।

जनसख्या-परिवर्तन—यह पहले ही देखा जा चुका है कि ऊर्ध्वमुखी उपनति मे एक तत्त्व जनसख्या मे वृद्धि हो सकता है। मूलभूत अको को जनसख्या के अकों से विभक्त करके जनसख्या परिवर्तन के लिये आँकडो का समजन किया जा सकता है, इस प्रकार प्रति व्यक्ति आधार पर आँकडो की अभिव्यक्ति होती है। यह वैसा ही है जैसा कि चार्ट 11 2 मे किया गया था। वैकल्पिक रूप मे, चुने गए जनगणना वर्ष जैसे कि 1960, को जनगणना अको के सापेक्ष सम्बन्ध मे रखा जा सकता है जो 1 00 या 100 प्रतिशत के बराबर है। यदि मूलभूत आँकडो को जनसख्या सापेक्षो से भाग किया जाता है तो परिणामत प्राप्त अक निश्चित (1960 की) जनसख्या मे सम्बन्धित होंगे।

मूल्य परिवर्तन—ब्याज प्राय: भौतिकीय मात्रा परिवर्तनो मे केन्द्रित होता है न कि उन परिवर्तनो मे जो डालरों की मदो मे हुए है। उन श्रेणियों का जैसे कि विक्रय, आय, पदार्थों का मूल्य तथा अन्य जिन्हे मूलभूत रूप मे डालरो मे व्यक्त किया जाता है, उन शब्दो मे व्यक्त किये जाने के लिये जो कि कीमत परिवर्तनो से स्वतन्त्र है अवश्यमेव अपस्फीतीकरण किया जाना चाहिए। डालर श्रेणी को एक उचित मूल्य सूचकाक श्रेणी से भाग करके अपस्फीतीकरण को पूर्ण किया जाता हैं। सारणी 11 1, 1959 से 1964 तक प्रतिवर्ष निर्माण उद्योगो मे उत्पादन कर्मचारियो को दी जाने वाली साप्ताहिक औसत मजदूरी को दिखाती है। साप्ताहिक मजदूरी के स्तम्भ की दाई ओर उसी वर्ष के लिये उपभोक्ता मूल्य सूचकाक दिया गया है। अब यदि डालरो मे प्रतिवर्ष साप्ताहिक मजदूरी को अनुरूपी मूल्य सूचकाको (दशमलव मे अभिव्यक्त) मे विभक्त किया जाता है तो परिणाम है साप्ताहिक मजदूरी अको की श्रेणी जो मूल्यो मे परिवर्तनो के लिये समजित है। इनको स्तम्भ (4) मे दिखाया गया है और वास्तविक-मजदूरी या विशेषतया 1957—1959 डालरो की मजदूरी की शब्दावली म स केत किया गया है। चार्ट 11.11 साप्ताहिक डालर मजदूरी तथा साप्ताहिक वास्तविक मजदूरी के वक्र दिखाता है। यद्यपि 1959—1964 के बीच कीमते चढी, तो भी साप्ताहिक वास्तविक मजदूरी ने सतत वृद्धि दिखाई। ध्यान दीजिये, सारणी 11 1 तथा चार्ट 11 8 मे प्रदर्शित, अको का औसत साप्ताहिक मजदूरी से सम्बन्ध है और उपभोक्ता मूल्य सूचकाक का अपस्फीति कारक के रूप मे उपयोग किया गया। उदाहरण के लिए वस्तुओ के थोक मूल्यों का सूचकाक सर्वथा अनुपयोगी रहता। जब तक अपस्फीति किये जाने वाले आँकडो के सम्बन्ध मे अपस्फीतिकारक का प्रयोग नहीं किया जाता तब तक मूल्य परिवर्तनो का एक सन्तोषजनक समजन प्राप्त नहीं किया जा सकता।

तुलनात्मकता प्राप्त करना—सांख्यिकीविदो को व्यापार मण्डलों के लिये सभी सदस्यो से शीघ्र विवरण प्राप्त करने म बहुत बडी कठिनाई प्रस्तुत होती है। उदाहरण के लिये,



चार्ट 11 8 निर्माण उद्योगों मे उत्पादन कर्मचारियो की 1959—1964 की औसत कुल साप्ताहिक आय । सारणी 11 1 के आँकड़े । वास्तविक मजदूरी उपभोक्ता मूल्य-सूचकांक के रूप मे है, जिसमे 1957—1959=100 ।

सारणी 11 1

निर्माण उद्योगो मे उत्पादन कर्मचारियो की औसत कुल साप्ताहिक आय तथा उपभोक्ता मूल्य सूचकाक, 1959—1964

वर्ष (1)	साप्ताहिक आय (2)	मूल्य सूचकाक (1957—59=100) (3)	साप्ताहिक मजदूरी वास्तविक [स्तम्भ (2)—स्तम्भ (3)] (4)
1959	$ 88 26	101 5	$87 0
1960	89 72	103 1	87 1
1961	92 34	104 2	88 6
1962	96 56	105.4	91 6
1963	99 38	106 7	93 1
1964	101 40	107 8	94,1

आँकड़ स्टैटिस्टिकल ऐब्स्ट्रैक्ट आफ दि यूनाइटिड स्टट्स, *1964*, पृष्ठ 236, 356 से।

93 फर्में एक महीने के भीतर सूचना दे सकती है और 96 बाद मे, तो भी बाद की फर्मो मे आवश्यक रूप से सारी 93 फर्म सम्मिलित नही है। पूर्णतया उचित होने के लिए प्रति मास सारे काल की एक नई काल-श्रेणी बनाई जानी चाहिये जिसमे सभी और केवल वे सभी फर्में सम्मिलित हो जिन्होंने विचाराधीन वर्ष मे शीघ्रता से सूचना दी हो। इस प्रकार पूर्ण काल-श्रेणी मे एक मास 93 फर्मों के लिये मापा जाएगा, और दूसरा महीना 96 के लिये। यह एक बहुत श्रमसाध्य ढग है। केवल उन फर्मों के लिये, जिन्होंने चालू महीने के लिये शीघ्रता से सूची दी हो, उनके पहले काल की प्रतिशतता को परिकलित कर और पहले महीने (जिसमे अब सारी फर्में सम्मिलित हैं) के अको को इस प्रतिशतता से गुणा करके प्रारम्भिक अनुमान लगाना अधिक सुगम ढग है। जब सारी सूचनाएँ मिल जायें तो सशोधित अको को परिकलित किया जा सकता है। यदि एक उद्योग का विस्तार हो रहा है और नई फर्में खुल रही है तो वास्तव मे उन सबको सम्मिलित कर लेना उचित है। वर्तमान फर्मो की बढी हुई गतिविधि या नई फर्मो के खुलने का परिणाम रोजगार तथा उत्पादन मे वृद्धि हो सकता है। इसी प्रकार फर्मो का अस्तित्व समाप्त हो सकता है और इन्हें सूचना सूची से अवश्य ही समाप्त कर दिया जाना चाहिये।

अतुलनीयता का दूसरा स्रोत यह तथ्य हो सकता है कि सूचना देने की इकाई बदल गई है। यदि यह केवल पाउड आधार से टन आधार मे परिवर्तन का प्रश्न है तो यह बात साधारण है। जहाँ पर उत्पादन प्रकार मे बदला है, वहाँ भी सन्तोषजनक हल प्राप्त करना कठिन है। उदाहरणार्थ, हम 1935 तथा 1967 के मध्य रेडियो सेटो के भौतिक उत्पादन की तुलना कैसे कर सकते है ? न केवल दो वर्षो मे बेचे गए रेडियो सेटों के विभिन्न स्तरो की मात्राओं मे ही भिन्नता थी अपितु उन रेडियो सेटो की, जो कीमत, भार, ट्यूबो की सख्या अथवा अन्य शीघ्रता से मापे जाने वाले गुणो की दृष्टि से समान थे, उपभोक्ता को उपयोगिता देने की अपनी क्षमता मे भी विशाल अन्तर था।

12

काल-श्रेणी का विश्लेषणः

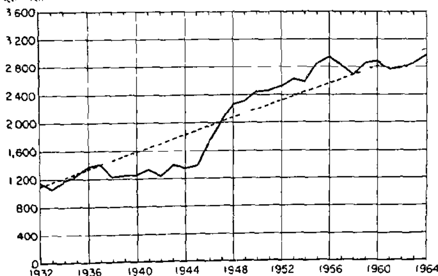
दीर्घकालिक उपनित—ऋजु रेखा

एक श्रेणी की उपनति को वक्र के माध्यम से वर्णित करने के प्रयास के दो महत्त्वपूर्ण कारण है। प्रथम, *उपनति से विचलनों के माप की इच्छा की जा सकती है।* इन विचलनो मे चक्रीय, ऋतुनिष्ठ, तथा अनियमित गतिया आती है। बहुधा चक्रो का अध्ययन करने के लिये, चक्रो के अलगाव के प्रयास मे इन विचलना की प्राप्ति केवल एक पग है। दूसरे, उन कारको के प्रभाव को ध्यान से देखने के लिये जो उपनति पर पडते हैं, एक उपनति की दूसरी के साथ तुलना करने के लिये, उपनति गतिया चक्रीय उतार-चढावो पर क्या प्रभाव रखती हैं, इसकी खोज करने के लिये, अथवा उपनति के भावी व्यवहार का पूर्वानुमान करने के प्रयास मे *स्वय उपनति का अध्ययन करने की इच्छा की जा सकती है।*

जिस उद्देश्य के लिये माप लिए गए हैं वह अपनाए गए ढगो का अशत निर्धारण करता है। यदि उद्देश्य केवल मात्र चक्रो को अलग करना हो, तो यह कल्पना करना तर्कसगत है कि चुनी हुई उपनति रेखा चक्रो मे से इस प्रकार गुजरे कि प्रत्येक चक्र के धनात्मक तथा ऋणात्मक खण्डो के मध्य निकटतम सन्तुलन होने दे। वास्तव मे, वक्र द्वारा इस *उद्देश्य की पूर्ति हो गई है, ऐसा समझना हमारी इस धारणा पर निर्भर करता है* कि प्रत्येक दशा मे चक्र किससे बनता है। यदि, इसके विपरीत, उद्देश्य तुलनाएँ करना, सामान्य निष्कर्ष निकालना, तथा भविष्यवाणी करना हो, तो वक्र केवल तर्कसगत ही नही अपितु इस प्रकार के स्वभाव वाला भी होना चाहिए कि उसे शीघ्रता से गणितीय सूत्र के द्वारा *व्यक्त* किया जा सके। उदाहरणार्थ, ऐसे सूत्र के माध्यम से एक व्यक्ति कह सकता है कि किसी *निर्दिष्ट समय पर एक श्रेणी प्रति* वर्ष विकास का एक निश्चित अनुपात, *या एक* निश्चित मात्रा प्रदर्शित करती है, और यदि *यह* प्रवृत्ति बनी रहे तो भविष्य मे किसी विशिष्ट समय पर उपनति किसी निश्चित मूल्य पर पहुँच जाएगी। तो भी उपनति को गणितीय सूत्र द्वारा जोडने से उपनति योग से मानसिक तत्त्व को नही हटाती। साख्यिकीविद् सूत्र के उस ढग के चयन से जिसका वह प्रयोग करता है, या उन वर्षों द्वारा जिनको वह वक्र मे जोडता है, वक्र के व्यवहार को बदल सकता है। अत यह सत्य बना रहता है कि साख्यिकी-विद् इस *आधार पर कि निष्पक्ष एव तर्कसगत आधार सभव है,* पहले ही ऐसा निर्णय करता है जिसे वह सोचता है कि उपनति को अवश्यमेव उसी प्रकार का दीखना चाहिये, और फिर वह ऐसे गणितीय सूत्र को चुनता है जिससे परिणाम लगभग निकटतम होगा।

निरीक्षण द्वारा आसंजित उपनति

उपनति को लेखाचित्र द्वारा वर्णित करने का सबसे सरल ढंग निरीक्षण द्वारा है। यदि उपनति सरल रेखा हो तो उसे पारदर्शक पैमाने द्वारा या पर्याप्त खिंची हुई डोरी के टुकड़े द्वारा अंकित किया जा सकता है। यदि उपनति अरेखिक है, तो उसे स्वतन्त्रहस्त से खींचा जा सकता है अथवा कील का, समजनीय वक्र पैमाने का अथवा फ्रेंच वक्र का उपयोग किया जा सकता है।[1]



चार्ट 12 1 संयुक्त राज्य अमरीका मे, 1932—1964 मे, समाचार-पत्र विज्ञापन और सीधी रेखा वाली उपनति को निरीक्षण द्वारा 1932—1960 के वर्षो से जोड़ना। विज्ञापन-वंशावली के आंकड़े सारणी 12 2 से। चार्ट 12.3 के शीर्षक के बाद टिप्पणियाँ देखिये।

चार्ट 12 1 संयुक्त राज्य अमरीका मे 1932—1960 के लिये निरीक्षण द्वारा सीधी रेखा उपनति के समाचार-पत्र विज्ञापन के साथ सलग्नता को दिखाता है। जब भी आंकड़ो के समूह के साथ एक वक्र को आसंजित कर दिया जाता है तो आसजन की एक कसौटी की आवश्यकता पड़ती है। चार्ट 12 1 की उपनति को वक्र के द्वारा इस प्रकार अंकित किया गया था कि निरीक्षण के द्वारा निर्णीत उपनति रेखा के ऊपर और नीचे के चक्रीय भाग लगभग बराबर थे। उपनति रेखा 1946 के मध्य विज्ञापन वंशावली आंकड़ो की लगभग औसत (निरीक्षण द्वारा निर्धारित) मे से भी होकर गुजरती है। इस अत्यधिक व्यक्तिनिष्ठ विधि पर आपत्ति की जा सकती है जैसा कि सभी व्यक्तिनिष्ठ विधियो पर किया जा सकता है व्यक्ति यह निश्चय करता है कि उसे क्या उत्तर चाहिये और फिर इसके निर्धारण

1. ये तीन युक्तियाँ उन फर्मों से प्राप्य हैं जो रचनाकारा अथवा तकनीशियनों के उपयोग की वस्तुएं बेचती हैं।

करने को चलता है । तथापि, जैसा कि पहले बताया जा चुका है, प्राप्य बहुसंख्यक गणितीय प्रविधियों मे से किसी को ध्यानपूर्वक चुनने से लगभग बहुत अधिक समान परिणाम प्राप्त किया जा सकता है ।

ऋजु रेखा का न्यूनतम-वर्ग आसजन

एक गणितीय समीकरण न केवल हमे काल-श्रेणी मे उपनति रेखा खीचने की अनुमति देता है अपितु उपनति समीकरण मे, उस उपनति की एक सक्षिप्त परिभाषा भी प्रदान करता है । यदि स्वय उपनति का अध्ययन करना हो या उसे प्रेक्षित आँकड़ो से परे बढाया जाना हो तो यह विशेष रूप से आवश्यक है कि उपनति की एक वस्तुनिष्ठ रूप से निर्धारित *समीकरण द्वारा व्याख्या की जाए ।*

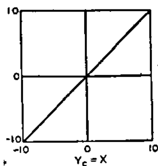
ऋजु रेखा—वक्र का सरलतम ढग ऋजु रेखा है जिसकी $Y_c = a + bX$ प्रकार के समीकरण द्वारा व्याख्या की गई है, जिसमे X स्वतन्त्र चर है तथा Y_c आश्रित चर का उपनति मान है ।[2] क्योंकि विश्लेषणीय प्रत्येक श्रेणी के लिए उनके मूल्यो का निर्धारण अवश्य किया जाना चाहिये, अत. a तथा b का अज्ञातों के रूप मे सकेत किया गया है । उन्हे *स्थिराक भी कहा जाता है क्योंकि एक बार उनके मूल्यो का निर्धारण हो जाने पर वे* परिवर्तित नही होते ।

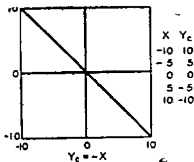
एक सबसे सरल उदाहरण लेने के लिए, मान लीजिए कि $a=0$ तथा $b=1$; तब समीकरण $Y_c=X$ बनता है, इसका अर्थ यह है कि स्वतन्त्र चर की इकाई की प्रत्येक वृद्धि के साथ आश्रित चर भी एक इकाई बढ जाता है । इस समीकरण को चार्ट 12.2 के बाई ओर के ऊपरी खण्ड मे *अकित किया गया है । सयोगवश, यह ध्यान देना चाहिये कि* चारो चतुर्थांश इस अध्याय मे दिखाए गए है । वक्र बनाने का प्रयत्न करने से पूर्व, X तथा Y_c मानो की सारणी बनाना अच्छा है, जैसा कि चार्ट पर दिखाया गया है, जिसमे Y के परिकलित मूल्यो का अकन किया गया है, जो चुने हुए X मानो के अनुरूप है । वस्तुत इसे या किसी भी ऋजु रेखा के बनाने के लिए केवल दो बिंदुओं के आवश्यकता पडती है, *और दो X मानो को परस्पर एक दूसरे से पर्याप्त अन्तर के समझकर प्रयोग करने से सबसे* अधिक शुद्ध परिणाम प्राप्त होते है ।

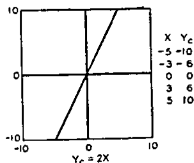
अन्य ऋजु-रेखा समीकरण तथा उनके वक्र, चार्ट 12 2 के दूसरे अनुभागो मे दिखाए गए है, जिनका निरीक्षण निम्नलिखित जानकारी प्रदान करता है Y का मान a है जब कि X शून्य है (X मूलबिन्दु पर Y मूल्य), अथवा जैसा कि इसे प्राय. कहा जाता है, Y *अन्त खण्डित करती है, जबकि b पक्ति के खड़ेपन अथवा ढाल का सकेत करती है ।* जब b धनात्मक हो तो ढाल ऊपर की ओर होता है, जब b ऋणात्मक हो तो ढाल नीचे की ओर होता है ।

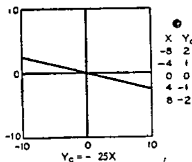
यद्यपि चार्ट 12 1 की ऋजु रेखा उपनति को निरीक्षण द्वारा प्राप्त किया गया था, आँकड़ो को गणितीय विधि से आसजित कर नही, तो भी हम इसके निकटतम समीकरण *का निर्धारण कर सकते है । यदि मूलबिन्दु 1932 पर लिया जाए, तो यह देखा जाएगा कि* वक्र का Y, मान 1,100 है, अत. a=1,100 है । b का निर्धारण करने के लिए, हमे केवल 1960 के लिए केवल उपनति के मान को जानना आवश्यक है, जो कि 2,800 है, उस मान

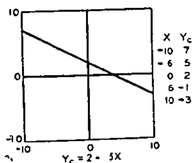
2. *Y चिह्न का आश्रित चर के प्रेक्षित मान को निर्दिष्ट करने के लिये प्रयोग किया जाएगा, जब कि* Y_c प्राय गणितीय समीकरण से परिकलित किये गए मान का सकेत करता है ।

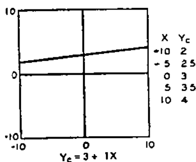


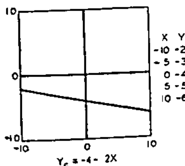


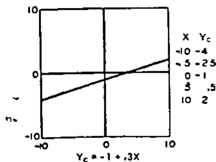












चार्ट 12 2 ऋजुरेखा समीरकरण तथा वक्र ।

तथा 1932 के लिए उपनति मान के मध्य के अन्तर को लो, और विगत वर्षों के अंक 28 के द्वारा विभक्त करो। यह हम

$$\frac{2,800-1,100}{28}=60\ 71,$$

प्रदान करता है जब कि b का मान अर्थात् प्रत्येक वर्ष उपनति में वृद्धि की मात्रा है। तब समीकरण है—

$$Y_c=1\ 100+60\ 71X$$

मूलबिन्दु 1932। Y इकाइयां, एक वर्ष।

काल-श्रेणी उपनति समीकरण अवश्यमेव सर्वदा मूलबिन्दु तथा X इकाइयों से सम्बन्धित व्याख्या के साथ होने चाहिएँ। हम अवश्य X इकाइयों का निर्देश करना चाहिए, क्योंकि जैसा कि हम बाद में देखेंगे, वे एक वर्ष छह मास, या एक मास हो सकते हैं। मूलबिन्दु का अवश्यमेव कथन किया जाना चाहिए, क्योंकि आंकड़ों की श्रेणी जोड़ के उद्देश्यों के लिये वर्षों महीनों या अन्य कालानुक्रमिक इकाइयों द्वारा शून्य उपयोग नहीं रखती। फलतः सांख्यिकीविद इच्छानुसार X मूलबिन्दु चुन सकता है, और हम बाद में देखेंगे कि जब भी सम्भव हो कालानुक्रमिक श्रेणी के मध्य पर वह मूलबिन्दु चुनना लाभदायक रहेगा।

यदि हम चार्ट 12.1 की उपनति के समीकरण को, 1946 को मूल रूप में रखकर, पुनः लिखें, तो हमारे पास

$$Y_c=1\ 949\ 9+60\ 71\ Y$$

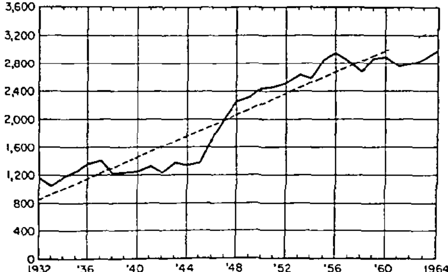
मूलबिन्दु, 1946, Y इकाइयां, एक वर्ष।

ध्यान दीजिए कि b का मान पहले जैसा है। a के नए मान को, या तो 1946 के उपनति मान का अध्ययन करके या a के पहले मान में b मान का 14 गुणा जोड़ कर, प्राप्त किया जा सकता है। *b के मान को 14 से गुणा किया जाता है क्योंकि 1946, 1932 से 14 वर्ष परे है।*

न्यूनतम वर्गों की विधि—न्यूनतम वर्गों का ढंग आंकड़ों की श्रेणी के साथ ऋजु रेखा उपनति रेखा का वस्तुनिष्ठ आमजन प्राप्त करने की सुविधाजनक युक्ति प्रदान करता है। इसका प्रयोग कई और अधिक जटिल उपनति-प्रकारों में भी किया जा सकता है जिनमें से कुछ का वर्णन अध्याय 13 में किया जाएगा। न्यूनतम वर्ग विधि के दो उद्देश्य हैं :

1 *आमजित ऋजु रेखा में प्रेक्षित मानों के ऊर्ध्वाधर विचलनों का योग शून्य के बराबर है। चार्ट 12 3 में 1932—1960 की उपनति रेखा से प्रत्येक Y मान में यदि एक* ऊर्ध्वाधर रेखा खींची जाए तो उपनति रेखा के ऊपर की ओर बढ़ने वाली ऊर्ध्वाधर रेखाएँ उन रेखाओं का यथार्थ सन्तुलन कर देंगी जो नीचे की ओर बढ़ रही हैं। यह उपनति केवल मात्र ऋजु रेखा नहीं है जिससे विचलनों का बीजगणितीय योग शून्य के बराबर हो, वस्तुतः कोई भी ऋजु रेखा (ऊर्ध्वाधर के अतिरिक्त) जो $\bar{X}$ में से गुजरती है, $\bar{Y}$ इस आवश्यकता की पूर्ति करती है।

2 *इन सभी विचलनों के वर्गों का योग किसी अन्य ऋजु रेखा से वर्गित ऊर्ध्वाधर विचलनों के योग से कम है।* इस दूसरी विशेषता के कारण ही आमजन के ढंग को न्यूनतम



चार्ट 1.23. संयुक्त राज्य अमरीका मे 1932—1964 में समाचारपत्र विज्ञापन तथा उपनति जैसा कि न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा एक ऋजु रेखा को 1932—1960 के वर्षों के साथ आसंजित दिखाया गया है। सारणी 12.2 के अंकड़। ध्यान दीजिये कि हो सकता है दो उपनतियां प्रयुक्त की गई हो, एक श्रेणी के प्रथम भाग के लिये और दूसरी श्रेणी के बाद (देखें पृष्ठ 251—252 के भागके लिये।

वर्गों का ढग भी कहते हैं।[3] जब इस दूसरी आवश्यकता को पूर्ण करने के लिये एक वक्र को आसजित किया जाता है तो प्रथम आवश्यकता की स्वत पूर्ति हो जाती है।[4]

---

3 यह दिखाया जा सकता है कि उन विचलनो को प्राप्त करने की अधिकतम सम्भावना, जो किसी परिकलित मान अथवा माना की श्रेणी के गिर्द प्रमामान्य रूप से वटित हो, तब प्राप्त होती है, जब वर्णित विचलनो का योग न्यूनतम हो (देखिए परिशिष्ट घ, परिच्छेद 12 1)। यदि यह विश्वास हो कि समुचित प्रमामान्यक से विचलन आकस्मिक त्रुटियां हैं, तो इसका अभिप्राय यह है कि न्यूनतम वर्गों की विधि आसजन की समुचित विधि हैं। बीजगणितीय रूप मे भी यह विधि सुविधाजनक है जिसमें विद्यार्थी सहसम्बन्ध विश्लेषण तथा प्रसरण के विश्लेषण के सम्बन्ध मे देख सकता है। उपनति रेखा के गिर्द काल-श्रेणी के उतार-चढाव, फिर भी, स्वतन्त्र आकस्मिक घटनाएं नहीं होते तथा यह शकास्पद है कि उपनति आसजन में न्यूनतम वर्गों की विधि के प्रयोग या सुविधा के अतिरिक्त कोई अन्य विशेष कारण है। इस ग्रन्थ मे वर्णित उपनतियो मे से कुछ, वास्तव मे, अन्य विधियां से आसजित हैं। कुछ सांख्यिकीविद् तो यहां तक कहते हैं कि काल-श्रेणी उपनतियो के लिए न्यूनतम वर्गों की कसौटी समुचित नहीं है क्योंकि काल-श्रेणियां कभी-कभी चरम विचलनों का रूप ग्रहण कर लेती हैं जो प्रमामान्य सिद्धान्त के अनुकूल नहीं होता। हां, न्यूनतम वर्गों की विधि वर्ग बनाने की प्रक्रिया के कारण, चरम विचलनो से विशेष रूप मे प्रभावित होती है।

4. Y_c मानों का माध्य Y मानो के माध्य के समान ही होता है। यह परिशिष्ट घ, परिच्छेद 19.1 मे दिखाया गया है। फिर भी, उस व्याख्या को पढ़ने से पूर्व पाठक को इस अध्याय के अगले अनुभाग को ध्यानपूर्वक देख लेना चाहिए।

एक प्रकार से न्यूनतम वर्ग द्वारा विधि उपनति आसंजित रेखा समान्तर माध्य के समान है, क्योंकि समान्तर माध्य माना की श्रेणी की अपेक्षा एक अकेला मान है जो आँकड़ों के समुच्चय को संक्षिप्त करता है और जिसमें अभी अभी वर्णित दो विशेषताएँ हैं।

प्रसामान्य समीकरण—यह पहले ही विचार किया जा चुका है कि ऋजु रेखा समीकरण के अन्तर्गत दो स्थिर a तथा b आते हैं। आसंजित ऋजु रेखा के लिये a तथा b के मान प्रेक्षित आँकड़ों से निर्धारित किये जाने चाहिएँ, फलत दो *प्रसामान्य समीकरण* प्राप्त किए जाने चाहिये और युगपत् हल किए जाने चाहियें। ये प्रसामान्य समीकरण है

$$\text{I} \quad \Sigma Y = Na + b\Sigma X,$$
$$\text{II} \quad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

इस बिन्दु पर इन प्रसामान्य समीकरणों की प्राप्ति[5] के प्रयत्न के बिना यह देखने के लिये कि ये दोनों समीकरण किस प्रकार प्राप्त होते हैं, हम सरल निदर्शी आँकड़ों के समुच्चय

सारणी 12.1

न्यूनतम वर्ग की विधि द्वारा ऋजु रेखा के निदर्शी आकड़ों X तथा Y के साथ आसंजन के योगों तथा प्रसामान्य समीकरणों का निर्धारण।

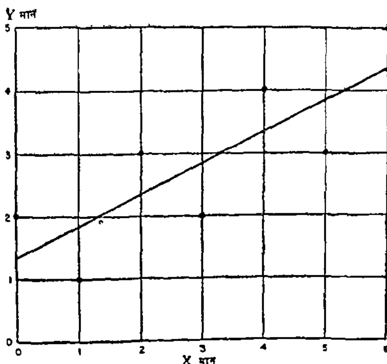
			प्रथम प्रसामान्य समीकरण का निर्धारण		द्वितीय प्रसामान्य समीकरण का निर्धारण			
X	Y	प्रेक्षण समीकरण $Y=a+bX$	a का गुणांक	a के गुणांक से गुणा किया गया प्रेक्षित समीकरण स्तम्भ (3) × स्तम्भ (4)	b का गुणांक	b के गुणांक से गुणा किया गया प्रेक्षित समीकरण स्तम्भ (3) × स्तम्भ (6)	XY	X^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	2	$2=a$	1	$2=a$	0	...	0	0
1	1	$1=a+b$	1	$1=a+b$	1	$1=a+b$	1	1
2	3	$3=a+2b$	1	$3=a+2b$	2	$6=2a+4b$	6	4
3	2	$2=a+3b$	1	$2=a+3b$	3	$6=3a+9b$	6	9
4	4	$4=a+4b$	1	$4=a+4b$	4	$16=4a+16b$	16	16
5	3	$3=a+5b$	1	$3=a+5b$	5	$15=5a+25b$	15	25
6	5	$5=a+6b$	1	$5=a+6b$	6	$30=6a+36b$	30	36
21	20	..	..	$20=7a+21b$	...	$72=21a+91b$	74	91

5. दो प्रसामान्य समीकरणों की प्राप्ति के लिये परिशिष्ट घ, परिच्छेद 12.2 देखिये।

का प्रयोग करेंगे। आंकडे सारणी 12 1 के स्तम्भ 1 तथा 2 एव चार्ट 12 4 मे दिखाए गए हैं, जहां यह देखा जा सकता है कि X तथा Y मानो के 7 जोडे है। अत पहले हम सात प्रेक्षण समीकरणों को लिखेंगे और फिर उनसे दो प्रसामान्य समीकरण प्राप्त करेंगे। सारणी 12 1 के स्तम्भ 3 मे सात प्रेक्षण समीकरण दिखाए गए है। क्योकि प्रेक्षित आंकडे ऋजु रेखा पर नही पडते, अत सात प्रेक्षण समीकरण सभी एक दूसरे के अनुरूप नही हैं। दो प्रसामान्य समीकरणो का यह उद्देश्य है कि वे हम इन प्रेक्षण समीकरणो के औसत हल के एक ढग पर पहुँचा दें।

प्रथम प्रसामान्य समीकरण, प्रत्येक प्रेक्षण समीकरण को उस समीकरण मे 1 के गुणाक से गुणा करके तथा जोड कर प्राप्त किया जाता है। a के गुणाक जो 1 हैं, सारणी 12 1 के स्तम्भ 4 मे दिखाए गए हैं। स्तम्भ 5, पुन प्रेक्षण समीकरण (अपरिवर्तित क्योकि a के सभी गुणाक 1 थे) तथा उनके योग प्रदर्शित करता है, जो प्रथम प्रसामान्य समीकरण है।

द्वितीय प्रसामान्य समीकरण प्राप्त करने के लिये प्रत्येक प्रेक्षण समीकरण को उस समीकरण मे b के गुणाक से गुणा किया जाता है और योग प्राप्त कर लिया जाता है। b के गुणाक सारणी 12 1 के स्तम्भ 6 मे दिखाए गए हैं और गुणनो के परिणाम स्तम्भ 7 मे दिये गए हैं। स्तम्भ 7 का योग द्वितीय प्रसामान्य समीकरण है।



चार्ट 12 4 एक ऋजु रेखा, न्यूनतम वर्गों की विधि द्वारा, निदर्शी मानो के एक समुच्चय मे आसनित कर दी गई है। सारणी 12 1 के आंकड़े।

अब दो प्रसामान्य समीकरण स्थापित किये जा सकते हैं :

$$\text{I. } 20=7a+21b,$$

$$\text{II } 74=21a+91b$$

इनको युगपत् रूप से हल करने के लिये हम प्रसामान्य समीकरण I को 3 से गुणा करते हैं और इसे प्रसामान्य समीकरण II में से घटाते हैं, इस प्रकार a का उन्मूलन किया जाता है और एक अज्ञात b के द्वारा एक समीकरण प्राप्त किया जाता है :

$$\begin{aligned} \text{II. } \quad 74&=21a+91b, \\ (\text{I}\times 3). \quad 60&=21a+63b, \\ \hline 14&=28b, \\ b&=0.5. \end{aligned}$$

a का मान प्राप्त करने के लिये हम b के मान का I या II किसी एक समीकरण में प्रतिस्थापन कर देते हैं। प्रसामान्य समीकरण I का प्रयोग करते हुए :

$$\begin{aligned} 20&=7a+21(0.5), \\ &=7a+10.5 \\ 7a&=9.5, \\ a&=1.357 \end{aligned}$$

पड़ताल के रूप में, a तथा b के मान का प्रसामान्य समीकरण II में निम्न प्रकार प्रतिस्थापन कर सकते हैं

$$\begin{aligned} 74&=21(1.357)+91(0.5), \\ &=28.5+45.5, \\ &=74.0. \end{aligned}$$

आसजित ऋजु रेखा (जिसे चार्ट 12.4 पर दिखाया गया है) को अब लिखा जा सकता है

$$Y_c=1.36+0.5X.$$

ध्यान दीजिये कि इस प्रसंग में मूलबिन्दु या X इकाइयों का वर्णन करना आवश्यक नहीं था, क्योंकि X मान तिथियाँ नहीं थीं।

पूर्वगामी उदाहरण एक विशेष दृष्टान्त था जिसके अन्तर्गत मानों के केवल 7 जोड़े आते हैं। अधिक सामान्य होने के लिये, आओ हम मानों के N जोड़ों के लिये प्रेक्षण समीकरण को निम्नलिखित प्रकार से लिखें :

$$\begin{aligned} Y_1&=a+bX_1 \\ Y_2&=a+bX_2 \\ Y_3&=a+bX_3 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_N&=a+bX_N. \end{aligned}$$

अब यदि हम इन प्रेक्षण समीकरणो मे से प्रत्येक को a के गुणाक (जो 1 है) से गुणा करें, तो वे अपरिवर्तित रहते है और उनका योग है

$$\text{I} \quad \Sigma Y = Na + b\Sigma X$$

यह प्रथम प्रसामान्य समीकरण है। द्वितीय प्रसामान्य समीकरण प्राप्त करने के लिये हम प्रत्येक प्रेक्षण समीकरण को उस समीकरण मे b के गुणाक से गुणा करते है, तथा जोडकर, प्राप्त करते है

$$X_1Y_1 = aX_1 + bX_1^2,$$
$$X_2Y_2 = aX_2 + bX_2^2,$$
$$X_3Y_3 = aX_3 + bX_3^2,$$

$$X_N Y_N = aX_N + bX_N{}^2,$$
$$\text{II} \quad \overline{\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2}$$

ध्यान दीजिये, हम ΣaX तथा ΣbX^2 की अपेक्षा $a\Sigma X$ तथा $b\Sigma X^2$ लिखते है क्योकि a और b स्थिर है।

अब हम एक ऋजु रेखा उपनति के लिये दो प्रसामान्य समीकरणो का प्रयोग करने की स्थिति मे है। हमे और प्रेक्षण समीकरण स्थापित करने की आवश्यकता नही पडेगी, केवल प्रसामान्य समीकरणो की आवश्यकता होगी। सारणी 12 1 के निदर्शी आँकडो के लिये केवल स्तम्भ *1, 2, 8,* और 9 के योग तथा N मान का प्रयोग होता है, दो प्रसामान्य समीकरणो के लिए प्रदान करते हुए

$$\text{I} \quad 20 = 7a + 21b,$$
$$\text{II} \quad 74 = 21a + 91b,$$

जो कि वैसा ही है, जैसा कि सारणी के स्तम्भ 5 तथा 7 मे दिखाए गए दो समीकरण है।

हम इस तथा अध्याय 13 मे न्यूनतम वर्ग के सिद्धान्त द्वारा न केवल उपनति रेखाओ को जोडने के लिये दो या अधिक प्रसामान्य समीकरणा का प्रयोग करगे, अपितु हम उनका प्रयोग अध्याय 19, 20, तथा 21 मे भी करेंगे जब हम रेखिक, अरेखिक तथा बहुविध सह सबधो का वर्णन करेंगे और इसका प्रयोग अध्याय 22 म भी किया जाएगा जहाँ हम काल-श्रेणी का सहसम्बन्ध बताएँगे।

वर्षो की विषम सख्या—सारणी 12 2 के आकडे तथा चाट 12 3 का ठोस वक्र सयुक्त राज्य अमरीका म 1932—1964 के समाचारपत्रो म विज्ञापन की मात्रा को पक्तियो (दस लाख) मे प्रदर्शित करते हैं। हम 1932—1964 के आँकडो मे एक ऋजु रेखा जोड देंगे और उस उपनति रेखा का 1964 मे से विस्तार करेंगे। दो प्रसामान्य समीकरणो .

$$\text{I} \quad \Sigma Y = Na + b\Sigma X,$$
$$\text{II} \quad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2,$$

का उपयोग, ऋजु रेखा उपनति के लिए a तथा b के मानो का निर्धारण करन के लिये किया जाएगा। तो भी, उन्हे इस ढग से सरल करना सम्भव है कि दोना समीकरणा का

सारणी 12 2

1932—1960 मे सयुक्त राज्य मे ऋजु रेखा को समाचारपत्र विज्ञापन के आँकड़ों के साथ जोडने के लिये मानो की सगणना

(पक्तियाँ, दस-लाख मे)

वर्ष	X	Y	XY		उपनति मान Y_c
1932	−14	1,164 8	−16 307 2		857 4
1933	−13	1,065 5	−13,851 5		933 7
1934	−12	1,178 9	−14,146 8		1,010 0
1935	−11	1,246 0	−13,706 0		1,086 2
1936	−10	1 380 0	−13,800 0		1,162 5
1937	−9	1 409 8	−12,688 2		1,238 8
1938	−8	1 225 4	−9,803 2		1,315 0
1939	−7	1 243 6	−8 705 2		1,391 3
1940	−6	1,268 6	−7,611 6		1,467 6
1941	−5	1 313 2	−6,566 0		1,543 9
1942	−4	1,241 8	−4,967 2		1,620 1
1943	−3	1,396 4	−4,189 2		1.696 4
1944	−2	1,361 3	−2 722 6		1,772 7
1945	−1	1,391 6	−1,391 6	−130,456 3	1,848 9
1946	0	1 729 7	0		1,925 2
1947	1	2,008 6	2 008 6		2,001 5
1948	2	2,263 3	4,526 6		2.077 7
1949	3	2 302 1	6 906 3		2,154 0
1950	4	2,440 2	9,760 8		2 230 3
1951	5	2,478 3	12,391 5		2,306 6
1952	6	2,505 4	15,032 4		2,382 8
1953	7	2 610 5	18,273 5		2,459 1
1954	8	2,581 3	20,650 4		2 535 4
1955	9	2,843 5	25,591 5		2,611 6
1956	10	2,911 0	29,110 0		2,687 9
1957	11	2,829 1	31,120,1		2,764 2
1958	12	2,685 6	32,227 2		2,840 4
1959	13	2,865 3	37,248 9		2,916 7
1960	14	2,888 6	40,440 4	285,288 2	2,993 0
1961	15*	2,777 0*	.		3,069 3
1962	16*	2,798.3*	...		3,145 5
1963	17*	2,858 6*			3,221 8
1964	18*	2,973 4*	.		3,298 1
योग	0	55,829 4		154,831 9	

*उपनति का परिकलन करने के लिये अप्रयुक्त।

आँकड़े सर्वे आफ करेन्ट बिजनेस के विभिन्न अंको से।

युगपत् हल आवश्यक नहीं होगा। इस तथ्य के कारण कि वर्ष X चर को बनाते हैं, हमें उस चर के लिये एक मूलबिन्दु को चुनना चाहिये। अब, हम जो वर्ष चाहे चुन सकते है तथा सारणी 12 2 मे यह देखा जा सकता है कि 1946 मे X मूलबिन्दु लिया गया था। मूलबिन्दु को मध्य वर्ग 1946 पर लेकर हमने X मानो के योग को शून्य के बराबर बनाया, इस परिणाम के साथ कि प्रमामान्य समीकरणो को अब इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\text{I.} \quad \Sigma Y = Na,$$

$$\text{II.} \quad \Sigma XY = b\Sigma X^2.$$

अब प्रसामान्य समीकरण I, a का मान देता है और प्रसामान्य समीकरण II, b का मान देता है। सारणी 12 2, ΣY तथा ΣXY का परिकलन प्रदर्शित करती है। वर्षों की सख्या को गिन कर या अन्तिम मे से पहले वर्ष को घटाकर तथा एक जोड कर N प्राप्त किया जाता है। ΣX^2 के मान का परिकलन सारणी 12.2 मे किया जा सकता था। तथापि, काल-श्रेणी समस्या के लिये यह कदापि आवश्यक नही है, क्योकि प्राकृतिक सख्याओं (1, 2, 3, · ·) की श्रेणी के वर्गो के योगो को परिशिष्ट ख से पढा जा सकता है या उस परिशिष्ट मे दिये गए सूत्र द्वारा परिकलन किया जा सकता है। प्रथम 14 प्राकृतिक अको के वर्गो का योग परिशिष्ट ख मे 1,015 दीखता है, अत समाचारपत्र विज्ञापन आँकड़ो के लिए, $\Sigma X^2 = 2(1{,}015) = 2{,}030$। अब हम दो प्रसामान्य समीकरणो मे प्रतिस्थापन करके प्राप्त करेंगे ·

$$\text{I.} \quad a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{55{,}829.4}{29} = 1{,}925\ 2 \text{ तथा}$$

$$\text{II.} \quad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{154{,}831.9}{2{,}030} = 76.2719.$$

उपनति समीकरण है

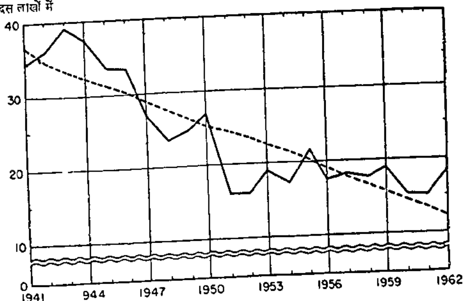
$$Y_c = 1{,}925\ 2 + 76\ 27X.$$

मूलबिन्दु, 1946, X इकाइयाँ, 1 वर्ष।

प्रत्येक वर्ष के लिये उपनति मान सारणी 12.2 के अन्तिम स्तम्भ मे दिखाए गए हैं। उपनति समीकरण मे उचित X मान (चिन्ह के साथ) की प्रतिस्थापना द्वारा एक उपनति मान प्राप्त किया जाता है। जब सभी वर्षो के लिये उपनति मानो की आवश्यकता पडती है, तो 1,925 2 लाख पक्तियो के a मान को 1946 के विपरीत रखकर तथा बार-बार b मान को 1947—1964 के वर्षो के लिए जोड कर उनको बडी शीघ्रता से प्राप्त किया जा सकता है। 1945 से 1932 तक के लिये b के मान को बार-बार 1946 के उपनति मान[6] मे से घटाया जाता है। श्रेणी की उपनति को चार्ट 12.3 मे दिखाया गया है। क्योकि दो बिन्दु एक ऋजु रेखा का निर्धारण करते है, अतः इसे 1932 तथा 1960 के उपनति मानो में

6. बारम्बार जोड परिकलन यत्र से किये जा सकते हैं या योग करने वाले यत्र पर प्रत्येक बार जोड-कर और अग्रयोग करके किये जा सकते हैं। बारम्बार घटाव भी इसी प्रकार मे किए जा सकते हैं। यदि ऐसे जोड करने वाले यत्र का प्रयोग किया जाता है जिसमे घटाव कुंजी नही है तो सर्वोत्तम यह है कि पहले प्रथम वर्ष के उपनति मान का परिकलन करो और फिर बारम्बार जोड से अन्यों को प्राप्त करो।

परिकलन किया जा सकता है। प्रथम 11 विषम प्राकृतिक अकों के वर्गों के योग को परिशिष्ट ग से 1,771 देखा जाता है, अत $\Sigma X^2 = 2(1,771) = 3,542$ अब हम a तथा b



चार्ट 12 5 सयुक्त राज्य अमरीका मे 1941—1962 मे शकरकन्द का उत्पादन, तथा उपनति जो न्यूनतम वर्गों की विधि द्वारा ऋजु रेखा के साथ आसजित दिखाई गई है। सारणी 12 3 के आंकड़े।

के लिए दो प्रसामान्य समीकरणों का हल कर सकते हैं

$$\text{I} \quad a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{528\ 2}{22} = 24\ 0.$$

$$\text{II} \quad b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X} = \frac{-1,956\ 4}{3,542} = -0\ 55$$

तथा उपनति समीकरण है

$$Y_c = 24\ 0 - 0\ 55X$$

मूलबिन्दु 1951—1952 X इकाइयाँ, $\frac{1}{2}$ वर्ष।

इस उपनति को चार्ट 12 5 मे एक खण्डित रेखा द्वारा दिखाया गया है।

ध्यान दीजिये कि शकरकन्द के उत्पादन की उपनति का अधोगामी ढाल है। उपनति समीकरण मे चिन्ह b, ΣXY के परिकलन के फलस्वरूप प्राप्त हुआ है। जब योग ऋणात्मक हो तब यह ऋणात्मक होता है और योग धनात्मक हो तो यह धनात्मक होता है।

सारणी 12 3

1941—1962 मे सयुक्त राज्य अमरीका मे शकरकद की उपज के आंकडो के साथ ऋजु रेखा को जोडने के लिए मानों का परिकलन

(दस लाख हड्रडवेट मे)

वर्ष	X	Y	XY		उपनति मान
1941	−21	34 4	−722 4		35 6
1942	−19	36 0	−684 0		34 5
1943	−17	39 1	−664 7		33 4
1944	15	37 5	−562 5		32 3
1945	13	33 7	−438 1		31 2
1946	−11	33 5	−368 5		30 1
1947	− 9	27 3	−245 7		29 0
1948	− 7	23 7	−165 9		27 9
1949	− 5	24 8	−124 0		26 8
1950	3	27 3	− 81 9		25 7
1951	− 1	16 0	− 16 0	−4 073 7	24 6
1952	1	16 0	16 0		23 5
1953	3	19 0	57 0		22 4
1954	5	17 2	86 0		21 3
1955	7	21 6	151 2		20 2
1956	9	17 4	156 6		19 1
1957	11	18 1	199 1		18 0
1958	13	17 6	228 8		16 9
1959	15	18 9	283 5		15 8
1960	17	15 4	261 8		14 7
1961	19	15 2	288 8		13 6
1962	21	18 5	388 5	2 117 3	12 5
योग	0	528 2		−1 956 4	

आंकडे संयुक्त राज्य अमरीका के कृषि विभाग की एग्रिकलचर स्टैटिस्टिक्स 1963 पृष्ठ 248 तथा *हिस्टारिकल स्टैटिस्टिक्स आफ दि यूनाइटिड स्टेटस* पृष्ठ 303 से

समीकरणो का मासिक आधार पर अनुकूलन

पूर्वोक्त उदाहरणो मे उपनति रेखाएँ मासिक की अपेक्षा वार्षिक आंकडो के साथ आसजित की गई थी। मासिक आकडो मे ऋजु रेखा उपनति को जोडने की प्रक्रिया वार्षिक आकडो मे आसजन की प्रक्रिया से भिन्न नही होती परन्तु 12 बार उन प्रक्षित मानो पर विचार किया जाता है और क्योंकि X मान बहुतर हो जाते हैं तो श्रम को 12 से अधिक से गुणा कर दिया जाता है। इसलिए यह उचित है कि पहले उपनति रेखा को वार्षिक आकडो,

से आसजित कर दिया जाए और फिर उपनति को मासिक आधार पर बदल दिया जाये। परिणाम सामान्यतया वही होता है जो उस समय आता यदि उपनति को मासिक आँकडो से आसजित किया जाता। कुछ परिस्थितियो मे वार्षिक आँकडो से उपनति को प्राप्त करना अधिक पसद किया जाता है क्योंकि एक तीव्र ऋतुनिष्ठ गति की विद्यमानता मासिक आँकडा से आसजित उपनति को विकृत कर सकती है।

वार्षिक योग-X इकाइयाँ एक वर्ष—1932—1960 के समाचारपत्र विज्ञापन के वार्षिक आँकडो के लिए उपनति को, 1946 के मूलबिन्दु तथा एक वर्ष की X इकाइयो के साथ $Y_c = 1,925\ 2 + 76\ 27X$ पाया गया। आधारभूत आँकडे प्रति वर्ष विज्ञापन की पक्तियो के प्रति दस लाख मे थे, अत प्रत्येक अक उस वर्ष का योग था जिसका वह सकेत करता था।

a के लिए प्राप्त मूल्य (चार अको तक) 1,925 2 मिलियन पक्तियाँ, और $a = \frac{\Sigma Y}{N} =$ 1,925 2, 1932—1960 के वर्षों के लिए 29 अको का समान्तर माध्य था। क्योंकि अक 1,925 2 वार्षिक योगो का a मान था, अत मासिक रूपो मे a मान इसके बारहवें भाग के बराबर होगा, या 160 4333 मिलियन पक्तियाँ होगा।

वार्षिक आँकडो से, b को 762 7 मिलियन पक्तियाँ पाया गया। अब सपूर्ण वर्ष के लिए समाचारपत्र विज्ञापन की मात्रा मे यह वार्षिक वृद्धि है। यदि हम वार्षिक योगों को 12 से विभक्त कर दें तो हमे *मासिक उपनति वृद्धि* प्राप्त होती है। क्योकि अब भी हमारे पास वार्षिक योग हैं, इसलिए हमे अको को घटाकर *प्रति मास* पक्तियो को लाखो मे लाने के लिए पुन 12 से भाग करना पडेगा। हम एक ही समय मे, 144 से भाग देकर, 76 27 ÷ 144 = 0 5297 मिलियन पक्तियो का मासिक b मान प्रदान करते हुए, इन दोनो कार्यो को तुरन्त पूर्ण करते है। मासिक रूपो मे समीकरण है

$$Y_c = 160\ 4333 + 0\ 5297X$$

मूलबिन्दु, जून—जुलाई 1946 X इकाइयाँ, 1 मास।

हमारा समजन एकदम पूर्ण नही हुआ है। इस कारण कि एक वर्ष मे मासो की सख्या सम होती है अभी अभी प्राप्त समीकरण का एक मूलबिन्दु है जो दो मध्य मासो के बीच मे पडता है और इसलिए मौलिक मासिक आकडो से आधा मास पीछे है।[7] अत *दो मासो के मध्य स्थित मूलबिन्दु को किसी सुविधाजनक मास तक सरका देना चाहिए।* आओ हम इसे जुलाई 1946 तक सरका दे। यह केवल मात्र a के मान का मासिक b मान के आधे द्वारा बढाने का सकेत करता है या $(0\ 5X0\ 5297) = 0\ 2649$ b। मान अपरिवर्तित रहता है। तब नया समीकरण है

$$Y_c = 160\ 6982 = 0\ 5297X$$

मूलबिन्दु जुलाई 1946, X इकाइयाँ, 1 मास।

हम केवल पांच अका का अभिलख रखेंगे जब हम सारणी 16 3 म इस समीकरण का प्रयोग मासिक उपनति माना को प्राप्त करने के लिय करेंगे।

---

7 यह हमेशा सच रहेगा चाहे मौलिक आकड महीने के प्रारम्भ के हो, महीने के मध्य के हो, महीने के अन्त के हो या किसी अन्य प्रकार के हो। यह उस समय नही होगा जब कि 13 मास के वष का प्रयोग किया जाता है।

वार्षिक योग—X इकाइयाँ एक छमाही—जब 1941—1962 के शकरकद उत्पादन मे ऋजु रेखा उपनति आसजित की गई थी तो फलत समीकरण की X इकाइयाँ छमाही मे थी क्योकि आँकड़े वर्षों की सम सख्या पर लागू होते थे।[8] शकरकद उत्पादन की वार्षिक उपनति समीकरण को एक मासिक आधार मे बदलना विशेष रूप से सार्थक नही होगा क्योकि शकरकद का उत्पादन वर्ष मे प्रति मास नही होता। न ही निदर्शन यहाँ पर आवश्यक है क्योकि प्रविधि पूर्णतया वैसी ही है जैसा कि अभी-अभी वर्णित की गई है, सिवाय इस बात के कि b मान को 144 की अपेक्षा $6 \times 12 = 72$ से भाग दिया जाता है। यह इस कारण मे है क्योकि b मान वार्षिक उपनति समीकरण मे उस वृद्धि का सकेत करता है जो उपनति मे प्रत्येक छ मास के काल मे होती है।

मासिक औसतें—X इकाइयाँ, एक वर्ष—यदि एक ऋजु रेखा उपनति को वार्षिक आँकड़ो से आसजित कर दिया गया है जो कि वर्षो की प्रत्येक विषम सख्या के लिए मासिक औसते हैं तो केवल मात्र वार्षिक b को 12 से भाग देने की और मूलबिन्दु को सरकाने की आवश्यकता पडती है ताकि यह मासिक आँकडो के अनुरूप हो जाए। कल्पना कीजिये कि निर्मित वस्तु के उत्पादन की 1942—1966 वर्षो के लिए उपनति को प्राप्त कर लिया गया है जिसकी वार्षिक उपनति निम्नलिखित समीकरण है :

$$Y_c = 2,430 + 24.0X.$$

मूलबिन्दु, 1954, X इकाइयाँ, 1 वर्ष।

मूल आँकडे क्योकि प्रत्येक वर्ष के लिए मासिक औसतें हैं, अत a के मान के समजन की आवश्यकता नही है। b का मान वार्षिक वृद्धि को व्यक्त करता है और मासिक उपनति वृद्धि ज्ञात करने के लिए उसे 12 से भाग देना आवश्यक है। तब मासिक उपनति समीकरण होगी

$$Y_c = 2,430 + 2.0X$$

मूलबिन्दु, जून—जुलाई 1940, X इकाइयाँ, 1 मास।

समजन को पूर्ण करने के लिए, हमे समीकरण के मूलबिन्दु को अवश्य सरका देना चाहिए ताकि दो मासो के मध्य पडने की अपेक्षा इसका सयोग एक मास पर पडे। यदि मूलबिन्दु को जून 1954 तक सरका दिया जाए, तो केवल मात्र यह आवश्यक है कि a के मान का मासिक b मान के आधे के बराबर कम कर दिया जाए, जिससे प्राप्त होगा

$$Y_c = 2,429 + 2.0X$$

मूलबिन्दु, जून 1954, X इकाइयाँ, 1 मास।

मासिक औसतें—X इकाइयाँ, एक छमाही—प्रविधि वैसी ही है जैसी अभी वर्णित की गई है सिवाय इसके कि अर्ध-वार्षिक b को 6 से भाग किया जाता है।

---

8 एक वार्षिक उपनति समीकरण को, शकरकन्द उत्पादन के समान सरकाया जा सकता था ताकि X इकाइयाँ छमाही के स्थान पर एक वर्ष हो जाती। इसके लिए केवल b के मान को दुगना करने की आवश्यकता होती है। फिर भी मूलबिन्दु को सरकाना भी आवश्यक होगा ताकि वह दो वर्षों के मध्य न पड़ कर एक वर्ष पर पड़े।

वार्षिक ऋजु रेखा उपनति समीकरणों को मासिक आधार पर सरकाने की प्रविधि की पूर्ववर्ती व्याख्या का सदर्भ के उद्देश्यो से, निम्न प्रकार से सार-निरूपण किया जा सकता है :

वार्षिक समीकरण मे X इकाई	आँकडो का प्रकार			
	मासिक औसतें		वार्षिक योग	
	a	b	a	b
एक वर्ष	कोई परिवर्तन नही	12 से भाग करो	12 से भाग करो	144 से भाग करो
छ मास	कोई परिवर्तन नही	6 से भाग करो	6 से भाग करो	72 से भाग करो

सभी परिस्थितियो मे, मूलबिन्दु अवश्य सरका दिया जाना चाहिये ताकि वह दो मासो के मध्य पडने की अपेक्षा एक मास पर पडे ।

उपनति विश्लेषण के लिये काल-चयन

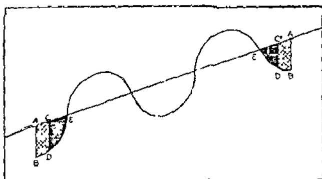
सामान्यत जब उपनति का निर्धारण किया जाना हो तो यथासम्भव अधिक से अधिक लम्बा काल ग्रहण करना उचित है। यह अभ्यास उपनति की अधिक विश्वस्त व्याख्या को जन्म देता है और एक ऐसी व्याख्या को जो एक या दो विस्तृत चक्रीय गतियो से कम प्रभावित होती है ।

यदि श्रेणी की उपनति की प्रकृति बदल चुकी है तो दो उपनतियो का प्रयोग करना आवश्यक हो सकता है । दो उपनतियो को एक साथ गूँथ कर जोडना सम्भव हो सकता है अथवा नही भी हो सकता । 1930 की मदी इतनी भयकर थी कि कुछ श्रेणियो के लिए अब यह दिखाई देता है कि इसकी प्रकृति पुन समजन की अधिक रही है । फलत यदा कदा पुन समजन से पहले वर्षो के लिये एक उपनति का प्रयोग किया जा सकता है, परन्तु पुन समजन के पश्चात् आने वाले वर्षो के लिये उससे भिन्न उपनति का। चार्ट 12 3 मे दिखाए गए, समाचारपत्र विज्ञापन के आँकडो के साथ दो उपनतियो को आसजित करना सम्भव था परन्तु हमने एक अधिक लम्बे समय पर लागू होने वाली केवल एक उपनति को दिखाने के लिए उन आँकडो को चुना था ।

कौनसा काल प्रयोग म लाया जाए इस सम्बन्ध मे निर्णय करने से पूर्व यह महत्त्वपूर्ण है, कि श्रेणी के पहले कुछ वर्षो तथा बाद के कुछ वर्षो की ओर विशेष रूप से ध्यान दिया जाए । यदि आँकडे केवल दस या पन्द्रह वर्षो को आवृत्त करते हैं तो यह विशेष महत्त्व की बात है अधिक लम्बे कालो के लिय यह कम महत्त्वपूर्ण है । प्रथम वर्ष मन्दी वाला और अन्तिम वर्ष सम्पन्नता वाला नही होना चाहिय, क्योकि यह उन्नत उपनति को बहुत अधिक सीधी या खडी बना देगा बहुत अधिक बडा हो जाएगा । इसक विपरीत, यदि प्रथम वर्ष सम्पन्नता का होता जबकि अन्तिम वर्ष मन्दी का था तो ढाल, यदि ऊर्ध्वगामी होता, तो पर्याप्त बडा न होता b बहुत छोटा होता । ढाल म इस प्रकार के निरर्थक कारको के प्रवेश को रोकने के लिये प्रथम तथा अन्तिम वर्ष, चक्र की विपरीत दिशाओ

पर होने चाहियें (उपनति की विपरीत दिशाओं पर नहीं) और उपनति के ऊपर या नीचे लगभग समान अन्तर पर होने चाहिये। इस प्रकार चार्ट 12 6 में $CD = C'D'$ तथा D से D' तक बढाए गए आंकडो से आसजित उपनति का एक ढाल सही होगा।

न केवल ढाल ही सही होना चाहिए, बल्कि उपनति का स्तर भी उपयुक्त होना चाहिए। यदि चार्ट 12 6 के D से D' तक जाते हुए आँकडो के साथ उपनति जोडी हुई हो तो उपनति का स्तर बहुत अधिक ऊँचा होगा। उपनति को B से B' तक जाने वाले काल से जोड दिया जाना चाहिये। इसका परिणाम उपनति के लिये एक उचित स्तर होगा, क्योकि क्षेत्र ABE तथा $A'B'E$ मे प्रत्येक एक चक्र के एक-चौथाई के बराबर है—पहले तथा अन्तिम वर्ष दोनों विशेष रूप से महामन्दियो के निम्न बिन्दु नहीं हो सकते, क्योकि तब उपनति के स्तर को नीचा कर देंगे, a बहुत छोटा हो जाएगा। इसके विपरीत, अन्तिम वर्ष विशिष्ट सम्पन्नता के दोनो उच्च बिन्दु नहीं होने चाहियें। क्योंकि तब वे अनुचित रूप से उपनति के स्तर को बढा देंगे।



चार्ट 12 6 चक्र तथा उचित उपनति।

समाचारपत्र विज्ञापन के लिये उपनति को 1932—1960 के वर्षों के साथ जोड दिया गया था। यद्यपि, जैसा कि चार्ट 12 3 में देखा जा सकता है, श्रेणी, चक्र की समान स्थिति मे प्रारभ तथा समाप्त नही होती तो भी उपनति सन्तोपजनक है क्योकि आवृत्त काल अपेक्षतया लम्बा है। यदि पूर्ववर्ती कुछ वर्षों को हटा दिया जाता अथवा बाद के कुछ वर्षों को सम्मिलित कर लिया जाता तो उपनति समीकरण मे कौनसे परिवर्तन हुए होते? 1932—1960 के काल के लिये पहले प्राप्त समीकरण 1946 पर मूलबिन्दु तथा X इकाइयाँ 1 वर्ष के साथ था

$$Y_c = 1{,}925\ 2 + 76\ 27X$$

उसी मूलबिन्दु तथा X इकाइयों का प्रयोग निरन्तर करते रहने से पाठक सारणी 12 2 पर आधारित परिकलनों द्वारा पडताल कर सकता है कि यदि प्रथम चार वर्षों को हटा दिया जाय तो 1936—1960 के लिए उपनति समीकरण

$$Y_c = 1{,}877\ 0 + 85\ 00X$$

होगा। पिछले अनुच्छेदो मे दिए गए नियमो को ध्यान मे रखते हुए, 1936—1960 के वर्ष उपनति निर्धारण के लिए 1932—1960 वर्षों की अपेक्षा अधिक उचित है। तथापि, श्रेणी की लम्बाई के कारण परिणामो मे थोडा सा अन्तर है, 1936—1960 समीकरण को, यदि

चार्ट 12.3 पर खींचा जाता तो 1932—1960 उपनति से अन्तर केवल अन्त मे मालूम किया जा सकता था।

यदि अन्तिम चार वर्षों को जोड दिया जाता तो 1932—1964 के लिये उपनति समीकरण निम्नलिखित होता :

$$Y_c = 1\,897.8 + 69\,82X$$

इस समीकरण का भी, यदि चार्ट 12 3 पर खींचा जाए, केवल अन्त मे 1932—1960 उपनति से अन्तर मालूम किया जा सकता था।

उपनति के प्रकार का चयन

क्योंकि अब तक की चर्चा निरीक्षण द्वारा उपनतियो को जोडने, और न्यूनतम वर्गो की विधि द्वारा ऋजु रेखाओ को जोडने तक सीमित रही है, अत यहाँ पर उपनति के प्रकार के सम्बन्ध मे अधिक कहने को नही है। आगामी अध्याय मे वर्णित कुछ अतिरिक्त प्रकारो पर विचार करने के बाद हम यह विचार करने के लिये अधिक अच्छी अवस्था मे होगे कि बहुत से सम्भव उपनति प्रकारो मे से कौनसा सबसे अधिक उचित है।

प्रथम पग के रूप मे, मौलिक आंकडो को हमेशा आरेखित करना चाहिये और उनका परीक्षण करना चाहिये। निरीक्षण द्वारा एक प्रायोगिक उपनति बनाना भी उपयोगी हो सकता है। कई बार निरीक्षण द्वारा जोडी हुई उपनति पर्याप्त हो सकती है, परन्तु जब स्वयं उपनतिका ही अध्ययन किया जाना हो, या उसे बढाना हो, तो एक गणितीय समीकरण का उपयोग किया जाना चाहिये। यदि चार्ट के आंकडो का परीक्षण दर्शाता है कि उपनति रेखिक नही है तो अध्याय 13 मे वर्णित उपनति के प्रकारो मे से एक उचित हो सकता है। चुनी हुई उपनति का प्रकार ऐसा होना चाहिये जो उस श्रेणी के सदर्भ मे जिसका वह वर्णन करता है तथा उस श्रेणी पर प्रभाव डालने वाली शक्तियो के सदर्भ मे तर्कसगत होना चाहिए। यही कारण है कि एक ऋजु रेखा से जो वृद्धि तथा कमी की स्थिर मात्रा दर्शाती है, विवर्धित काल के लिये एक श्रेणी की उचित उपनति बनाने की आशा नही की जा सकती।

13

काल-श्रेणी का विश्लेषण : दीर्घकालिक उपनति II—अरेखिक उपनतियाँ

अध्याय 12 में केवल सरलतम प्रकार के उपनति समीकरण, ऋजु रेखा, का वर्णन किया गया। यह देखा गया था कि एक ऋजु रेखा श्रेणी की उपनति के लिए पर्याप्त अच्छा विवरण प्रदान कर सकती है, पर लम्बे कालो के लिए किसी प्रकार की वक्र रेखा की आवश्यकता पड सकती है। यह अध्याय कुछ अरेखिक समीकरण के प्रकारो की विशेषताओं का वर्णन करेगा, यह वर्णन करेगा कि उन्हे कैसे आसजित किया जाए, और कुछ सकेत देगा कि विभिन्न उपनति प्रकारो मे चयन किस प्रकार प्रारम्भ करें।

साधारण बहुपद

वक्रो के इस परिवार मे अपने अधिक प्राथमिक प्रतिनिधि के रूप मे सरल रेखा आती है, जिसके, यह स्मरण होगा, दो स्थिराक हैं। ऋजु रेखा तथा चार अन्य बहुपदो को नीचे दिखाया गया है :

प्रथम अंश (ऋजु रेखा).......................$Y_c=a+bX.$

द्वितीय अंश.........................$Y_c=a+bX+cX^2.$

तृतीय अंश..........................$Y_c=a+bX+cX^2+dX^3.$

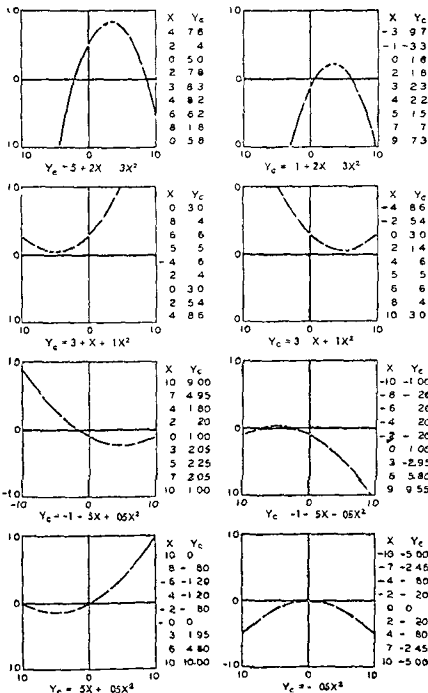
चतुर्थ अंश............................$Y_c=a+bX+cX^2+dX^3+eX^4.$

पचम अंश.........................$Y_c=a+bX+cX^2+dX^3+eX^4+fX^5.$

जब सीधी रेखा के समीकरण मे एक तृतीय स्थिराक को जोड दिया जाता है तो द्वितीयाश वक्र, जिसका एक मोड है, प्राप्त हो जाता है। द्वितीयाश वक्र मे मोड होने के कारण वक्र का ढाल सतत परिवर्तित हो रहा है। यदि X मूल्यो की पर्याप्त सख्या को सम्मिलित कर लिया जाता है, तो द्वितीयाश वक्र के एक भाग का ढाल धनात्मक तथा दूसरे भाग का ऋणात्मक होगा। इसका अवलोकन चार्ट 13.1 में किया जा सकता है जिसमे आठ द्वितीयाश वक्रो को दिखाया गया है।

द्वितीयाश समीकरण मे जुडा हुआ प्रत्येक स्थिराक वक्र मे एक अतिरिक्त मोड उत्पन्न कर सकता है। इस प्रकार, एक तृतीयाश वक्र के दो मोड हो सकते हैं, जैसा कि चार्ट 13.2 मे दिखाया गया है। चार्ट 13.2 मे दो वक्रो मे से नीचे वाला इस बात को प्रदर्शित करता है कि तृतीयाश वक्र का ढाल धनात्मक से ऋणात्मक या ऋणात्मक से धनात्मक दो बार बदल सकता है। क्योकि ढाल की दिशा मे इस प्रकार का परिवर्तन चतुर्थांश वक्र मे तीन बार और पचमाश वक्र मे चार बार हो सकता है, अत. इससे परिणाम निकलता है कि चतुर्थांश तथा पचमाश वक्रो का सपात, दीर्घकालीन उपनति की धारणा से, जिसमे हमे

रुचि है, कठिनाई से होगा। परिणामत, हम आगे चतुर्थांश तथा पंचमांश वक्र की ओर कोई ध्यान नहीं देंगे अपितु द्वितीयांश वक्र के आसजन की प्रक्रिया का कुछ विस्तार से वर्णन करेंगे और तृतीयांश वक्र के विषय मे संक्षेप से विचार करेंगे।



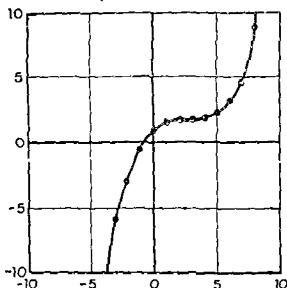
चार्ट 13 1 द्वितीयांश समीकरण तथा वक्र।

द्वितीयांश वक्र—द्वितीयांश वक्र ऋजुरेखा से थोड़ा-सा जटिल है क्योंकि इसके अन्तर्गत ऋजु रेखा के लिए समीकरण में cX^2 का जोड़ आता है, जिससे निम्नलिखित प्राप्त होता है :

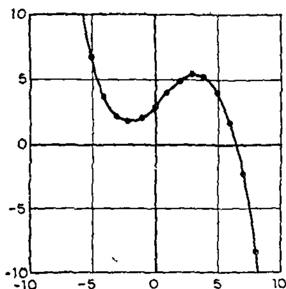
$$Y_c=a+bX+cX^2$$

आठ द्वितीयांश समीकरण, जो चार्ट 13 1 में आरेखित किए गए हैं, समीकरण के इस प्रकार के लचीलेपन का कुछ आभास प्रदान करते हैं। इस प्रकार काल-श्रेणी से आभजित

$Y_c=1+X-4Y^2+05X^3$



X	Y_c
-3	-6 95
-2	-3 00
-1	- 45
0	1 00
1	1 65
2	1 80
3	1 75
4	1 80
5	2 25
6	3 40
7	5 55
8	9 00



$Y_c=3+X+1X^2\ 05X^3$

X	Y_c
-5	6 75
-4	3 80
-3	2 25
-2	1 80
-1	2 15
0	3 00
1	4 05
2	5 00
3	5 55
4	5 40
5	4 25
6	1 80
7	-2 25
8	-8 20

चार्ट 13 2 तृतीयांश समीकरण तथा वक्र।

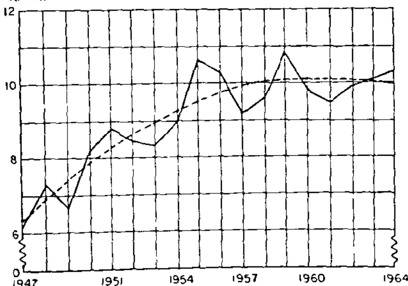
इस प्रकार के वक्राशो का ढाल ऊर्ध्वगामी या अधोगामी हो सकता है (या एक अश मे ऊर्ध्वगामी और दूसरे मे अधोगामी) और ऊपर की ओर अवतल या नीचे की ओर अवतल हो सकता है। जब कि एक ऋजुरेखा वृद्धि या कमी की एक स्थिर मात्रा का सकेत करती है, वहाँ एक द्वितीयाश वक्र के अन्तर्गत वृद्धि या कमी की बढती हुई या घटती हुई मात्राएँ आती है। अधिक विशेष रूप से व्यजक $Y_c=a+bX+cX^2$ से प्राप्त मूल्यो के दूसरे अन्तर स्थिर है।[1]

द्वितीयाश वक्र का आसजन—क्योकि द्वितीयाश वक्र मे तीन स्थिराक या अज्ञाताक है, अत निम्नलिखित तीन प्रमामान्य समीकरणो की आवश्यकता पडती है ·

$$\text{I} \quad \Sigma Y = Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2$$

$$\text{II} \quad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3$$

$$\text{III} \quad \Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4$$



चार्ट 13 3 सयुक्त राज्य मे 1947—1964 मे अशोधित जिप्सम उत्पादन, तथा उपनति जैसी एक द्वितीयाश वक्र से दिखाई गई है। सारणी 13 1 के आँकड़े।

---

1 चार्ट 13 1 के परिच्छेद 2 के लिए Y_c मूल्यो का विचार करने पर यह देखा जा सकता है, जिसके लिये समीकरण $Y_c = -1 + 2X - 0\ 3X^2$ है

X	Y_c	प्रथम अन्तर	द्वितीय अन्तर	X	Y_c	प्रथम अन्तर	द्वितीय अन्तर
−3	−9.7			2	1.8	−1.1	−0 6
−2	−6 2	−3 5		3	2.3	−0 5	−0 6
−1	−3 3	−2 9	−0 6	4	2 2	0 1	−0 6
0	−1 0	−2 3	−0 6	5	1.5	0 7	−0 6
1	0 7	−1 7	−0 6	6	0 2	1 3	−0 6

तथापि, हम इन परिणामो के साथ कि X की सभी विषम घातो का योग शून्य है, एक काल-श्रेणी का वर्णन कर रहे है, और मूल विन्दु पहले की भांति वर्ष (या किसी अन्य इकाई) के मध्य मे या दो मध्य वर्षो के बीच मे लिया जा सकता है। अत तीन प्रसामान्य सकीकरण निम्नलिखित बन जाते हैं

$$\text{I} \quad \Sigma Y = Na + c\,\Sigma X^2.$$
$$\text{II} \quad \Sigma XY = b\Sigma X^2$$
$$\text{III} \quad \Sigma X^2 Y = a\Sigma X^2 + c\,\Sigma X^4.$$

ध्यान दीजिये, कि तीन समीकरणो को सम्मिलित रूप मे हल किए जाने के पूर्व समीकरण *II से b का मान प्राप्त किया जाता है जब कि a तथा c के मान समीकरण I तथा III को* एक साथ हल करने से प्राप्त होत है। मध्य वर्ष का मूलबिन्दु के रूप मे प्रयोग करने से हम श्रम मे बहुत बचत कर सकते है।

सारणी 13 1 और चार्ट 13 3, 1947 से 1964 तक के वर्षो के लिए सयुक्त राज्य अमरीका मे अशोधित जिप्सम के उत्पादन को प्रदर्शित करते हैं। श्रेणी की उपनति रैखिक नहीं है और ये आंकडे द्वितीयाश वक्र के जोड के हमारे उदाहरण का आधार बनेंगे। तीन प्रसामान्य समीकरणो को N ΣY ΣXY, तथा $\Sigma X^2 Y$ के साख्यिकीय मानो की, जिन्हे सारणी 13 1 मे से प्राप्त किया जा सकता है तथा ΣX^2 और ΣX^4 (प्रथम नौ विषम प्राकृतिक अ का के लिए) मानो की, जिन्ह परिशिष्ट ग से पढा जा सकता है, आवश्यकता पडती है। तीन प्रसामान्य समीकरणो मे प्रतिस्थापन से निम्नलिखित प्राप्त होते हैं.

$$\text{I.} \quad 163{,}178 = 18a + 1{,}938c.$$
$$\text{II.} \quad 207{,}396 = 1{,}938b.$$
$$\text{III} \quad 16{,}734.682 = 1{,}938a + 374{,}034c$$

b का मान द्वितीय प्रसामान्य समीकरण से दिया जाता है

$$1{,}938b = 207{,}396,$$
$$b = 107\ 015.$$

तत्पश्चात्, *a तथा c का मान प्रसामान्य समीकरण* I तथा III को एक साथ हल करके प्राप्त किया जाता है। पग ये हैं :

1 प्रसामान्य समीकरण I को 193 से गुणा करो और इस नए प्रकार के प्रसामान्य समीकरण I मे से प्रसामान्य समीकरण III को घटाओ और इस प्रकार a का मान प्राप्त होगा।[2]

$$\begin{array}{rl} (\text{I} \times 193). & 31{,}493{,}354 = 3{,}474a + 374{,}034c. \\ \text{III} & \underline{16{,}734{,}682 = 1{,}938a + 374{,}034c.} \\ & 14{,}758{,}672 = 1{,}536a \\ & a = 9{,}608.51041. \end{array}$$

---

2. गुणा करने वाला गुणनखण्ड 193, प्रसामान्य समीकरण III मे c के गुणाक को प्रसामान्य समीकरण I मे c गुणाक से भाग करके प्राप्त होता है। अर्थात, $\Sigma X^4 - \Sigma X^2 = 374{,}034 - 1{,}938 = 193.$ जब दोनो समीकरणो को एक साथ हल कर रहे हो तो अज्ञात के गुणाको के भजनफल से समीकरणो में से एक को गुणा करके और एक समीकरण मे से दूसरे समीकरण को घटा कर उस अज्ञात का निरसन किया जा सकता है, *जिसे हटाना है।*

सारणी 13.1

संयुक्त राज्य अमरीका में 1947—1964 में, अशोधित जिप्सम उत्पादन के द्वितीयांश वक्र के साथ जोड़ के मानों का परिकलन
(प्रति हजार छोटे टन मे)

वर्ष	X	उत्पादन Y	XY	X^2Y	उपनति मानो की सगणना X^4	$a+bX$	cX^2	उपनति मान Y^2
1947	−17	6,208	−105,536	1,794,112	289	7,789 3	−1,457 7	6,332
1948	−15	7,255	−108,825	1,632,375	225	8,003 3	−1 134 9	6,868
1949	−13	6,608	− 85,904	1,116,752	169	8,217 3	− 852 4	7,365
1950	−11	8,193	− 90,123	991,353	121	8,431 4	− 610 3	7,821
1951	− 9	8,666	− 77,994	701,946	81	8,645 4	− 408 6	8,237
1952	− 7	8,415	− 58,905	412,335	49	8,859 4	− 247 2	8,612
1953	− 5	8,293	− 41,465	207,325	25	9,073 4	− 126 1	8,947
1954	− 3	8,996	− 26,988	80,964	9	9,287 5	− 45 4	9,242
1955	− 1	10,684	− 10,684	10,684	1	9 501 5	− 5 0	9,497
1956	1	10,316	10,316	10,316	1	9,715 5	− 5 0	9,711
1957	3	9,195	27,585	82,755	9	9,929 6	− 45 4	9,884
1958	5	9,600	48,000	240,000	25	10,143 6	− 126 1	10,018
1959	7	10,900	76,300	534,100	49	10,357 6	− 247 2	10 110
1960	9	9,825	88,425	795,825	81	10,571.7	− 408 6	10.163
1961	11	9,500	104,500	1,149,500	121	10,785 7	− 610 3	10,175
1962	13	9,969	129,597	1,684,761	169	10,999 7	− 852 4	10,147
1963	15	10,169	152,535	2,288,025	225	11,213 7	− 1,134 9	10,079
1964	17	10,386	176,562	3,001,554	289	11,427 8	− 1,457 7	9,970
योग	0	163,178	+ 207,396	16,734,682	1,938	...	...	...

हिस्टॉरिकल स्टेटिस्टिक्स ऑफ दि युनाइटिड स्टेट्स, पृष्ठ 364, *स्टेटिस्टिकल ऐब्स्ट्रैक्ट ऑफ दि यूनाइटिड स्टेट्स 1964*, पृष्ठ 727, *1962* पृष्ठ 712, तथा *सर्वे ऑफ करेन्ट बिजनेस* के विभिन्न अंको से।

2. c का मान प्राप्त करने के लिए प्रसामान्य समीकरण I में a का मान प्रतिस्थापित करो।

$$\text{I} \quad 163{,}178 = 18(9{,}608\ 51014) + 1{,}938c$$
$$1\ 938c = -9{,}775\ 1874$$
$$c = -5\ 04395634.$$

3. a तथा c के लिए प्राप्त मानो को प्रसामान्य समीकरण III मे प्रतिस्थापित करो।

यह पग 1 तथा 2 मे परिकलनो की जाँच के रूप मे कार्य करता है।

$$\text{III} \quad 16\ 734\ 682 = 1\ 938(9\ 608\ 51041) + 374\ 034(-5\ 04395634),$$
$$= 16\ 734\ 682$$

द्वितीयाश उपनति समीकरण को अब इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$Y_c = 9\ 608\ 51 + 107\ 015X - 5\ 0440X^2$$

मूलबिन्दु 1955–1956, X इकाइया, $\frac{1}{2}$ वर्ष।

उपनति माना का परिकलन सारणी 13 1 के अन्तिम चार स्तम्भो मे दिखाया गया है। चार्ट 13 3 मे दिखाई गई उपनति इन उपनति मानो को आरेखित करने का परिणाम है। ध्यान दीजिये अशोधित जिप्सम का उत्पादन सबधित वर्षों मे साढे चार चक्रो को प्रदर्शित करता हुआ प्रतीत होता है।

तृतीयांश वक्र

द्वितीयाश वक्र के समीकरण मे एक और स्थिराक को जोड कर हम वक्र मे एक और मोड डालने के योग्य हो जाते है। जब ऋजु रेखा का केवल एक ही ढाल होता है, वहाँ द्वितीयाश वक्र (चाट 13 1) एक स्थल पर धनात्मक दिशा की ओर जाता है तथा अन्य स्थल पर ऋणात्मक दिशा की ओर जाता है और तृतीयाश वक्र (चाट 13 2) मे ढाल की तीन दिशाएँ हो सकती है।

एक तृतीयाश वक्र के लिए चार प्रसामान्य समीकरण आवश्यक हैं

$$\text{I} \quad \Sigma Y = Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2 + d\Sigma X^3.$$
$$\text{II} \quad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 + d\Sigma X^4$$
$$\text{III} \quad \Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 + d\Sigma X^5.$$
$$\text{IV} \quad \Sigma Y^3Y = a\Sigma X^3 + b\Sigma X^4 + c\Sigma X^5 + d\Sigma X^6$$

पुन यदि X मूलबिन्दु को काल के मध्य मे लिया जाता है तो निम्नलिखित समीकरणो को छोडते हुए X की विषम घाता का योग शून्य होता है

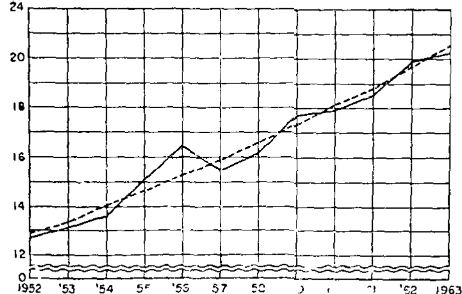
$$\text{I} \quad \Sigma Y = Na + c\Sigma X^2$$
$$\text{II} \quad \Sigma XY = b\Sigma X^2 + d\Sigma X^4$$
$$\text{III} \quad \Sigma X^2Y = a\Sigma X^3 + c\Sigma X^4$$
$$\text{IV} \quad \Sigma X^3Y = b\Sigma X^4 + d\Sigma X^6$$

इस अवस्था मे समीकरणो के साथ हमे चार युगपत् समीकरणो का हल नही करना पडता, यद्यपि वह आवश्यक होता यदि मूलबिन्दु काल के मध्य की अपेक्षा कही और लिया जाता। समीकरण I तथा III को एक साथ हल करके a तथा c के मानो को प्राप्त कर लिया

जाता है, समीकरण II तथा IV का युगपत् हल b तथा d के मान देता है। अंकों के केवल एक स्तम्भ का, उनके अतिरिक्त जो सारणी 13.1 में दिखाए गए हैं, परिकलन किया जाना चाहिए, इस स्तम्भ का शीर्षक X^3Y है जिसका योग ΣX^3Y प्रदान करता है। ध्यान दीजिए समीकरण I तथा III बिल्कुल वैसे है जैसे कि द्वितीयांश वक्र के लिए थे। परिणामत, आँकड़ों के एक प्रदत्त समुच्चय के लिए a तथा c के मान द्वितीयांश वक्र तथा तृतीयांश वक्र के लिए समान होंगे।[3]

लघुगणकों का प्रयोग

लघुगणकों से आसजित ऋजु रेखा—चार्ट 13.4 पर डाली गई एक दृष्टि यह पर्याप्त स्पष्ट कर देती है कि $Y_c = a + bX$ प्रकार का वक्र दिखाए गए समय के लिये एस्फाल्ट के उत्पादन की उपनति का सन्तोषजनक विवरण नहीं होगा। *एक द्वितीयांश वक्र प्रयोग में लाया जा सकता है, परन्तु एक अधिक तर्क-संगत उपनति समीकरण प्राप्य है। इस श्रेणी*



चार्ट 13.4 1952—1963 में संयुक्त राज्य अमरीका में पैट्रोलियम से एस्फाल्ट का उत्पादन तथा उपनति जैसा कि ऋजु रेखा को आँकड़ों के लघुगणकों से आसजित कर दिखाया गया है। ध्यान दीजिये कि इस चार्ट का अंकगणितीय ऊर्ध्वाधर पैमाना है और उपनति रेखा थोड़ी सी मुड़ी हुई है। सारणी 13.2 के आँकड़े।

---

3 देखें, आर० ए० फिशर द्वारा लिखित स्टैटिस्टिकल मैथड्स फॉर रिसर्च वर्कर्स तेरहवाँ संस्करण, हाफ्नर पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क 1958, अध्याय V और VI. आर० ए० फिशर तथा एफ० येट्स द्वारा लिखित स्टैटिस्टिकल टेबल्स फॉर बायलॉजिकल, ऐग्रिकल्चरल एण्ड मैडिकल रिसर्च, तृतीय संस्करण, हॉफ्नर पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क, 1949, पृष्ठ 23—25 तथा 70—80 भी देखिए। लाम्बिक बहुपदों के विवरण के लिए, इस पुस्तक का दूसरा संस्करण, पृष्ठ 289—290 देखिए।

से आसजित द्वितीयाश वक्र इस प्रकार से व्यवहार करेगा कि प्रति वर्ष वृद्धि की मात्रा समान दर से बढ़ती जाएगी, यह वही बात है जैसे कि यह कहना कि उपनति मानो का दूसरा अन्तर एक स्थिराक है, परन्तु इन अतिरिक्त शर्तों के साथ कि (1) उपनति ऊर्ध्वगामी है तथा (2) दूसरे अन्तर धनात्मक हैं। अब $Y_c = ab^X$ प्रकार का वक्र परिवर्तन के स्थिर अनुपात का सकेत करता है, और यदि इस प्रकार का वक्र चार्ट 13.4 के आँकड़ों मे जोडना होता तो यह स्पष्ट है कि अनुपात 1 0 से कम होने की अपेक्षा 1.0 से बडा होता। कहने का आशय यह है कि श्रेणी बढ रही है। एस्फाल्ट उत्पादन के आँकडो को चार्ट 13.5 में अर्धलघुगणकीय कागज पर खीचा गया है, और यह दृष्टिगोचर होता है कि उपनति' जो चार्ट 13.4 मे रैखिक नहीं थी अब रेखिक है। यह $Y_c = ab^X$, प्रकार के समीकरण, चरघाताकी वक्र की उपयुक्तता का सकेत करता है।

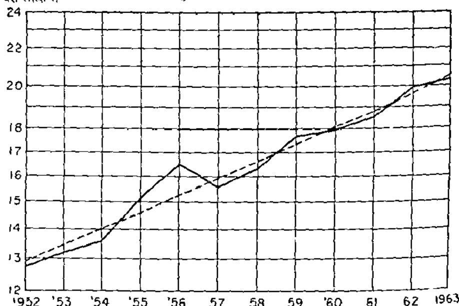
यह सम्भव नही है कि चरघाताकी वक्र को न्यूनतम वर्गो के द्वारा सीधे Y मानो से आसजित कर दे, तथापि हम मूल आँकडो के लघुगणको के साथ न्यूनतम वर्गो को आसजित कर सकते हैं, और इसका परिणाम है उपनति मानो से प्रेक्षित मानो के लघुगणको के वर्गित विचलनो को न्यूनतम करना। घातीय समीकरण को लघुगणकीय अवस्था मे रखने से प्राप्त होता है

$$\text{लघु } Y_c = \text{लघु } a + X \text{ लघु } b,$$

जो X तथा लघु Y के सबध मे एक ऋजु रेखा है। प्रसामान्य समीकरण हैं

$$\text{I} \quad \Sigma \text{ लघु } Y = N \text{ लघु } a + \text{लघु } b\Sigma X$$

$$\text{II} \quad \Sigma X \text{ लघु } Y = \text{लघु } a\Sigma X \text{ लघु } b\Sigma X^2$$



चार्ट 13 5 1952-1963 मे सयक्त राज्य अमरीका मे पेट्रोलियम से एस्फाल्ट का उत्पादन, तथा उपनति जैसा कि ऋजु रेखा को आँकड़ों के लघुगणकों के साथ जोड कर दिखाया गया है। *ध्यान दीजिये कि इस चार्ट का लघुगणकीय ऊर्ध्वाधर पैमाना है और उपनति रेखिक है। सारणी 13 2 के आँकडे।*

क्योंकि X मूलबिन्दु को काल के मध्य म लिया जा सकता है इसलिए $\Sigma X=0$, अत इन समीकरणो को लिखा जा सकता है

I Σ लघु $Y=N$ लघु a

II ΣX लघु $Y=$ लघु $b\ \Sigma X^2$

सारणी 13 2

1952—1963 मे सयुक्त राज्य अमरीका मे पैट्रोलियम से एस्फाल्ट उत्पादन के लघुगणको के साथ ऋजु रखा के आसजन के लिए मानो का परिकलन

(छोट टन सहस्रा मे)

वर्ष	X	उत्पादन Y	लघु Y	X लघु Y	उपनति मान	
					लघु Y_c	Y_c
1952	−11	12 784	4 106667	−45 173337	4 110353	12,893
1953	−9	13 165	4 119421	−37 074789	4 128751	13 451
1954	−7	13,620	4 134177	−28 939239	4 147150	14 033
1955	−5	15 113	4 179350	−20 896750	4 165548	14 640
1956	−3	16 479	4 216931	−12 650793	4 183947	15 274
1957	−1	15 579	4 192539	− 4 192539	4 202346	15,935
1958	1	16 251	4 210880	4 210880	4 220744	16 624
1959	3	17 753	4 249272	12 747816	4 239143	17 344
1960	5	17 940	4 253822	21 269110	4 257541	18 094
1961	7	18 513	4 267476	29 872332	4 275940	18,877
1962	9	19 923	4 299354	38 694186	4 294338	19 694
1963	11	20 354	4 308650	47 395150	4 312737	20 547
योग	0		50 538539	+5 262027		

आँकड़ स्टैटिस्टिकल एब्स्ट्रैक्ट ग्राफ दि युनाइटिड स्टटस के विभिन्न अको से।

सारणी 13 2 म दिखाए गए जोडो का प्रयोग करत हुए तथा परिशिष्ट ग से ΣX^2 प्राप्त करते हुए हमारे पास है

I 50 538539 = 12 लघु a

लघु a = 4 211545.

II 5 262027 = 572 लघु b

लघु b = 0 00919935

उपनति समीकरण लघुगणकीय रूप म है

लघु Y_c = 4 211545 + 0 00919935 X

मूलबिन्दु 1957—1958 X इकाइयाँ, $\frac{1}{2}$ वर्ष।

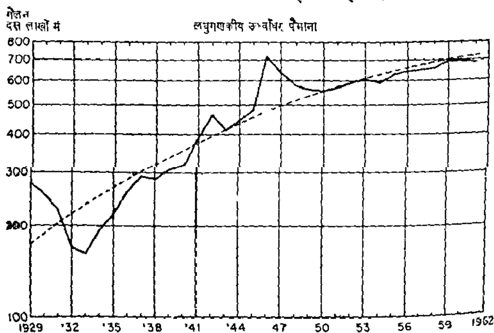
a तथा b प्राप्त करने के लिए हम लघु a तथा लघु b के प्रतिलघुगणको को देखते है और तब हम उपनति समीकरण को प्राकृतिक रूप म लिख सकते है

$$Y_c = (16{,}275\ 9)(1\ 0214)^X$$

मूलबिन्दु, 1957—1958, X इकाइयाँ, ½ वर्ष ।

प्रत्येक वर्ष के लिए लघु Y_c मानो तथा Y_c मानो को सारणी 13 2 के अन्तिम दो स्तम्भो म दिखाया गया है । Y_c उपनति मानो को चार्ट 13 4 और 13 5 दोनो मे दिखाया गया है । उपनति का चार्ट 13 5 पर खीचने के लिए, 1952 तथा 1963 के लिये Y_c मानो को प्राप्त करना इन दोनो मानो को आरेखित करना तथा उनको एक ऋजु रेखा से जोडना, केवल यह आवश्यक था । उपनति को चार्ट 13 4 पर खीचने मे सभी, या लगभग सभी, उपनति मानो को आरेखित करने की आवश्यकता पडती है ।

$Y_c=(16{,}275\ 9)(1\ 0214)^X$ के रूप म लिखित उपनति समीकरण हमे बताता है कि 1957 तथा 1958 के बीच मध्य बिन्दु का उपनति मान 16,275 9 हजार छोटे टन था, और विचाराधीन काल के मध्य एस्फाल्ट उत्पादन की मात्रा मे वार्षिक वृद्धि 2 14 प्रतिशत थी । सयोगवश, 16,275 9 हजार छोटे टन Y मानो का गुणोत्तर माध्य हैं । क्योकि गुणोत्तर माध्य सदैव समातर माध्य से थोडा छोटा होता है, और क्योकि इस उपनति के लिए लघुगणकों के (मूल आँकडो की अपेक्षा) विचलनो के वर्गो का योग न्यूनतम पर होता है अत इससे परिणाम निकलता है कि चार्ट 13 4 की उपनति रेखा के ऊपर विचलनो का योग उपनति रेखा से नीचे के विचलनो के योग से थोडा सा अधिक है । यह इस प्रकार की उपनति की एक अल्प कमी है । तथापि चार्ट 13 5 मे उपनति रेखा के किसी एक ओर मापे गए विचलनो का अवश्यमेव निरसन हो जाता है । इसके अतिरिक्त, इस



चार्ट 13 6 1929—1961 मे आइसक्रीम का स्वदेशीय उत्पादन, तथा उपनति जैसी कि आँकडों के लघुगणकों से आसजित द्वितीपाश वक्र के द्वारा दिखायी गई है । सारणी 13 3 के आँकडे ।

बात मे कुछ अच्छाई है कि लघुगणको का प्रयोग उनके निरपेक्ष विचलनो की अपेक्षा उनके सापेक्ष उतार चढावो की महत्ता को बराबर करता है। यह विशेष रूप से उपयुक्त होता है जब उपनति के निम्न भाग के गिर्द लघु चक्रीय विचरण हो और उपनति के ऊपरी भाग के गिर्द दीर्घ (अर्थात्, निरपेक्ष रूप से दीर्घतर) चक्रीय विचरण हो। इस प्रकार की परिस्थिति मे, केवल बड़े चक्रो की अपेक्षा सभी चक्रो मे से उपनति रेखा के गुजरने की अधिक सभावना है। यह सूत्र लघुगणको के आसजन की तकनीकी असुविधा का आवश्यकता से अधिक प्रतिसतुलन कर सकता है।

लघुगणको से आसजित द्वितीयाश वक्र—कभी-कभी ऐसे आँकडो से पाला पडता है जो, जब कि उन्हे अर्ध लघुगणकीय कागज पर खीचा जाता है, ऊपर अथवा नीचे की ओर अवतल होते हुए वक्रता को प्रदर्शित करना जारी रखते हैं। चार्ट 13.6 तथा सारणी 13.3, 1929—1961 के लिए आइस क्रीम के स्वदेशीय उत्पादन की एक ऐसी श्रेणी प्रदर्शित करते है जो यह सकेत करते हुए कि वृद्धि का अनुपात गिर रहा है, नीचे की ओर अवतल है। लघु Y_c=लघु $a+X$ लघु $b+X^2$ लघु c का प्रयोग करते हुए हम द्वितीयाश वक्र को Y मानो के लघुगणको के साथ आसजित कर सकते है। X मूलबिन्दु को काल के मध्य मे लेते हुए, तीन प्रमामान्य समीकरण है

I. Σ लघु $Y=N$ लघु $a+$ लघु $c\Sigma X^2$

II ΣX लघु $Y=$ लघु $b\Sigma X^2$

III ΣX^2 लघु $Y=$ लघु $a\Sigma X^2+$ लघु $c\Sigma X^4$

परिशिष्ट ख से हम जान लेते है कि $\Sigma X^2=2(1,496)=2,992$ तथा $\Sigma X^4=2(234,848)=487,696$ है। दूसरे सभी मानो को सारणी 13.3 से प्राप्त किया जा सकता है और हम प्रसामान्य समीकरणों को निम्न प्रकार मे हल करते हैं :

II ΣX लघु $Y=$ लघु $b\Sigma X^2$

$57\,402463=2,992$ लघु b

लघु $b=0\,0191854$

I Σ लघु $Y=N$ लघु $a+$ लघु $c\Sigma X^2$

III. ΣX^2 लघु $Y=$ लघु $a\Sigma X$ $+$ लघु $c\Sigma X^4$

I $86\,539428=33$ लघु $a+2,992$ लघु c

III $7,751\,942035=2,992$ लघु $a+487,696$ लघु c

$(1\times 90\,666667)$ $7,846\,241501=2\,992$ लघु $a+271,274\,67$ लघु c.

III. $7,751\,942035=2\,992$ लघु $a+487,696$ लघु c

$94\,299466=$ $-216,421\,33$ लघु c

लघु $c=-0\,000435722$

I $86\,539428=33$ लघु $a+(2,992)(-0\,000435722)$.

33 लघु $a-87\,843108$.

लघु $a=2.661912$.

सारणी 13 3

1929—1961 में संयुक्त राज्य में आइसक्रीम उत्पादन के द्वितीयांश वक्र के लघुगणकों से आसंजित मानों का परिकलन

(दस लाख गैलनों में)

वर्ष	उत्पादन Y	लघु Y	X	X लघु Y	X²	X² लघु Y	उपनति मानों का परिकलन: लघु a + X लघु q	X लघु c	लघु Y	Y_c
1929	277 2	2 442793	—16	—39 084688	256	625 355008	2 3549456	—0 111544832	2 243401	175 1
1930	255 4	2 402721	—15	—36 108315	225	541 624725	2 3741310	—0 098037450	2 276094	188 8
1931	226 4	2 354876	—14	—32 968264	196	461 555686	2 3933164	—0 085401512	2 307915	203 2
1932	168 0	2 225309	—13	—28 929017	169	376 077221	2 4125018	—0 073637018	2 338865	218 2
1933	161 8	2 208979	—12	—26 507748	144	318 002976	2 4316872	—0 062743968	2 368943	233 9
1934	191 6	2 282396	—11	—25 106356	121	276 199916	2 4508726	—0 052722362	2 398150	250 1
1935	219 1	2 340642	—10	—23 406420	100	234 964200	2 4700580	—0 043572200	2 426486	267 0
1936	258 6	2 412629	— 9	—21 713661	81	195 427949	2 4892434	—0 035293482	2 453950	284 4
1937	291 1	2 464042	— 8	—19 712336	64	157 693688	2 5084288	—0 027886208	2 480543	302 4
1938	286 4	2 456973	— 7	—17 198811	49	129 391677	2 5276142	—0 021350378	2 506264	320 8
1939	305 8	2 485437	— 6	—14 912622	35	89 475732	2 5467996	—0 015689992	2 531114	339 7
1940	318 1	2 502564	— 5	—12 512820	25	62 564100	3 5659850	—0 010893050	2 555092	359 0
1941	390 3	2 591399	— 4	—10 365596	19	41 462384	2 5851704	—0 006971552	2 578199	378 6
1942	464 2	2 666705	— 3	— 8 000115	9	24 000345	2 6043558	—0 003921498	2 600434	398 5
1943	411 6	2 614475	— 2	— 5 228950	4	10 457900	2 6235412	—0 001742888	2 621798	418 6
1944	444 9	2 648262	— 1	— 2 648262	1	2 658262	2 6427266	—0 000435722	2 642291	438 8
1945	477 2	2 678700	0	0	0	0	2 6619120	0	2 661912	459 1
1946	713 8	2 853577	1	2 853577	1	2 853577	2 6810974	—0 000435722	2 680662	479 4
1947	631 0	2 800029	2	5 600058	4	11 200116	2 7002828	—0 001742888	2 698540	499 5
1948	576 5	2 760799	3	8 282397	9	24 847191	2 7194682	—0 003921498	2 715547	519 5
1949	558 1	2 746712	4	10 986848	16	43 947392	2 7386536	—0 006971552	2 731682	539 1
1950	554 4	2 743823	5	13 719115	25	68 595575	2 7578390	—0 010893050	2 746949	558 4
1951	568 8	2 754960	6	16 5 9760	36	99 178560	2 7770244	—0 015685992	2 761338	577 2
1952	592 7	2 772835	7	19 409845	49	135 868915	2 7962098	—0 028350378	2 774859	595 5
1953	605 1	2 781827	8	22 254616	64	178 036828	2 8153952	—0 027886208	2 787509	613 1
1954	596 8	2 775829	9	24 932461	81	224 842149	2 8345805	—0 035293482	2 799287	629 9
1955	628 5	2 798305	10	27 983050	100	279 830500	2 8537660	—0 043572200	2 810194	645 9
1956	641 3	2 807061	11	30 877671	121	339 654381	2 8729514	—0 052722362	2 820229	661 0
1957	649 9	2 812847	12	33 754164	144	405 049968	2 8921368	—0 062743968	2 829393	675 1
1958	658 0	2 818226	13	36 636938	169	476 280194	2 9113222	—0 073637018	2 837685	688 2
1959	597 9	2 848793	14	39 813102	196	557 383428	2 9305076	—0 085401512	2 845106	700 0
1960	697 6	2 843666	15	42 650490	225	639 811350	2 9496930	—0 098037450	2 851656	710 7
1961	694 7	2 841797	16	45 468752	256	727 500032	2 9688784	—0 111544832	1 857334	720 0
योग		86 539428	0	57 402463	2 992	7 751 942035				

हिस्टारिकल स्टैटिस्टिक्स आफ दि युनाइटिड स्टटस, कोलोनियल टाइम्स टु *1957* पृष्ठ 292 एग्रीकल्चरल स्टैटिस्टिक्स 1961, पृष्ठ 400 तथा 1963, पृष्ठ 397 से

III को प्रयोग करते हुए जाँचें $7{,}751\ 942035 = (2{,}992)(2\ 661912) + (487{,}696)(-0\ 000435722)$.

$= 7{,}751\ 940827$

उपनति समीकरण लघु $Y_c = 2\ 661912 + 0\ 0191854X - 0\ 000435722X^2$

मूलबिन्दु, 1945, X इकाइयां, 1 वर्ष।

उपनति मानो के परिकलन की विधि का सारणी 13 3 मे सकेत किया गया है। उपनति को लेखाचित्रीय विधि से चार्ट 13 6 मे दिखाया गया है। एक गाम्पर्त वक्र भी आँकडो से आसजित किया गया है (चार्ट 13 10 तथा 13 11 देखिये)।

अनन्तस्पर्शी वृद्धि वक्र

ऋजु रेखा $Y_c = a + bX$, जिसका वर्णन पिछले अध्याय मे किया गया था, वृद्धि अथवा कमी की अचर मात्रा की व्याख्या करती है। घातीय वक्र, $Y_c = ab^X$ के अन्तर्गत, परिवर्तन का अचर अनुपात है और इसलिए परिवर्तन की मात्रा मे परिवर्तन का अचर अनुपात आता है। यदि b, एक से बडी धनात्मक सख्या है तो उपनति ऊर्ध्वगामी होगी और परिवर्तन की मात्रा मे अचर प्रतिशतता वृद्धि होती रहती है। यदि, b एक से छोटी धनात्मक सख्या हो तो उपनति निम्नगामी होती है और उपनति की मात्रा कमी की अचर प्रतिशतता को प्रदर्शित करती है।

समय की लम्बी अवधियो मे कालक्रम श्रेणियो के लिए परिवर्तन की अचर मात्रा अथवा परिवर्तन के सचर अनुपात को प्रदर्शित करने की सभावना नही होती। इसकी बहुत अधिक सम्भावना है कि एक बढती हुई श्रेणी[4] परिवर्तन की बढती हुई मात्रा किन्तु परिवर्तन का घटता हुआ अनुपात प्रदर्शित करे। यह चार्ट 13 10 और 13 11 के आँकडो के लिए सत्य है, जो आइस क्रीम के स्वदेशीय उत्पादन को प्रदर्शित करते है।

यह भी सम्भव है कि बढती हुई श्रेणी वृद्धि की मात्रा मे कमी को प्रदर्शित करे। घटते हुए निरपेक्ष विकास का प्राय प्रतिरोध नही किया जाता है, परन्तु हम इस प्रकार के एक सशोधित चरघाताकी वक्र का वर्णन करेंगे, क्योकि यह अधिक महत्त्वपूर्ण गाम्पर्त तथा वृद्धिघात वक्र के अत्युतम परिचय का काम करता है। सशोधित चरघाताकी वक्र का विचार प्रारम्भ करने से पूर्व उन अन्य तीन वक्र प्रकारो की सरसरी व्याख्या की जा सकती है जो विकास की घटती हुई मात्रा का वर्णन कर सकें। वे हैं·

(1) संशोधित बहुपद, जैसे $Y_c = ab + X^{\frac{1}{2}}, Y_c = a + bX^{\frac{1}{2}} + cX$, तथा अन्य। जब तीन या अधिक स्थिराक विद्यमान हो एक (या अधिक) स्थिराक ऋणात्मक हो सकते हैं, तो ऐसी अवस्था मे वक्र अन्ततोगत्वा उलट जाता है.

(2) लघु X तक ऋजु रेखा। व्यजक है $Y_c = a + b$ लघु X. इस वक्र प्रकार का तब तक उपयोग नही किया जाना चाहिए जब तक कि समय के लघुगणको पर विचार करने के लिये तर्कसगत औचित्य न हो।

---

4 गिरने वाली श्रेणियां परिवर्तन की घटती हुई मात्रा को प्रदर्शित कर सकती हैं। परिवर्तन की घटती हुई मात्रा परिवर्तन के घटते हुए या अचर (परन्तु प्राय गिरते हुए) अनुपात का प्रतिनिधित्व कर सकती है। सम्भाव्य भ्रांति को दूर करने के लिए अनन्तस्पर्शी विकास वक्रो मे सम्बन्धित अधिकाश वर्णन बढती हुई श्रेणी की व्याख्या करेगा।

(3) लघु Y के एक परवलयिक वक्र को, जिसे लघु $Y_c = aX^b$ लिखा जाता है, न्यूनतम वर्गों द्वारा लघु Y_c = लघु $a + b$ लघु X लिख कर आसजित किया जा सकता है।

ध्यान दीजिए कि X के लघुगणक का प्रयोग करने हुए X मूलबिन्दु को समय के मध्य मे नही लिया जा सकता।

रूपांतरित चरघातांकी वक्र—यह वक्र न केवल उपनति का वर्णन करता है जिसमे विकास की मात्रा अचर प्रतिशतता मे गिरती है, अपितु वक्र ऊपरी सीमा तक पहुँचता है जिसे अनन्तस्पर्शी कहते है। विकास वक्रो की यह एक महत्त्वपूर्ण विशेषता है, क्योंकि बहुत सी काल-श्रेणियाँ ऊपरी सीमा तक पहुँचती दिखाई देती है। रूपान्तरित चरघातांकी का समीकरण है $Y_c = k + ab^x$, जहाँ k अनन्तस्पर्शी है।

सारणी 13 4

संशोधित चरघातांकी वक्र के काल्पनिक आँकडे

(अनन्तस्पर्शी $k = 114$)

X (1)	Y (2)	आंशिक योग (3)	Y वृद्धि (4)	पूर्व वृद्धि का प्रतिशत (5)
0	50		..	...
1	66	116 0000	16	...
2	78		12	75
3	87	165 0000	9	75
4	93 75		6 75	75
5	98 8125	192 5625	5 0625	75

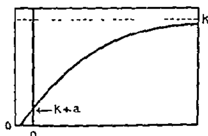
जैसा कि पाद-टिप्पणी 4 मे देखा गया था, हम अपना ध्यान मुख्य रूप से बढती हुई श्रेणी की ओर देंगे, परन्तु चार्ट 13 7 चार आकार दिखाता है जिनकी इस समीकरण मे कल्पना की जा सकती है। यह अवश्यमेव स्पष्ट होना चाहिये कि हमारी रुचि चार्ट 13 7 के भाग 1 पर केन्द्रित होती है, क्योंकि वह उन चारो मे से केवल एक है जो ऊपरी अनन्त-स्पर्शी के साथ एक बढती हुई श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है। ऐसे भी अवसर हैं जब उपनति को इस प्रकार प्रयोग मे लाने की इच्छा हो सकती है जैसे चार्ट 13 7 के भाग 3 मे। यह घटती हुई श्रेणी के लिये नही हो सकता है जो कमी की मात्रा मे कमी की अचर प्रतिशतता की ओर उन्मुख हो। एक निर्दिष्ट रोग से मृत्यु दर मे इस प्रकार का व्यवहार हो सकता है।

k, a, तथा b के लिए विभिन्न मानो को रूपांतरित चरघातांक के समीकरणों मे प्रतिस्थापित करना तथा स्वयमेव वक्रो को खीचना, जैसा कि चार्ट 13 7 में दिखाया गया है, हो सकता है पाठक को स्पष्ट लगे। यह उसे सामान्यतया उस चार्ट मे वर्णित परिस्थितियो

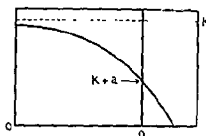
के विशेष उदाहरण प्रदान करेगा। ध्यान दीजिये कि b के ऋणात्मक मान मे हमारी कोई रुचि नही है।

सारणी 13 4 के प्रथम दो स्तम्भ उस श्रेणी को प्रदर्शित करते हैं जिसके विकास की मात्रा मे अचर प्रतिशत कमी रहती है। जैसा कि स्तम्भ 4 और 5 से देखा जा सकता है, प्रत्येक प्रथम अन्तर पूर्व के प्रथम अन्तर का 75 प्रतिशत है। वृद्धि के अभिवर्धन हैं Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 तथा Δ_5, और $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{\Delta_3}{\Delta_2}=\frac{\Delta_4}{\Delta_3}=\frac{\Delta_5}{\Delta_4}=0\ 75$

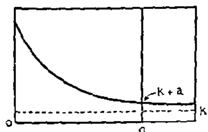
चार्ट 13.8 का संकेत करते हुए, चार्ट की चोटी के निकट क्षैतिज खण्डित रेखा k का मान है जिस तक इस श्रेणी का वक्र पहुँचता है, इस अवस्था में यह k 114 है। इसका अर्थ है यदि हम उपनति रेखा को अनिश्चित रूप से बढाएँ तो वह इस मान के निकट से



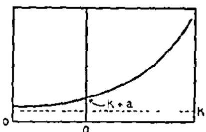
(1) जब a ऋणात्मक है और b एक से कम है।



(2) जब a ऋणात्मक है और b एक से बड़ा है।



(3) जब a धनात्मक है और b एक से कम है।

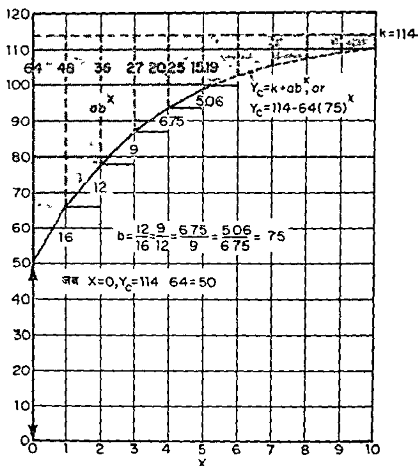


(4) जब a धनात्मक है और b एक से बड़ा है।

चार्ट 13 7 रूपातरित चरघाताकी वक्र, $Y_c=k+ab^X$, के चार रूप।

निकटतर आती जाएगी, परन्तु इसके बरावर कभी नही होगी। दूसरा स्थिराक, a, इस उदाहरण मे उपनति मान मे से अनन्तस्पर्शी k को घटाने से प्राप्त किया गया मान, जब कि X शून्य हो, −64 है। हाँ तीसरा स्थिराक, b, वास्तव मे विकास के क्रमिक अभिवर्द्धनो के बीच अनुपात है या इस श्रेणी के लिये 0 75 है। जब $X=1$ हो, तो चार्ट 13 8 मे ऊर्ध्वाधर खण्डित रेखा $-64(0\ 75)=-48$, जब $X=2$, है तो यह $-64(0.75)^2=-36$; और X के अन्य मानो के लिये भी इसी प्रकार होगी। इस प्रकार इन खण्डित ऊर्ध्वाधर रेखाओ का वर्णन ab^X के व्यजक से किया जाता है। यह तब भी सत्य है जब $X=0$, क्योंकि $-64(0.75)^0=-64$। चित्र मे, ab^X का प्रतिनिधित्व छाया-

युक्त क्षेत्र की ऊँचाई द्वारा किया जाता है। अब यदि हम क्रमश k में से प्रत्येक ऊर्ध्वाधर खण्डित रेखा के मान को घटा दें तो हमे उपनति मान प्राप्त होते है। ऊर्ध्वाधर खण्डित



चार्ट 13.8 सारणी 13.4 के आंकड़ों के साथ आसजित एक रूपांतरित चरघातांकी समीकरण।

रेखाओं को k में से घटा दिया है क्योंकि a का चिह्न ऋणात्मक है। इस प्रकार

X	$k+ab^x$	$=Y_c$
0	114 − 64	=50
1	114 − 48	=66
2	114 − 36	=78
3	114 − 27	=87
4	114 − 20.25	=93 75
5	114 − 15 1875	=98 8125.

क्योंकि a का चिह्न ऋणात्मक है, अत विकास के अभिवर्धन गिर रहे है। जैसा कि पहले ही स्पष्ट है, आंकड़ो की इस श्रेणी के लिये समीकरण है $Y_c=114-64(0.75)^X$।

इस वक्र के तीन स्थिराक है k अन नस्पर्शो a Y और अनन्तस्पर्शी मानो के वीच अन्तर जब $X=O$, तथा b क्रमिक प्रथम अन्तरो के वीच अनुपात। अत इसके आसजन के लिये तीन समीकरण आवश्यक है। सारणी 13 4 के अनुसार, उन्हे, प्रथम आंकडो को तीन समान परिच्छेदो मे विभक्त करके प्राप्त किया जाता है। फिर, स्तम्भ 3 के अनुसार प्रत्येक अनुभाग के लिये Y मानो का योग किया जाता है। परिणाम हैं

पहले तृतीय के लिये $\Sigma_1 Y = 116$

दूसरे तृतीय के लिये $\Sigma_2 Y - 165$

तीसरे तृतीय के लिये $\Sigma_3 Y = 192\ 5625$

आइये, हम ध्यान दें कि हमारे समीकरणो के रूप मे 116 किस बात का प्रतिनिधित्व करता है। यह 50 + 66 का जोड है। परन्तु 50 $k + ab^0$ तथा 66, $k+ab^1$ है, अत

$$116 = 2k + a + ab$$

यह समीकरण I है। इसी प्रकार स अन्य दो को प्राप्त किया जाता है। तीन समीकरण है

$$\text{I} \quad 116 - 2k + a + ab$$
$$\text{II} \quad 165 = 2k + ab + ab^3$$
$$\text{III} \quad 192\ 5625 = 2k + ab^4 + ab^5$$

b के लिये हल प्राप्त करने के लिये समीकरण A को प्राप्त करने के लिए, हम समीकरण I को समीकरण II म से घटाते है, और फिर समीकरण B को प्राप्त करने के लिए समीकरण III मे से समीकरण II को घटाते हैं। इस प्रकार

$$\text{A} \quad 49 = ab^3 + ab - ab - a$$
$$= a(b^3+b^2-b-1).$$
$$\text{B} \quad 27\ 5625 = ab^5 + ab^4 - ab^3 - ab^2$$
$$= ab^2(b^3 + b^2 - b - 1)$$

अब स्थिराक b को, समीकरण B को समीकरण A स भाग करके, प्राप्त किया जाता है। हम परिणामी समीकरण को C कहेंगे।

$$\text{C} \quad \frac{27.5625}{49} = \frac{ab^2(b^3 + b^2 - b - 1)}{a(b^2 + b^3 - b - 1)}$$
$$b^2 = 0\ 5625$$
$$b = 0\ 75$$

अब a के मान को समीकरण A अथवा B म प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जा सकता है।

$$\text{A} \quad 49 = a(0\ 75^3 + 0\ 75^2 - 0\ 75 - 1)$$
$$a = \frac{49}{-0\ 765625} = -64$$

मूल समीकरणो में से किसी एक में a तथा b के मानो के प्रतिस्थापन द्वारा शेष स्थिराक k का परिकलन किया जा सकता है।

$$\text{I} \quad 116 = 2k - 64 - 64(0.75)$$
$$2k = 228$$
$$k = 114$$

इस प्रकार स्थिराको के प्राप्त मान वे होते हैं जिन्हे हम जानते हो कि वे सही है। समीकरण को न्यूनतम वर्गों की विधि द्वारा नही प्राप्त किया गया था अपितु इस प्रकार जोड़ा गया था कि उपनति मानो के तीन आंशिक योग वही थे जो मूल आँकड़ों के थे। इस उदाहरण में क्योंकि मूल आकड़े समीकरण प्रकार की पूर्ण अनुरूपता करते हैं, अत आसजित वक्र सभी मूल आँकड़ा मे से होकर गुजरता है।

तर्कसगत प्रविधि को, जिसका वर्णन हो चुका है, और अधिक सुविधाजनक सूत्रो मे विकसित किया जा सकता है, जो निम्नलिखित है[5]

$$b^n = \frac{\Sigma_3 Y - \Sigma_2 Y}{\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y},$$

$$a = (\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y)\frac{b-1}{(b^n-1)^2}.$$

$$k = \frac{1}{n}\left[\Sigma_1 Y - \left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)a\right],$$

जहाँ n आँकड़ो के प्रत्येक तृतीय मे वर्षों की सख्या है। इन सूत्रो द्वारा हल करने में, वास्तव मे, आवश्यकता पड़ती है कि पहले b को प्राप्त किया जाए, फिर a को तथा अन्त मे k को।

यदि a तथा b के लिये व्यजको को भी दिये गए k के व्यजक मे प्रतिस्थापित कर दिया जाए, तो हमें

$$k = \frac{1}{n}\left[\frac{(\Sigma_1 Y)(\Sigma_3 Y) - (\Sigma_2 Y)^2}{\Sigma_1 Y + \Sigma_3 Y - 2\Sigma_2 Y}\right],$$

प्राप्त होता है, जो हमे पहले a तथा b के परिकलन के बिना अनन्तस्पर्शी प्राप्त करने के योग्य बनाता है।

क्योंकि काल-श्रेणियाँ सदैव इस ढग से व्यवहार नहीं करती कि रूपातरित-चरघाताकी एक तर्कसगत आसजन हो या काल श्रेणी की एक उत्तम व्याख्या हो, वास्तविक आँकड़ो के समुच्चय के साथ $Y_c = k + ab^X$ के आसजन का कोई उदाहरण नही दिया गया है। जैसाकि बहुत पहले देखा गया था, रूपातरित चरघाताकी वक्र को आगामी पृष्ठो मे वर्णित दो अन्य विकास वक्रो के परिचय के रूप मे निर्दिष्ट किया गया है।

गाम्पर्त वक्र—उस रूप मे जो हमारे लिए प्राथमिक रुचि का है, गाम्पर्त वक्र उपनति का वर्णन करता है जिसमे लघुगणको के विकास परिवर्तन अचर प्रतिशतता से गिर रहे हैं।

---

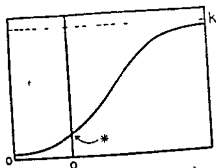
5 इन सूत्रो की उपनति परिशिष्ट छ, परिच्छेद 13.1 मे दी गई है।

इस प्रकार उपनति के प्राकृतिक मान वृद्धि के गिरते हुए अनुपात को प्रदर्शित करेंगे, परन्तु अनुपात न तो अचर मात्रा द्वारा कम होता है और न अचर प्रतिशतता द्वारा। गाम्पर्त वक्र के लिये समीकरण है

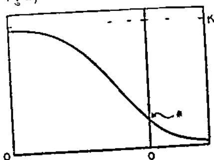
$$Y_c = ka^{b^X}$$

जिसे लघुगणकीय रूप में इस प्रकार रखा जा सकता है

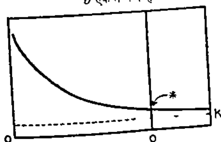
$$\text{लघु } Y_c = \text{लघु } k + (\text{लघु } a)\, b^X$$



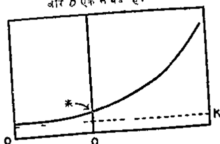
(1) जब लघु a ऋणात्मक है और b एक से कम है।



(2) जब लघु a ऋणात्मक है और b एक से बड़ा है।



(3) जब लघु a धनात्मक है और b एक से कम है।



(4) जब लघु a धनात्मक है और b एक से बड़ा है।

चार्ट 13 9 गाम्पर्त वक्र के चार रूप, $Y_c = ka^{b^X}$। चिह्नित बिन्दुओं (*) पर ऊर्ध्वाधर मान प्रतिलघु (लघु k + लघु a) होते हैं।

चार्ट 13 9 के चार भाग उन चार आकारों को दिखाते हैं जिनकी कल्पना गाम्पर्त वक्र के अन्तर्गत की जा सकती है। कदाचित् सांख्यिकीविद् को चार्ट 13 9 के भाग 2 और 3 में दिखाए गए[6] प्रकारों की उपनतियों का वर्णन करने के लिये गाम्पर्त वक्र के प्रयोग की कभी आवश्यकता पड़ सकती है, परन्तु हमारा मुख्य ध्यान उस पर केन्द्रित होता है जिसे चार्ट के भाग 1 में दिखाया गया है। इस वक्र का (तथा भाग 2 में दिखाए हुए वक्र का भी) एक उच्च तथा एक निम्न अनन्तस्पर्शी है, जिसमें निम्न अनन्तस्पर्शी शून्य है। चार्ट 13 9 में b के धनात्मक मूल्यों पर विचार किया जाता है, क्योंकि b के ऋणात्मक मान उपयोगी वक्र प्रदान नहीं करते।

6. रेलवे कर्मचारियों की मृत्यु, कारखानों में दुर्घटनाएँ, विशिष्ट मृत्यु दरों तथा अन्य गिरती हुई श्रेणियों का वर्णन गाम्पर्त वक्र के द्वारा किया जा सकता है जिसके दाईं ओर निम्न अनन्तस्पर्शी हो। उच्च अनन्तस्पर्शी है या नहीं यह उन आँकड़ों के व्यवहार पर निर्भर करेगा जिनमें वक्र आसंजित है।

संशोधित चरघातांकी वक्र के व्यवहार के विषय में जो कुछ कहा गया है वह गाम्पर्त वक्र के लघुगणकीय रूप पर भी लागू होता है। चार्ट 13 9 में दिखाए गये गाम्पर्त वक्रों को यदि लघुगणकीय रूप में (अथवा अर्ध लघुगणकीय कागज पर आरेखित करके) रखते हैं तो वे चार्ट 13.7 के अनुरूप भागों की तरह दिखाई देंगे। गाम्पर्त वक्र का जोड़ प्रेक्षित आकड़ों के लघुगणकों से है और उसे संशोधित चरघातांकी जोड़ के पूर्णतया समानान्तर ढंग से पूर्ण किया जा सकता है। व्यजक हैं

$$b^n = \frac{\Sigma_3 \text{ लघु } Y - \Sigma_2 \text{ लघु } Y}{\Sigma_2 \text{ लघु } Y - \Sigma_1 \text{ लघु } Y}$$

$$\text{लघु } a = (\Sigma_2 \text{ लघु } Y \ \Sigma_1 \text{ लघु } Y)\frac{b-1}{(b^n-1)^2}$$

$$\text{लघु } k = \frac{1}{n}\left[\Sigma_1 \text{ लघु } Y - \left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)\text{लघु } a\right]$$

यदि पहले लघु a तथा b का परिकलन किये बिना k का मान प्राप्त करने की इच्छा हो तो

$$\text{लघु } k = \frac{1}{n}\left[\frac{(\Sigma_1 \text{ लघु } Y)(\Sigma_3 \text{ लघु } Y) - (\Sigma_2 \text{ लघु } Y)^2}{\Sigma_1 \text{ लघु } Y + \Sigma_3 \text{ लघु } Y - 2\Sigma_2 \text{ लघु } Y}\right]$$

का प्रयोग करो। इस व्यजक का प्रयोग सर्वप्रथम शीघ्र ही यह निश्चित करने के योग्य बना देता है कि क्या ऊर्ध्वगामी उपनति में उच्च अनन्तस्पर्शी है, इस ढग से किए गए k के परिकलन से पहले दिए गए सूत्र के द्वारा प्राप्त किय गए k के मान की पडताल भी हो जाती है। बढती हुई श्रेणी के लिये उच्च अनन्तस्पर्शी है या नहीं इसे भी इस बात से निश्चित कर सकते है कि क्या (Σ_2 लघु $Y - \Sigma_1$ लघु Y), (Σ_3 लघु $Y - \Sigma_2$ लघु Y) से छोटा है या बडा। यदि पहला अन्तर दूसरे अन्तर से अधिक हो जाता है तो b^n (तथा, इसलिय b) एक से बडा है और बढती हुई श्रेणी के लिय कोई उच्च अनन्तस्पर्शी नहीं है; इस प्रकार बढती हुई श्रेणी का वक्र चार्ट 13 9 के भाग 4 में दिखाए गए वक्र से मिलता-जुलता होगा। यदि पहला अन्तर दूसरे अन्तर से कम है तो b एक से कम है, और बढती हुई श्रेणी का वक्र चार्ट 13 9 के भाग 1 जैसा दिखाई देगा।

सारणी 13 5 के आंकडे जिन्हे चार्ट 13 10 और 13 11 में भी दिखाया गया है, गाम्पर्त वक्र के आसजन के उदाहरण के आधार के रूप में काम देंगे। लघुगणकों के वाञ्छित योगों के परिकलन को सारणी 13 5 के चौथे स्तम्भ में कार्यान्वित किया गया है। पहले दिये गए व्यजकों का प्रयोग करते हुए हम प्राप्त करते हैं

$$b^n = \frac{\Sigma_3 \text{ लघु } Y - \Sigma_2 \text{ लघु } Y}{\Sigma_2 \text{ लघु } Y - \Sigma_1 \text{ लघु } Y}$$

$$b^{11} = \frac{30\ 851086 - 29\ 607045}{29\ 607045 - 23\ 595860} = \frac{1\ 244041}{6.011185} = 0\ 20695437.$$

$$\text{लघु } b^{11} = 9.31587418 - 10 = 109\ 31587418 - 110$$

$$\text{लघु } b = 9\ 937806744 - 10.$$

$$b = 0\ 86657549.$$

सारणी 13 5

1929—1961 मे सयुक्त राज्य मे आइसक्रीम उत्पादन के साथ जुडे गाम्पर्त वक्र के मानो का परिकलन

(प्रति दस लाख गैलन)

				उपनति मानो का परिकलन			
वर्ष	X	उत्पादन	लघु Y	b^X	$(\text{लघु}\,a)b^X$	लघु Y_c = लघु k + $(\text{लघु}\,a)b^X$	Y_c
1929	0	277 2	2 442793	1 0000000	—1 275262	1 558896	36 2
1930	1	255 4	2 407221	0 8665755	—1 105111	1 729047	53 6
1931	2	226 4	2 354876	0 7509543	—0 957663	1 876495	75 2
1932	3	168 0	2 225309	0 6507 85	—0 829888	2 004270	101 0
1933	4	161 8	2 208979	0 5639324	—0 719162	2 114996	130 3
1934	5	191 6	2 282396	0 4886907	—0 623209	2 210941	162 5
1935	6	219 1	2 340642	0 4234877	—0 540058	2 294100	196 8
1936	7	258 6	2 412629	0 3669841	—0 468001	2 366157	232 4
1937	8	291 1	2 464042	0 3180196	—0 405558	2 428600	268 3
1938	9	286 4	2 456673	0 2755883	—0 351447	2 482711	303 9
1939	10	305 8	2 485437	0 2388184	—0 304556	2 529602	338 5
Σ_1 लघु Y	.		23 595860			23 595823√	
1940	11	318 1	2 502564	0 2069544	—0 263921	2 570237	371 7
1941	12	390 3	2 591399	0 1793417	—0 228708	2 605450	403 1
1942	13	464 2	2 666705	0 1554131	—0 198192	2 635965	432 5
1943	14	411 6	2 614475	0 1346772	—0 171749	2 662409	459 6
1944	15	444 9	2 648262	0 1167081	—0 148833	2 685325	484 5
1945	16	477 2	2 678700	0 1011365	—0 128976	2 705182	507 2
1946	17	713 8	2 853577	0 0876425	—0 111767	2 722391	527 7
1947	18	631 0	2 800029	0 0759488	—0 096855	2 737303	546 1
1948	19	576,5	2 760799	0 0658155	—0 083932	2 750226	562 6
1949	20	558 1	2 746712	0 0570341	—0 072733	2 761425	577 3
1950	21	554 4	2 743823	0 0494244	—0 063029	2 771129	590 4
Σ_2 लघु Y			29 607045			29 607043√	
1951	22	568 8	2 754960	0 0428300	—0 054619	2 779539	601 9
1952	23	592 7	2 772835	0 0371155	—0 047332	2 786826	612 1
1953	24	605 1	2 781827	0 0321634	—0 041017	2 793141	621 1
1954	25	596 8	2 775829	0 0278720	—0 035544	2 798614	628 9
1955	26	628 5	2 798305	0 0241532	—0 030802	2 803356	635 9
1956	27	641 3	2 807061	0 0209306	—0 026692	2 807466	641 9
1957	28	649 9	2 812847	0 0181380	—0 023131	2 811027	647 2
1958	29	658 0	2 818226	0 0157179	—0 020044	2 814114	651 8
1959	30	697 9	2 843793	0 0136208	—0 017370	2 816788	655 8
1960	31	697 6	2 843606	0 0118034	—0 015052	2 819106	659 3
1961	32	694 7	2 841797	0 0102286	—0 013044	2 821114	662 4
Σ_3 लघु Y			30 851086			30 851091√	

आँकडे *हिस्टारिकल स्टैटिस्टिक्स ऑफ युनाइटिड स्टेट्स कोलोनियल टाइम्स टु 1957*, पृष्ठ 292, *ऐग्रीकलचरल स्टैटिस्टिक्स, 1961*, पृष्ठ 400 तथा *1963*, पृष्ठ 397 स ।

$$\text{लघु } a = (\Sigma_2 \text{ लघु } Y - \Sigma_1 \text{ लघु } Y)\frac{b-1}{(b^n-1)^2},$$

$$= 6\ 011185 \frac{-0\ 13342451}{(-0\ 79304563)^2} = 6\ 011185 \frac{-0\ 13342451}{0\ 62892137},$$

$$= (6\ 011185)(-0\ 21214816) = -1\ 2752618$$

$$\text{लघु } k = \frac{1}{n}\left[\Sigma_1 \text{ लघु } Y - \left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)\text{लघु } a\right],$$

$$= \frac{1}{11}\left[23\ 595860 - \left(\frac{-0\ 79304563}{-0\ 13342451}\right)(-1\ 2752618)\right],$$

$$= 2\ 834158$$

पडताल करें, प्रयोग करते हुए

$$\text{लघु } k = \frac{1}{n}\left[\frac{(\Sigma_1 \text{ लघु } Y)(\Sigma_3 \text{ लघु } Y) - (\Sigma_2 \text{ लघु } Y)^2}{\Sigma_1 \text{ लघु } Y + \Sigma_3 \text{ लघु } Y - 2\Sigma_2 \text{ लघु } Y}\right]$$

$$= \frac{1}{11}\left[\frac{(23\ 595860)(30\ 851086) - (29\ 607045)^2}{23\ 595860 + 30\ 851086 - 2(29\ 607045)}\right] = 2\ 834158$$

उपनति समीकरण

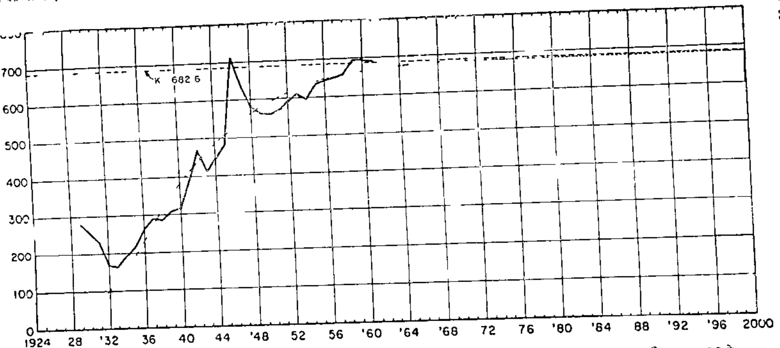
$$\text{लघु } Y_c = 2\ 834158 - 1\ 2752618(0\ 8665755\ )^X$$

$$Y_c - 682\ 59(0\ 0530565)^{(0\ 8665755)X}$$

मूलबिन्दु, 1929, X इकाइयां, 1 वर्ष ।

उपनति समीकरण का प्राकृतिक रूप लघु k तथा लघु a के प्रति लघुगणकों की खोज करने पर प्राप्त होता है। क्योंकि लघु $a = -1\ 2752618$ ऋणात्मक लघुगणक है, अत इसे परिशिष्ट द से $a = 0\ 0530569$ का मान प्राप्त किये जा सकने से पूर्व पुन लघु $a = 8\ 7247382-10$ लिखा जाना चाहिये। ध्यान दीजिये कि $b=0\ 8665755$ है, जो यह संकेत करता है कि वृद्धि का अनुपात प्रतिवर्ष गिर रहा है अधिक विशेष रूप से यह संकेत करता है कि क्रमिक लघुगणक उपनति मानों में प्रत्येक अन्तर पूर्ववर्ती अन्तर से लगभग 0 87 गुणा (या पूर्ववर्ती अन्तर का 87 प्रतिशत) है। जब भी $b < 1$, तो $b-1$ का मान ऋणात्मक है यदि Σ_2 लघु Y, Σ_1 लघु Y से अधिक है तो परिणाम स्वरूप लघु a का मान ऋणात्मक होगा (देखिये लघु a का समीकरण)। यदि लघु a ऋणात्मक है तो a एक से कम है।

हमारे आंकड़ो के लिये, जब X शून्य है (1920 के लिए X का मान), तो $b^X = 1.0$ तथा $ab^X = 0\ 0530565$ इस परिणाम के साथ कि 1929 के लिये $Y_c = (682\ 6)\ (0\ 0530565) = 36\ 2$ है जो 1929 का निर्दिष्ट मान है और सारणी 13 5 के अन्तिम स्तम्भ में दिखाया गया है। X का मान जितना अधिक होगा b^X का मान उतना ही कम होगा। जैसे ही X बढ़ता है, bX शून्य पर पहुँच जाता है और ab^X, 1 0 पर, इस परिणाम के साथ कि Y_c, k या 683, उच्च अन तस्पर्शी, पर पहुँच जाता है।



चार्ट 13.10 1929—1961 मे आइसक्रीम का स्वदेशीय उत्पादन, तथा उपनति जैसा कि गाम्पर्त वक्र द्वारा दिखाया गया है। ध्यान दीजिये कि इस चार्ट मे अ कगणितीय ऊर्ध्वाधर पैमाना है। गाम्पर्त वक्र को वक्र का सामान्य आकार दिखाने के लिए बढाया गया है। सारणी 13 5 से लिए आँकड़े।

चार्ट 13.11 192)—1)(1 में आद्यतनीय का स्वदेशीय उत्पादन तथा उपनति जरा ति गाम्पत वक्र से दिखाया गया है।

यह ध्यान दें कि इस चार्ट में ... है। ... सारणी 13.5 को लिए आँकड़े

उपनति मानों का परिकलन करने की विधि सारणी 13.5 में दिखाई गई है। ध्यान दीजिये कि क्रम से कम छः अंकों तक Σ_1 लघु Y = Σ_1 लघु Y, Σ_2 लघु Y_c = Σ_2 लघु Y, तथा Σ_3 लघु Y_c = Σ_3 लघु Y। इन समानियों की पड़ताल चिह्नों द्वारा "लघु Y_c" शीर्षक स्तम्भ में किया गया है। उपनति मानों को चार्ट 13.10 तथा 13.11 में आरेखित किया गया है तथा आसंजित वक्र का आकार अधिक स्पष्ट रूप से संकेत करने के लिये उन्हें दोनों दिशाओं में बढ़ाया गया है। 2000 तक उपनति का प्रसार भविष्यवाणी के रूप में प्रस्तुत नहीं किया गया है यद्यपि कई बार गाम्पर्ट्ज वक्र का प्रयोग भविष्यवाणी करने में सहायता के लिये किया जाता है। अनन्तस्पर्शी को दोनों चार्टों पर दिखाया गया है और अनन्तस्पर्शी तक उपनति का उपागम स्पष्ट है।

चार्ट 13.10 में यह देखा जाएगा कि प्रारम्भ में विकास की मात्रा कम है फिर उस समय तक जब तक कि यह नतिपरिवर्तन बिन्दु तक नहीं पहुँच जाती अधिक होती जाती है जिसके बाद यह गिरती है और अन्ततोगत्वा शून्य के निकट पहुँच जाती है पर शून्य पर कभी नहीं पहुँचती। उपनति का यह सामान्य रूप बहुत से उद्योगों के लिये समान है और इसने हमें निष्कर्ष पर पहुँचाया कि यह विकास के नियम का वर्णन करता है। इस व्याख्या के अनुसार यह उपनति जनसंख्या वृद्धि के कारण है जिसका वक्र प्रतिरूपी ढंग से आकार में एक सा ही है परन्तु यह भी आंशिक रूप से विशिष्ट उद्योग के विकास के कारण है। यह विश्वास है कि उद्योग के विकास को चार अवस्थाओं में विभक्त किया जा सकता है

(1) प्रयोग की अवधि
(2) सामाजिक तन्तु में विकास की अवधि
(3) उस बिन्दु से जहाँ विकास बढ़ता है परन्तु ह्रासमान दर से
(4) स्थिरता की अवधि।

ये अवस्थाएँ अधिक विशिष्ट रूप से सीमांकित नहीं हैं। इस प्रकार के वक्र के लिए यह दावा किया जाता है कि यह किसी उद्योग के भविष्य की भविष्यवाणी में उपयोगी है क्योंकि यह केवल तर्कसंगत वक्र ही नहीं है अपितु समतल बनाने वाली अपनी प्रवृत्ति के कारण भविष्यकथन में उसकी उपनति रूढ़िवादी होती है। चार्ट 13.10 और 13.11 की क्षैतिज डैश रेखाएँ यह संकेत करती हुई दिखाई देंगी कि संयुक्त राज्य अमरीका में आइसक्रीम के उत्पादन की ऊपरी सीमा लगभग 6850 लाख गैलन होगी। यह कम संख्या 1930—1935 के मन्दी के वर्षों के प्रभाव के फलस्वरूप है।

वृद्धिघाती वक्र—यह वक्र जो पर्लरीड वक्र के नाम से भी विख्यात है अपने सरलतम रूप में,

$$\frac{1}{Y_c} = k + ab^X$$

इस व्यंजक से यह स्पष्ट हो जाना चाहिये कि यह केवल Y मानों के व्युत्क्रमों के रूप में एक संशोधित चरघातांकी है, Y_c मानों के व्युत्क्रमों के पहले अन्तर एकसमान प्रतिशतता से गिर रहे हैं। अन्य आंशिक योगों की विधि में संशोधित चरघातांकी को प्रेक्षित Y मानों के व्युत्क्रमों के साथ जोड़ा जा सकता था, और आसंजित मानों के इस प्रकार प्राप्य व्युत्क्रमों

को उपनति मानो के रूप मे लिया जा सकता था। तथापि, इस वक्र को अधिकतर $Y_c = \frac{k}{1+10^{a+bX}}$ लिखा जाता है,[7] और चाहे चुने हुए बिन्दुओं के द्वारा आसजित यह प्रविधि अधिक व्यक्तिनिष्ठ है। इस रूप में, वृद्धिघाती वक्र का सदैव ऊँचा k का अनन्तस्पर्शी और नीचा शून्य का अनन्तस्पर्शी होगा; यह चार्ट 13 9 के भाग 1 या भाग 2 जैसा दिखाई देता है। $\frac{1}{Y_c} = k + ab^X$ के रूप मे वृद्धिघात उन चारो रूपो को ग्रहण कर सकता था जिन्हे चार्ट 13 9 मे दिखाया गया है।

समीकरण

$$Y_c = \frac{k}{1+10^{a+bX}}$$

को चुने हुए बिन्दुओ की विधि द्वारा जोडने के लिये तीन वर्षो, x_0, x_1, तथा x_2 के चुनने की आवश्यकता पडती है जो परस्पर एक दूसरे से समान दूरी पर हो। एक अवधि के प्रारम्भ के पास हो, दूसरा मध्य मे तथा तीसरा अन्त के निकट तीन चुने हुए मान जिनमे से आसजित वक्र गुजरेगा, उनमे इन तीन वर्षो के साथ सम्बद्ध Y मान है। इन Y मानो को y_0, y_1 तथा y_2 नाम दिए गए है। X अक्षाश के ऊपर मूलबिन्दु x_0 कहलाने वाले ऊपर है और x_0 से x_1 तक या x_1 से x_2 तक n वर्षों की सख्या है। तीन स्थिराको को निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त किया जाता है

$$k = \frac{2y_0y_1y_2 - y_1^2(y_0+y_2)}{y_0y_2 - y_1^2}.$$

$$a = \text{लघु}\ \frac{k-y_0}{y_0}$$

$$b = \frac{1}{n}\left[\text{लघु}\ \frac{y_0(k-y_1)}{y_1(k-y_0)}\right]$$

उदाहरण के लिए सारणी 13 6 वृद्धिघाती वक्र को महाद्वीपीय सयुक्त राज्य अमरीका के 1820—1960 की जनसख्या के आँकडो से जोडने की प्रविधि को प्रदर्शित करती है। जनसख्या के आँकडे लेखाचित्रीय विधि से चार्ट 13 12 मे दिखाए गए हैं। सारे काल 1790—1960 की अपेक्षा, इस अवधि, जिसमे 15 दस वार्षिक अक सम्मिलित है, का प्रयोग

7 हर मे, 10 की अपेक्षा, प्राय $e = 2\ 71828$ का प्रयोग किया जाता है। जिससे

$$Y_c = \frac{k}{1+e^{a+bX}}.$$

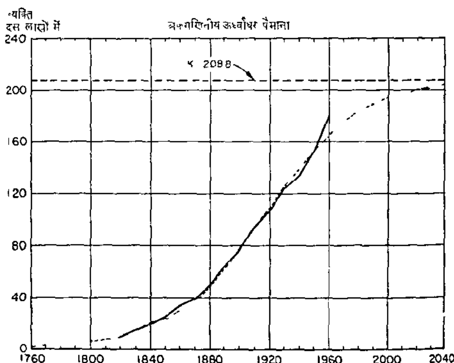
दोनो रूपो मे a मान तथा b मान भिन्न होगे, परन्तु दोनो रूप एक ही वक्र का वर्णन करते हैं, और हर मे 10 का प्रयोग करते हुए, लघुगणक से y_c मानो की सगणना करना थोडा-सा सुगम है।

सारणी 13 6

1820—1960 मे महाद्वीपीय सयुक्त राज्य की जनसख्या के आंकडों से वृद्धिघाती वक्र को जोडने के लिये मानों का परिकलन

वर्ष (1)	x (2)	X (3)	जनसख्या दस लाखो मे Y (4)	y (5)	0 1346810X (6)	उपगति मानो की सगणना: लघु μ = 1 181505 − 0 1346810X (7)	μ (8)	$1+\mu$ (9)	$Y_c = \frac{208\ 827}{1+\mu}$ (10)
1820	...	−1	9 6		−0 1346810	1 316186	20 71	21 71	9 6
1830	x_0	0	12 9	12 9(y_0)	0	1 181505	15.19	16 19	12 9
1840	...	1	17 1	..	0 1346810	1 046824	11 14	12 14	17 2
1850	.	2	23 2	...	0 269362	0 912143	8 169	9 169	22 8
1860		3	31 4		0 404043	0 777462	5 990	6 990	29 9
1870		4	39 8		0 538724	0 642781	4 393	5 393	38 7
1880	..	5	50 2		0 673405	0 508100	3 221	4 221	49 5
1890	x_1	6	62 9	62 1(y_1)	0 808086	0 373419	2 363	3 363	62 1
1900	...	7	76 0	...	0 942767	0 238738	1 733	2 733	76 4
1910	..	8	92 0	..	1 077448	0 104057	1 271	2 271	92 0
1920	...	9	105 7	...	1 212129	−0 030624	0 9319	1 9319	108 1
1930	..	10	122 8	..	1 346810	−0 165305	0 6834	1 6834	124 1
1940	..	11	131 7	.	1 481491	−0 299986	0 5012	1 5012	139 1
1950	x_2	12	150 7	152.7(y_2)	1 616172	−0 434667	0 3676	1 3676	152 7 ✓
1960	.	13	179.3	..	1 750853	−0 569348	0 2696	1 2696	164 5

आंकडे स्टैटिस्टिकल ऐसट्रैक्ट ऑफ दि युनाइटिड स्टेट्स *1964*, पृष्ठ 5 से। स्तम्भ 5 के x_0 मान, x_1, तथा x_2 पर केन्द्रित तीन मानो के गुणोत्तर माध्य हैं। स्तम्भ 7 मे ऋणात्मक लघुगणको को, ऋणात्मक गुण तथा धनात्मक अपूर्णांश के साथ उनके वैकल्पिक रूपो मे पुन लिखा जाना चाहिये (जैसे, −0 030624=9 969376-10) एवं इसके कि μ के मानो को प्राप्त किया जा सके।



चार्ट 13 12 1820—1960, में महाद्वीपीय संयुक्त राज्य की जनसंख्या, तथा उपनति जैसा कि वृद्धिघाती वक्र द्वारा प्रदर्शित किया गया है। वक्र के सामान्य आकार को दिखाने के लिये वृद्धिघाती वक्र को बढ़ाया गया है। सारणी *13 6 के आँकड़े ।*

किया गया था, ताकि पूर्व वर्णित[8] व्युत्क्रमो के आंशिक योगो की विधि से तुलना की जा सके। सारणी 13 6 मे तीन चुने हुए बिन्दु है .

y_0, 1820, 1830, तथा 1840 के वर्षो के मानो का गुणोत्तर माध्य,

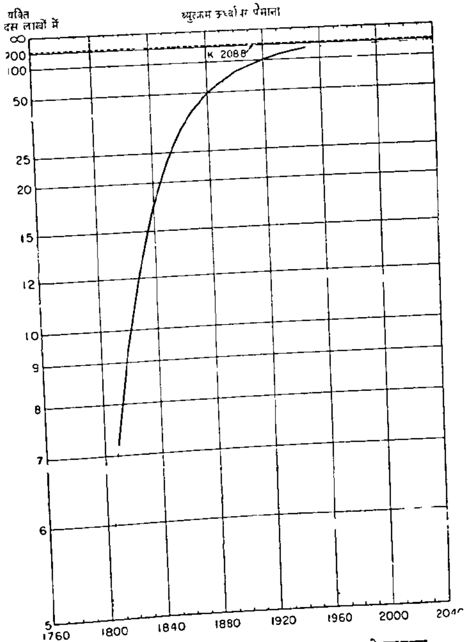
y_1, 1880, 1890, तथा 1900 के वर्षों के मानो का गुणोत्तर माध्य; तथा

y_2, 1940, 1950, तथा 1960 के वर्षों के मानो का गुणोत्तर माध्य ।

परिणामत, जैसा कि सारणी 13 6 के दूसरे स्तम्भ मे दिखाया गया है, x_0, 1830 पर है, x_1, 1890 पर, तथा x_2, 1950 पर। एकमात्र असामान्य ऊँचे या नीचे मान के प्रभाव

---

8 1810—1950 के लिये आंशिक योगो की विधि प्रदान करती है $k=185.9$ मिलियन। 1820—1960 के लिये चुने हुए बिन्दुओं की विधि के लिये जोड सारणी 13 6 मे $k=208\ 8$ प्रदर्शित करता है। 1790—1950 के लिये चुने हुए बिन्दुओ की विधि $k=189\ 9$ मिलियन प्रदान करती है (उन बिन्दुओ की तरह पहले तीन, मध्य के तीन तथा अन्त के तीन वर्षों के गुणोत्तर माध्यो का प्रयोग करते हुए)। वृद्धिघाती वक्र को जोड़ने के कुछ अन्य ढग के० आर० नायर द्वारा लिखित "दि फिटिंग ऑफ ग्रोथ कर्व्स" जो आस्कर कैम्पथान, एट अल द्वारा सम्पादित *स्टैटिस्टिक्स एण्ड मैथेमैटिक्स इन बायोलॉजी*, दि आयोवा स्टेट कालेज प्रेस, आमेस, आयोवा, 1954, पृष्ठ 119—132, मे दिये गए है।



चार्ट 13 13 1820—1960 मे महाद्वीपीय सयुक्त राज्य की जनसख्या, तथा उपनति जैसा कि वृद्धिघाती वक्र के द्वारा दिखाया गया है। वक्र के सामान्य रूप का प्रदर्शन करने के लिए वृद्धिघाती वक्र को बढ़ाया गया है। ध्यान दीजिये कि इस चार्ट का व्युत्क्रम उर्ध्वाधर पैमाना है और पैमाने के ऊपरी भाग के दबाव के कारण, प्रेक्षित आँकड़ो का वक्र और उपनति रेखा वस्तुतः आरम्भ में मिलती है। सारणी 13 6 के आँकड़े।

का न्यूनतम वर्ग के लिए तीन दसवर्षीय अवधि की औसतों का प्रयोग किया गया था, अंकगणितीय माध्य की अपेक्षा गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया गया था, क्योंकि जनसंख्या की वृद्धि अंकगणितीय अभिवर्धन की अपेक्षा गुणोत्तर अभिवर्धन के अधिक निकट है। n का मान 6 है और वर्षों की संख्या x_0 से x_1 तक या x_1 से x_2 तक है। सारणी 13.6 में प्रदर्शित y_0, y_1 और y_2 मानों का प्रयोग करते हुए हम k, a, तथा b के मानों को निम्न प्रकार से प्राप्त करते हैं :

$$k=\frac{2y_0y_1y_2-y_1^2(y_0+y_2)}{y_0y_2-y_1^2},$$

$$=\frac{2(12.9)(62.1)(152.7)-(62.1)^2(12.9+152.7)}{(12.9)(152.7)-(62.1)^2},$$

$$=208.827$$

$$a=\text{लघु}\,\frac{k-y_0}{y_0}$$

$$=\text{लघु}\,\frac{208.827-12.9}{12.9}=\text{लघु}\,15.188140,$$

$$=1.181505$$

$$b=\frac{1}{n}\,\text{लघु}\,\frac{y_0(k-y_1)}{y_1(k-y_0)},$$

$$=\frac{1}{6}\left[\text{लघु}\,\frac{12.9(208.827-62.1)}{62.1(208.827-12.9)}\right]=\frac{1}{6}\,\text{लघु}\,0.15556570,$$

$$=\frac{1}{6}(9.19191396-10)=\frac{1}{6}(-0.80808604),$$

$$=-0.1346810$$

उपनति समीकरण

$$Y_c=\frac{208.827}{1+10^{(1.181505-0.134681X)}}$$

मूलबिन्दु 1830, X इकाइयाँ, 10 वर्ष।

इस वृद्धिमान समीकरण के उपनति मानों के परिकलन को सारणी 13.6 के अंतिम पांच स्तम्भों में दिखाया है। प्रविधि पहले

$$\mu=10^{a+bX}$$

लिखने की ताकि

$$Y_c=\frac{k}{1+\mu}.$$

हमारे समीकरण मे

$$\mu = 10^{(1.181505 - 0.134681X)}$$

तथा

$$\text{लघु } \mu = (\text{लघु } 10)(1.181505 - 0.1346810X),$$
$$= 1.0(1.181505 - 0.134681X),$$
$$= 1.181505 - 0.134681X$$

μ के मानो को सारणी 13.6 के स्तम्भ 6, 7, और 8 मे प्राप्त किया जा सकता है। इस सारणी के स्तम्भ 9 में $1+\mu$ के मान दिखाए गए हैं और Y_c मानो को स्तम्भ 10 मे प्राप्त किया गया है। क्योंकि वक्र को अवश्यमेव तीन चुने हुए बिन्दुओ मे से होकर जाना चाहिए अत. 1830, 1890, और 1950 के Y_c मानो की Y_0, Y_1, तथा Y_2 मानो के साथ तुलना करते हुए परिकलन की जाच की जा सकती है। सारणी 13.6 के स्तम्भ 10 मे पड़ताल सकेत यह बताते है कि सगति विद्यमान है।

उपनति मान चार्ट 13.12 तथा 13.13 मे आरेखित किए गए है, तथा वक्र के मूलभूत आकार को अधिक स्पष्ट रूप से दिखाने के लिए उपनति को दोनो दिशाओ में बढाया गया है। ध्यान दीजिए कि प्रेक्षित आकडो और उपनति मे सगति प्राय इतनी निकट है कि दोनो मे भेद कर सकना बडा कठिन है। यह भी ध्यान दीजिए कि चार्ट 13.13 मे व्युत्क्रम ऊर्ध्वाधर पैमाने का प्रयोग किया गया है और इस चार्ट मे वृद्धिघाती वक्र देखने मे सशोधित चरघाताकी वक्र के बिल्कुल समान है।

वृद्धिघाती वक्र का वर्णन 1838 मे किया गया था और बाद मे पी० एफ० वरहल्स्ट द्वारा उसकी अधिक पूर्णता के साथ व्याख्या की गई थी। 1920 मे इसे रेमन्ड पर्ल तथा लॉवेल जे० रीड द्वारा स्वतन्त्र रूप से विकसित किया गया। इसे प्राय पर्ल-रीड वक्र के नाम से पुकारा जाता है। पर्ल तथा रीड ने सफेद चूहे तथा मेटक की पूछ, एक पौष्टिक घोल मे खमीर कोशिकाओ की सख्या, एक बोतल मे फल मक्खियो की सख्या (सीमित खाद्य पूर्ति पर), और इन सबमे सबसे अधिक रुचिकर, एक भौगोलिक क्षेत्र मे मनुष्य मात्र की सख्या के विकास का वर्णन करने के लिए वक्र का प्रयोग किया है। प्रत्येक अवस्था मे मापा गया तत्त्व प्राणी अगो मे कोशिकाओ की सख्या या एक क्षेत्र मे व्यक्तियो की सख्या अर्थात् जनसख्या की वृद्धि है। वृद्धि के नियम की, जिसका वृद्धिघाती वक्र वर्णन करता है, पर्ल ने निम्नलिखित व्याख्या की है [9]

> क्षेत्र की दृष्टि से सीमित ब्रह्माण्ड मे वृद्धि की मात्रा, जो समय की किसी एक विशेष इकाई पर विकास के अकेले चक्र के किसी बिन्दु पर होती है, दो वस्तुओ की सानुपातिक है, अर्थात् (क) स्वतन्त्र आकार जिसे पहले ही विचाराधीन इकाई अन्तराल के प्रारम्भ मे प्राप्त कर लिया गया था, तथा (ख) विकास की पुष्टि के लिये वास्तविक तथा सम्भावित स्रोतो के निर्दिष्ट ब्रह्माण्ड (या क्षेत्र) मे अभी तक अप्रयुक्त या अनुत्सर्जित मात्रा।

---

9 रेमन्ड पर्ल द्वारा लिखित, दि बायालाजी ऑफ पापुलेशन ग्रोथ, एल्फ्रेड ए० नोफ, न्यूयार्क, 1925, पृष्ठ 22।

मानव जनसंख्या के संबन्ध में, हो सकता है नया विकास प्रायः जीवन निर्वाह के उपलब्ध साधनों को बढ़ा दे और विकास के नए चक्र को बनने दे। उदाहरण के लिये, मनुष्य जाति शिकार की अवस्था, कृषि की अवस्था और उद्योग की अवस्था से गुज़रे। तब प्रत्येक सांस्कृतिक युग का वर्णन पुराने वृद्धिघाती वक्र पर नए वृद्धिघाती वक्र को रख कर किया जा सकता है। इस प्रकार

$$Y_c = k_1 + \frac{k_2}{1+10^{a+bX}}$$

एक ऐसे वक्र का वर्णन करता है जिसमें k_1 नई निम्न सीमा है और k_1+k_2 नई उच्च सीमा। इस समीकरण में k_1 पहले वृद्धिघाती वक्र के उच्च बिन्दु k_0 से नीचे है और उस मान की ओर संकेत करता है जिस पर पहले उच्च सीमा में बाधा पड़ी थी।

स्पष्टतया आप्रवास और मानव संस्थाओं की धाराएँ वक्र के मूलभूत आकार को परिवर्तित नहीं करतीं यद्यपि वे इसके ढाल की तीक्ष्णता में कुछ हेर-फेर कर सकती हैं। यह भी हो सकता है कि विकास सममित न हो नति परिवर्तन बिन्दु को ऊपरी तथा निम्न अनन्तस्पर्शी के मध्य होने की आवश्यकता नहीं और न ही वक्र के दो भागों का आकार समान होना आवश्यक है।

$$Y_c = \frac{k}{1+10^{a+bX+cX^2}}$$

लिख कर पहले सूत्र में थोड़ा सा सुधार करके विषमतल वृद्धिघाती का प्राप्त किया जा सकता है।

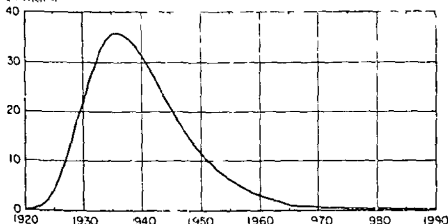
तथापि रेमन्ड पर्ल के सिद्धान्त को सार्वजनीन रूप से नहीं माना गया है। कुछ तर्क देते हैं कि यद्यपि वृद्धिघाती वक्र एक बोतल में फल मक्खियों की संख्या के लिये पर्याप्त उपयुक्त है परन्तु इसका मानव-समाज में विस्तार अनुचित है। मनुष्यों के पास अपना वातावरण को परिवर्तित करने तथा विवेकपूर्वक पुनरुत्पत्ति की दर को नियन्त्रित करने की शक्ति होती है और वे इस शक्ति का प्रयोग करते हैं।

एक लाभ जिसके लिए कभी-कभी वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग किया जाता है, भावी जनसंख्या के आकार की पूर्वकल्पना करना है। केवल मात्र वक्र के विस्तार पर आधारित पूर्वकल्पनाओं की उपयोगिता सन्दिग्ध है, क्योंकि उनमें किसी श्रेणी पर अन्तर्निहित प्रभावों में से किसी महत्त्वपूर्ण परिवर्तन की कल्पना नहीं होती।[10] 1970 के लिये हमारे वृद्धिघाती वक्र का बताया हुआ उपनति मान 1744 लाख है, जो स्पष्ट ही बहुत नीचा है। जब विश्वस्त अभिलेख विद्यमान न हों, तो पूर्व वर्षों की जनसंख्या का अनुमान लगाने के लिए ऐसी उपनति का भी प्रयोग किया जा सकता है, जैसी हमने आसंजित की है। इस प्रकार आजकल के महाद्वीपीय संयुक्त राज्य की जनसंख्या का हमारे समीकरण से अनुमान लगाया जा सकता है, जो 1790 में लगभग 39 लाख थी। 1790 के लिए अधिक अच्छा अनुमान उस समय मिल सकता था यदि हमने वृद्धिघाती समीकरण के स्थिरांकों का निर्धारण करते हुए 1800 और 1810 को सम्मिलित किया होता।

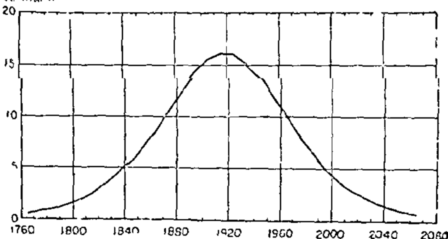
---

10 देखें, अध्याय 5 में पाद-टिप्पणी 5।

गॉम्पर्त तथा वृद्धिघाती वक्रो की तुलना—इस रूप में गाम्पत तथा वृद्धिघाती वक्र एक से है कि बढती हुई श्रेणी जोकि विकास की गिरती हुई प्रतिशतता से बढ रही है, या गिरती हुई श्रेणी जोकि पतन की घटती हुई प्रतिशतता से घट रही है का वर्णन दोनो के द्वारा किया जा सकता है। वे इस बात मे भिन्न हैं कि गाम्पर्त वक्र के अन्तगत लघु Y_c मानो के उत्तरोत्तर प्रथम अन्तरो का एक समान अनुपात आता है जबकि वृद्धिघाती वक्र मे $\frac{1}{Y_c}$ मानो के उत्तरोतर प्रथम अन्तरो के समान अनुपात का समावश होता है।



चार्ट 13 14 क 1920—1990 मे आइस क्रीम के स्वदेशीय उत्पादन के गाम्पत उपनति मानो के प्रथम अन्तर।



चार्ट 13 14 ख 1770—2070 मे महाद्वीपीय संयुक्त राज्य की जनसंख्या के लिए वृद्धिघाती उपनति मानों के प्रथम अन्तर।

श्रेणी के उन प्रकारो के लिये जिनमे इन वक्रो का प्रयोग करने मे हमारी रुचि है दोनों के ऊपरी तथा निम्न अनन्तस्पर्शी हैं।

गाम्पर्ज वक्र के उपनति मानो के प्रथम अन्तर एक ऐसा वक्र बनाते है जो विषम बारम्बारता बटन के साथ मिलता-जुलता है, जैसा कि चार्ट 13.14 के भाग क मे दिखाया गया है। वृद्धिघाती वक्र के उपनति मानो के प्रथम अन्तर, जिस प्रकार का यहाँ वर्णन किया गया है, एक ऐसे वक्र की रचना करते हैं जो प्रसामान्य बारम्बारता बटन से मिलता-जुलता है (देखें अध्याय 23), जैसे चार्ट 13.14 के भाग ख मे दिखाया गया है। वृद्धिघाती वक्र की इस विशेषता के कारण, यह देखने के लिये कि क्या उपनति ऋजु रेखा दृष्टिगोचर होती है, प्रेक्षित आँकडो को कई बार अकगणितीय सम्भावना-पत्र[11] (देखें, चार्ट 23.9 तथा उसके साथ का विवरण) पर आरेखित किया जाता है। यदि ऐसा है, तो वृद्धिघाती वक्र को आसंजित किया जा सकता है।

गाम्पर्ज वक्र को जब अर्ध-लघुगणकीय पत्र पर आरेखित किया जाता है, तो उसका रूप एक संशोधित चरघातांकी वक्र का होता है, और जब व्युत्क्रम ऊर्ध्वाधर पैमाने और अकगणितीय क्षैतिज पैमाने द्वारा (वैकल्पिक रूप से, $\frac{1}{Y_c}$ और X को अकगणितीय पत्र पर आरेखित किया जा सकता है) एक ग्रिड पर आरेखित किया जाता है, तो वृद्धिघाती वक्र का रूप संशोधित चरघातांकी वक्र का होता है।

उपनति प्ररूप का चयन

इस अध्याय मे तथा पूर्वगामी अध्याय मे उपनतियों के उन प्रकारो का, जिनका उपयोग किया जा सकता है विस्तृत वर्णन करने का प्रयत्न नहीं किया गया है। तथापि, काल-श्रेणी विश्लेषण की अधिकाश आवश्यकताओ की पूर्ति के लिए, पर्याप्त विविधता प्रदान की गई है। इतनी अधिक संख्या मे प्राप्य उपनति प्ररूपो से कोई व्यक्ति कैसे निर्णय कर सकता है कि वह किसे चुने? प्रथम, उपनति प्ररूप उन शक्तियो के व्यवहार के अनुरूप होना चाहिये जिनको मापने का प्रयास हम करते हैं। यदि एकमात्र उद्देश्य चक्रीय विचलनों को प्राप्त करना हो, तो उपनति को प्रत्येक चक्र के लगभग मध्य से गुजरना चाहिये। यदि पूर्वानुमान के उद्देश्य से उपनति को बढाने की इच्छा की जाए तो उपनति तथा इसके विस्तार को तर्कशास्त्र द्वारा निर्दिष्ट आशाओ के अनुरूप होना चाहिए। उदाहरणार्थ, यदि श्रेणी ऐसी है कि तार्किक आधार पर उसके समतल होने की आशा की जा सकती है, तो एक अनन्तस्पर्शी वक्र को चुन लिया जाना चाहिये। जब एकमात्र उद्देश्य ऐतिहासिक अध्ययन करना हो तो वक्र का भावी व्यवहार इतना महत्त्वपूर्ण नहीं होता।

यह निर्णय करने के लिये कि कौनसे उपनति प्ररूप का प्रयोग किया जाए, पहला पग सदैव अकगणितीय-पत्र पर प्रेक्षित आँकडो को आरेखित करना होना चाहिए और फिर, यदि उपनति एकघात नहीं है, अपितु या तो (1) ऊर्ध्वगामी और अवतल ऊर्ध्वगामी

---

11 इसमे (1) एक अनन्तस्पर्शी की कल्पना और (2) आरेखित करने से पूर्व प्रेक्षित आँकडो की अनन्तस्पर्शी के प्रतिशतो के रूप मे अभिव्यक्ति, का समावेश है। एक से अधिक अनन्तस्पर्शियो का परीक्षण किया जा सकता है।

है या (2) निम्नगामी और अवतल ऊर्ध्वगामी है, तो अर्ध-लघुगणकीय पत्र पर प्रेक्षित आँकडो को आरेखित करना चाहिए। आरेखित आँकडो का परीक्षण उपनति के प्रयोज्य प्ररूप का निश्चय करने के लिये प्राय उपयुक्त आधार प्रदान करेगा। जब आगे मार्ग-दर्शन की आवश्यकता हो तो निरीक्षण द्वारा लगभग सन्निकट उपनति आरेखित की जा सकती है तथा सरल किए गए वक्र पर निम्न परीक्षण लागू किए जा सकते है।

1. यदि प्रथम अन्तरो की प्रवृत्ति स्थिराक होने की हो तो ऋजु रेखा का प्रयोग करो।

2 यदि द्वितीय अन्तरो की प्रवृत्ति स्थिराक होने की हो तो द्वितीयाश वक्र का प्रयोग करो।

3. यदि प्रथम अन्तरो की अचर प्रतिशतता मे गिरने की प्रवृत्ति हो तो एक सशोधित चरघाताकी का प्रयोग करो।

4 यदि सन्निकट उपनति, जब उसे अकगणितीय पत्र पर आरेखित किया जाता है, एक ऋजु रेखा हो, तो ऋजु रेखा का प्रयोग करो।

5. अर्ध-लघुगणकीय पत्र पर आरेखित किये जाने पर यदि सन्निकट उपनति एक ऋजु रेखा हो तो एक चरघाताकी वक्र का प्रयोग करो।

6. अर्ध-लघुगणकीय पत्र पर आरेखित किये जाने पर, यदि सन्निकट उपनति एक सशोधित चरघाताकी प्रतीत हो, तो गाम्पर्ट वक्र का प्रयोग करो।

7 यदि सन्निकट उपनति जब उसे व्युत्क्रम उर्ध्वाधर पैमाने तथा अकगणितीय क्षैतिज पैमाने द्वारा ग्रिड पर आरेखित किया जाता है, सशोधित चरघाताकी से मिलता-जुलता है, तो वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग करो। वैकल्पिक रूप से, $\frac{1}{Y_c}$ तथा X को अकगणितीय ग्रिड पर आरेखित किया जा सकता है।

8. यदि प्रथम अन्तर विषम बारबारता वक्र से मिलते-जुलते हो, तो गाम्पर्ट वक्र का या यहाँ वर्णित वक्र की अपेक्षा अधिक सम्मिश्र वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग करो।

9 यदि प्रथम अन्तर एक प्रसामान्य बारम्बारता वक्र से मिलते-जुलते हो, तो वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग करो।

10. यदि लघुगणको के प्रथम अन्तर अचर है तो चरघाताकी वक्र का प्रयोग करो।

11 यदि लघुगणको के द्वितीय अन्तर अचर है, तो लघुगणको के साथ द्वितीयाश वक्र आसजित करो।

12 यदि लघुगणको के प्रथम अन्तर एक अचर प्रतिशतता से परिवर्तित हो रहे हो, तो गाम्पर्ट वक्र का प्रयोग करो।

13 यदि व्युत्क्रमो के प्रथम अन्तर अचर प्रतिशतता से परिवर्तित हो रहे है, तो वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग करो।

14 यदि सन्निकट उपनति मान (या मूल आँकडे), जब उन्हें चुने हुए अनन्त-स्पर्शी की प्रतिशतताओ के रूप मे अभिव्यक्त किया जाता है, अकगणितीय सम्भावना पत्र पर रैखिक दृष्टिगोचर होते हैं, तो वृद्धिघाती वक्र का प्रयोग करो।

कभी-कभी ऐसी श्रेणियाँ मिलती है जो समय के एक भाग मे एक प्रकार की उपनति रखती हुई दृष्टिगोचर होती है और समय के दूसरे भाग मे उनी अथवा भिन्न प्रकार की भिन्न उपनति रखती है। उपनति मे परिवर्तन अधिकतर 1930 के आसपास हुए लगते हैं।

अनेक उपनतियाँ जिनमे से प्रत्यक मे स्थिराको की सख्या समान हो, आँकडो की श्रेणी के लिये कठिनाई से ही समान रूप से उपयुक्त दृष्टिगोचर होती हैं। ऐसी अवस्था मे, उसी एक को प्राथमिकता दी जानी चाहिए जिससे Y मानो के वर्गित विचलन निम्नतम हो। इस प्रकार की तुलना करते समय, Y मानो के साथ आसजित वक्रो की लघु Y मानो से आसजित वक्रो के साथ तुलना नही करनी चाहिये।

कभी कभी, पहले वर्णित सहायताओ मे से कोई भी निर्णय करने के योग्य नही बनाएगी कि कौन-से उपनति प्ररूप का प्रयोग किया जाए। यह इसलिए हो सकता है कि सन्निकट उपनति को उचित रूप से नही चुना गया था। या, ऐसा हो सकता है कि श्रेणी किसी सरल गणितीय विवरण के अनुरूप न हो। गतिशील विश्व मे, कार्य कर रही शक्तियाँ अन्य कारकों के प्रभाव डालने से पूर्व, विरले ही अपना पूर्ण प्रभाव डाल पाती हैं। परिणामत, कोई भी उपनति प्ररूप, केवल अपेक्षतया लघु काल के लिये उपयुक्त हो सकता है।

14

काल-श्रेणी का विश्लेषण :

आवर्ती गतियाँ I—स्थिर ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप

जैसाकि अध्याय 11 म संकेत किया गया है, आवर्ती गतियां बहुत प्रकार की हैं, जिनमें वे भी सम्मिलित हैं जो अपने आपको दिन सप्ताह, मास, अथवा वर्ष म दोहराती हैं। इस अध्याय म सबसे अधिक ध्यान वर्ष के भीतर की उन मासिक गतियो की ओर दिया जाएगा जो साधारणतया ऋतुनिष्ठ गतियों के नाम से प्रसिद्ध हैं। निर्धारित सिद्धान्तों का विभिन्न अन्य आवर्ती गतियो के प्ररूपो पर सुगमता से अनुप्रयोग किया जा सकता है। इस विवरण की योजना यह है कि उन आकडो से प्रारम्भ किया जाए जिनका निरूपण बहुत सरल है तथा धीरे धीरे आवश्यकतानुसार सम्मिश्र विधियों का परिचय कराया जाए। तथापि, उन ऋतुनिष्ठ गतियो का विचार, जिनके प्रतिरूप वर्षानुवर्ष बदलते रहते हैं, अगले अध्याय मे किया जाएगा। सामान्यतया किसी न किसी रूप म, सभी विधियों में औसतें निकालने की आवश्यकता पडती है पहले विभिन्न जनवरी मासो के मानो की, फिर विभिन्न फरवरी के मासों की इत्यादि परन्तु उनम मुख्यत उसी मात्रा म भेद होता है जिस मात्रा मे औसत निकाले जाने से पूर्व आंकडो का परिष्कृत किया जाता है।

एक परिचयात्मक दृष्टान्त

असमंजित आंकड़ों की औसतें—जब आकडो मे किसी सराहनीय सीमा तक चक्रीय गतियाँ या उपनति नही होती तो किसी पूर्व समजन के बिना आंकडो की औसत निकालना पर्याप्त होगा। इस प्रकार के आकडो का उदाहरण है उन पुस्तको की सख्या जो 1965 के वसन्त-सत्र के मध्य रुगर्स विश्वविद्यालय के पुस्तकालय के मुख्य निर्गम पटल पर घर पर प्रयोग के लिये ली गई तथा नवीकृत कराई गई। आंकडे सारणी 14 1 मे दिखाए गए हैं जिनमे से वे सप्ताह निकाल दिए गए हैं, जिनमे अवकाश हुआ जैसे उदाहरण के लिए ईस्टर अवकाश का सप्ताह। आंकडो के प्रत्येक स्तम्भ के नीचे उस स्तम्भ की औसत दी गई है। औसतें, सप्ताह के प्रत्येक दिन के लिय, पुस्तको के सचार मे अन्तर्सप्ताह घटा-बढी का एक माप हैं। तथापि, सुविधा के लिये, यह वाञ्छित हो सकता है कि इस माप को प्रतिशतता के रूप मे व्यक्त किया जाए। छ दैनिक औसतो मे से प्रत्येक को उन छ औसतो की औसत से भाग करके (जो सारे काल के लिये प्रतिदिन की औसत है) और छ दैनिक औसतों म से प्रत्यक को प्रतिशतता के रूप मे व्यक्त करके, हम उन सूचकांक को प्राप्त करते हैं जिसे सारणी 14 1 की अन्तिम पंक्ति मे दिखाया गया है।

सारणी 14 1

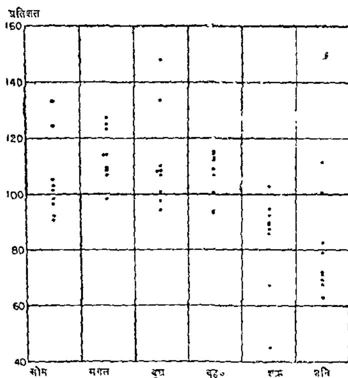
असमजित आंकडो की औसतों का प्रयोग करते हुए, बसन्त सत्र 1965 मे, रुगर्स विश्वविद्यालय के पुस्तकालय के मुख्य निर्गम पटल पर ली गई तथा नवीकृत कराई गई पुस्तकों की सख्या के अन्तसप्ताह विचरण के सूचकाक का परिकलन

सप्ताह प्रारम्भ	सोमवार	मगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार	औसत प्रतिदिन
फरवरी 8	665	748	722	734	604	456	654 8
फरवरी 15	701	787	686	822	649	730	729 2
फरवरी 22	1,000	939	816	703	506	535	749 8
मार्च 1	642	612	792	712	277	691	621 0
मार्च 8	862	794	700	739	607	470	695 3
मार्च 15	597	819	627	703	609	510	644 2
अप्रैल 5	754	884	1 224	777	744	603	831 0
अप्रैल 12	696	765	748	703	714	578	700 7
अप्रैल 19	834	979	862	906	675	498	792 3
समान्तर माध्य	750 1	814 1	797 4	755 4	598 3	563 4	713 1
सूचकाक	105 2	114 2	111 8	105 9	83 9	79 0	100 0

आंकड, रुगर्स विश्वविद्यालय के पुस्तकलय के मुख्य निगम पटल से ।

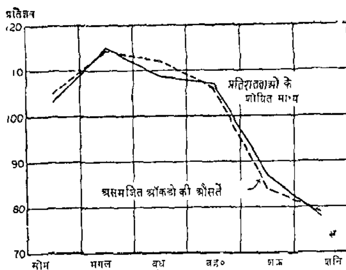
सरल औसतो की प्रतिशतताएँ—नौ सप्ताहो के प्रतिदिन के औसत सचार के आंकडो पर एक दृष्टि, जिसे सारणी 14 1 के अन्तिम स्तम्भ मे दिखाया गया है, यह स्पष्ट करती है कि क्रियाशीलता कुछ सप्ताहो मे दूसरो की अपेक्षा महत्तर है। सारणी 14 1 मे गृहीत प्रक्रिया, कम सचार वाले सप्ताहो द्वारा की गई चेष्टा की अपेक्षा, अधिक सचार वाले सप्ताहो की दैनिक औसतो और उसी प्रकार अभिसूचका पर अधिक भार डालने की चेष्टा करने की अनुमति प्रदान करती है। तत्काल यह सोचा जा सकता है कि इस प्रकार का फालतू भार बहुत अधिक अपेक्षित है परन्तु यह स्मरण रखना चाहिये कि हम विशेष प्रकार के प्रतिरूप का निर्धारण करने का प्रयास कर रहे है और यह आवश्यक नही है कि अधिक सचार वाले सप्ताह विशेष प्रतिरूप वाले सप्ताह भी हो। यदि निर्दिष्ट सप्ताह के प्रत्येक दिन के आंकडो को उस सप्ताह के लिए औसत की प्रतिशतताओ के रूप म व्यक्त किया जाए, जैसाकि सारणी 14 2 मे है, तो अन्तर्सप्ताह घटा-बढी के सूचकाक का निर्धारण करने के लिये प्रत्येक सप्ताह बराबर महत्त्व का होगा। इसके अतिरिक्त, आंकडो को प्रतिशतता के रूप मे रख कर, हम प्ररूपी साप्ताहिक प्रतिरूप से अधिक शीघ्रता से अनिश्चित घटा-बढी का पता लगा सकते हैं। प्रत्येक दिन के ऐसे प्रतिशतता आकडो का अध्ययन समान्तर माध्य की अपेक्षा किसी अन्य औसत के चयन की ओर ले जा सकता है। इस प्रकार, प्रस्तुत उदाहरण मे,

सारणी 14 2 के प्रतिशतता आँकडा को सारणी 14 3 मे और चार्ट 14.1 मे सरणियो मे रखा गया है। चार्ट 14.1 से यह स्पष्ट है कि आवर्ती गति विद्यमान है। यह भी स्पष्ट है कि कुछ एक चरम मान हैं जो सामान्य प्रतिरूप मे आभाजित नही होते। प्रत्येक दिन के लिये माध्यिका का प्रयोग करके इस प्रकार की चरमताओ के प्रभाव को काफी कम किया जा सकता है, या, प्रत्येक दिन के मानो के केन्द्रीय समूह के समान्तर माध्य का प्रयोग करके चरम मानो का उन्मूलन किया जा सकता है। सारणी 14 3 मे प्रत्येक दिन के लिए माध्य के सात मानो की औसत दिखायी गयी है। क्योंकि ये छ अंक सशोधित माध्य है, इसलिये



चार्ट 14 1 वसन्त सत्र 1965 मे रूगर्स विश्वविद्यालय पुस्तकालय के मुख्य निगम पटल मे घर पर उपयोग के लिये ली गई तथा नवीकृत कराई गई पुस्तको की सख्या की प्रत्येक सप्ताह की दैनिक औसतो की प्रतिशतताओ की सरणियाँ। सारणी 14 3 के आँकडे।

इनकी औसत ठीक 100 0 नही है। इसके स्थान पर उनकी औसत 99 6 है और सारणी 14 3 की अन्तिम पक्ति मे दिखाए गए सूचकांक को प्राप्त करने के लिये उनमे से प्रत्येक को 99.6 से भाग करके तथा 100 से गुणा करके औसत 100 0 करने के लिये उनका समजन कर लिया जाता है। सारणी 14 1 और 14 3 के सूचकांको को चार्ट 14 2 मे दिखाया गया है। वे बहुत अधिक भिन्न नही हैं, क्योंकि महत्त्व मे नौ सप्ताह बहुत अधिक भिन्न नही हैं।



चार्ट 14.2 वसन्त सत्र 1965 मे रूगर्स विश्वविद्यालय पुस्तकालय के मुख्य निगम पटल से घर पर प्रयोग के लिये ली गई तथा नवीकृत कराई गई पुस्तको की सख्या के अन्तर्सप्ताह घटा-बढी के सूचकाक । आँकड़े सारणी 14.1 तथा 14.3 से ।

सारणी 14.2

वसन्त सत्र 1965 मे रूगर्स विश्वविद्यालय पुस्तकालय के मुख्य निर्गम पटल से घर पर प्रयोग के लिये ली गई तथा नवीकृत कराई गई पुस्तको की सख्या की प्रत्येक सप्ताह की दैनिक औसतो की प्रतिशतताएँ ।*

(प्रत्येक सप्ताह की दैनिक औसतो को सारणी 14.1 के अन्तिम स्तम्भ मे दिखाया गया है ।)

सप्ताह प्रारम्भ	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार
फरवरी 8	101 6	114 2	110.3	112 1	92 2	69.6
फरवरी 15	96.1	107 9	94 1	112 7	89 0	100 1
फरवरी 22	133 4	125 2	108 8	93 8	67 5	71 3
मार्च 1	103 4	98 6	127 5	114 7	44 6	111.3
मार्च 8	124.0	114 2	100 7	106 3	87 3	67 6
मार्च 15	92.7	127 1	97 3	109.1	94 5	79 2
अप्रैल 5	90 7	106 4	147.3	93 5	89 5	72.6
अप्रैल 12	99 3	109 2	106 8	100 3	101 9	82 5
अप्रैल 19	105 3	123 6	108 8	114 4	85 2	62 9

* प्रत्येक पक्ति की औसत 100 0 है ।
सारणी 14 1 के आँकडो पर आधारित ।

सारणी 14 3

वसन्त सत्र 1965 मे रूगर्स विश्वविद्यालय पुस्तकालय के मुख्य निर्गम पटल से घर पर प्रयोग के लिये ली गई तथा नवीकृत कराई गई पुस्तको की संख्या के, प्रत्येक सप्ताह के लिये दैनिक औसत की प्रतिशतताओ का प्रयोग करते हुए, अन्तसप्ताह घटा-बढी के सूचकाक का परिकलन

क्रम	सोमवार	मगलवार	बुधवार	बृहस्पति-वार	शुक्रवार	शनिवार	औसत
1	133 4	127 1	147 3	114 7	101 9	111 3	.
2	124 0	125 2	127 5	114 4	94 5	100 1	...
3	105 3	123 6	110 3	112 7	92 2	82 5	. .
4	103 4	114 2	108 8	112 1	89 5	79 2	. .
5	101 6	114 2	108 8	109 1	89 0	72 6	...
6	99 3	109 2	106 8	106 3	87 3	71 3	...
7	96 1	107 9	100 7	100 3	85 2	69.6	..
8	92 7	106 4	97 3	93 8	67 5	67 6	
9	90 7	98 6	94 7	93 5	44 6	62 9	. .
मध्य के सात	103 2	114 4	108 6	107 0	85 5	77 6	99 6
सूचकाक माध्य का	103 6	114 9	109 1	107 5	86 9	78 0	100 0

सारणी 14 2 के आँकडे ।

मासिक आँकड़ों के ऋतुनिष्ठ सूचकांक

ऋतुनिष्ठ सूचकाक, एक श्रेणी की प्रगती अन्त वर्षीय गति को दिखाते हुए, साधारणतया मासिक आँकडो पर आधारित होते है, किन्तु ऐसे सूचकाक को साप्ताहिक[1] आँकडो से बनाया जा सकता है। जबकि ऋतुनिष्ठ सूचकाक को दैनिक आँकडो से बनाया जा सकता था, तो भी सूचकाक द्वारा ऋतुनिष्ठ विचरण को तथा अन्तर्मासिक एव अन्त साप्ताहिक गतियो को प्रतिबिम्बित करने की सम्भावना होगी। इस पुस्तक मे हम मासिक आकडो से प्राप्त ऋतुनिष्ठ सूचकाको पर ही अपना ध्यान एकाग्र करगे।

ऋतुनिष्ठ सूचकाक का परिकलन प्रारम्भ करने से पूर्व, यह निश्चय कर लेना चाहिये कि श्रेणी मे ऋतुनिष्ठ गति विद्यमान है। आकडा द्वारा प्रस्तुत विषय सामग्री के द्वारा अनुभव से यह स्पष्ट हो सकता है। सारणी 14 1 के पुस्तक-सचार आँकडो के सम्बन्ध मे पुस्तकालय-अध्यक्षो को यह पता था कि अन्तर्सप्ताह विचरण विद्यमान थे, इसलिये

1 विधि का वर्णन मूल अंग्रेजी पुस्तक के प्रथम सस्करण के पृष्ठ 528—538 पर किया हुआ है।

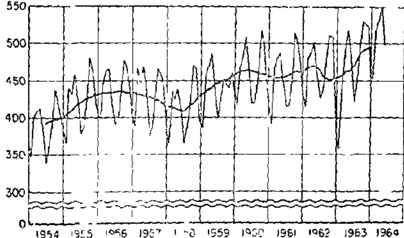
आँकडो का कोई प्रारम्भिक परीक्षण आवश्यक न था। इसी प्रकार, पाठक जानता है कि आइसक्रीम के उपभोग मे, गैसोलीन के प्रयोग म, विभाग भण्डार विक्रय तथा विभिन्न अन्य श्रेणियो मे ऋतुनिष्ठ विचरण विद्यमान रहत है। फिर भी सम्भव है कि अन्वेषक सर्वदा यह न जान पाए कि जिस श्रेणी मे वह रुचि रखता है उसकी गति ऋतुनिष्ठ है या नही, और जब तक वह स्वय आश्वस्त नहीं हो जाता कि ऋतुनिष्ठ गति विद्यमान है, तब तक यह विचारणीय है कि वह बाद मे वर्णन की जाने वाली विस्तृत गणनाओ को पूरा करे और अपने कार्य के एकदम अन्त मे यह जान कि उसके सभी सूचकाक आँकडे लगभग 100 0 थे।

यह जानने के लिये कि क्या श्रेणी मे ऋतुनिष्ठ विद्यमान है, प्राय आँकडो का वक्र खीचना, जैसाकि चार्ट 14 3 मे अपेक्षाकृत हल्की रेखा या चार्ट 14 4 जैसा चार्ट बनाना पर्याप्त होगा। कुछ दृष्टान्तो मे कच्चे आँकडो के चार्टों का परीक्षण करने से यह निश्चित करना कदाचित् सम्भव न हो कि ऋतुनिष्ठ गति विद्यमान है अथवा नही और 14 1 तथा 14.6 जैसे चार्टों को बनाने के लिए विश्लेषण के साथ बहुत आगे तक बढना आवश्यक हो सकता है। इससे पहले कि निर्णय लिया जा सके, कभी कभी 15 2 जैसे चार्टों का निर्माण अवश्य कर लेना चाहिए।

उपनति को प्रतिशतताओ पर आधारित ऋतुनिष्ठ सूचकाक—यदि मासिक आँकडो की श्रेणी चिरकालिक उपनति दर्शाती है तो पूर्व-वर्णित सरल विधियो मे से किसी एक द्वारा परिकलित ऋतुनिष्ठ सूचकाक उपनति की दिशा पर निर्भर करते हुए ऊर्ध्वगामी या अधोगामी झुकाव रखेगा। इस प्रकार यदि उपनति ऊर्ध्वगामी तथा रेखिक होती तो प्रत्येक दिसम्बर पहले की जनवरी से वार्षिक विकास के $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ भाग की मात्रा से ऊँचा होगा, चाहे कोई विशुद्ध ऋतुनिष्ठ गति उपस्थित न भी हो। इस तथ्य के कारण, ऋतुनिष्ठ सूचकाक, जिसमे केवल ऋतुनिष्ठ गतियो के प्रदर्शित होने की कल्पना है, ऊपर की ओर झुकेगा, और यदि यथार्थ ऋतुनिष्ठ गति विद्यमान हो तो दिसम्बर सूचकाक जनवरी सूचकाक की तुलना मे वार्षिक विकास के $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ से बहुत अधिक ऊँचा होगा। यह अवश्य हो सकता है कि उपनति ऊर्ध्वगामी तथा रेखिक न हो। यह अधोगामी तथा रेखिक हो सकती है, जिस दशा मे दिसम्बर अक बहुत अधिक निम्न होगा। यदि उपनति अ रेखिक हो तो सारणी 14 1 या 14 3 के समान परिकलित ऋतुनिष्ठ सूचकाक पर इसके प्रभाव का वर्णन सुगमता से नही किया जा सकता, किन्तु प्रभाव उपस्थित रहता है और प्राय अधिक होता है।

ऋतुनिष्ठ सूचकाक के परिकलन के लिये पहली वास्तविक उपयोगी प्रविधि का इस कठिनाई पर काबू पाने के लिये निर्माण किया गया था और वह आँकडो के उपनति-प्रतिशत पर आधारित थी। इस विधि मे, पहला पग आँकडो के लिये उपनति समीकरण का निर्धारण करना तथा मासिक उपनति मानो को प्राप्त करना है। तत्पश्चात्, मूल मासिक आँकडो को मासिक उपनति मानो की प्रतिशतताओ के रूप मे व्यक्त किया जाता है। इन प्रतिशतताओ को सारणी 14 3 जैसी सारणी मे रख दिया जाता है किन्तु जिसमे, प्रत्येक मास के लिये एक के हिसाब से 12 स्तम्भ होते हैं। तब बारह मासिक माध्यिकाओ या सशोधित माध्यो से ऋतुनिष्ठ सूचकाक प्राप्त किया जाता है, ठीक जिस प्रकार सारणी 14 3 की अन्तिम दो पक्तियो मे प्राप्त किया गया है।

उपनति-प्रतिशत विधि चक्रीय उतार-चढ़ावों के बाधक प्रभाव की उपेक्षा करती है। चक्रों की ऊँचाइयाँ और निचाइयाँ चार्ट 14.1 जैसे चार्ट में चरमता-बिन्दुओं के रूप में दृष्टिगोचर होंगी, परन्तु उनमें छः की अपेक्षा बारह सरणियाँ होंगी। यह विधि औसत-प्रक्रिया पर निर्भर करती है, अर्थात् चक्रीय उतार-चढ़ावों के प्रभाव का निरसन करने के लिये, माध्यिका या संशोधित माध्य के प्रयोग पर निर्भर करती है। वर्तमान समय में, यह बहुत विस्तृत रूप से प्रयुक्त होने वाली विधि नहीं है, परन्तु इसका उपयोग उन श्रेणियों में किया जा सकता है जिनमें चक्रीय गतियाँ हों जो ऋतुनिष्ठ गतियों की तुलना में महत्त्वहीन हैं।

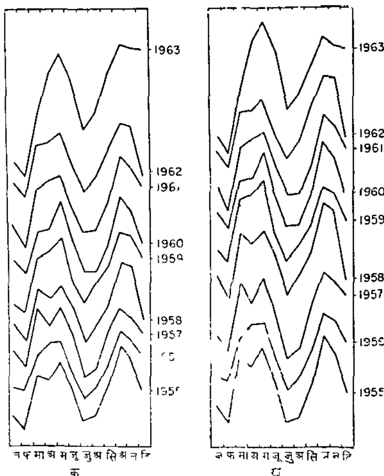


चार्ट 14.3 संयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा जनवरी 1954--दिसम्बर 1964 में समाचारपत्रीय, कागज़ का उपभोग तथा बारह-मास की केन्द्रित गतिशील औसत। सारणी 14.5 के आँकड़े।

केन्द्रित 12 मास गतिशील औसतों की प्रतिशतताएं—जिन आँकड़ों का उपयोग हम एक ऋतुनिष्ठ सूचकांक के निर्धारण के वर्णन में करेंगे जो वर्षानुवर्ष नहीं बदलता उनका सम्बन्ध संयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा समाचारपत्रीय कागज के उपभोग से होगा। चार्ट 14.3 और 14.4 इस बात को स्पष्ट करते हैं कि ऋतुनिष्ठ गति उपस्थित है और वह वर्षानुवर्ष लगभग समान है। चार्ट 14.4 को एक "वर्ष पर वर्ष" चार्ट का नाम दिया जा सकता है क्योंकि प्रत्येक वर्ष को स्वेच्छा से पिछले वर्ष के ऊपर रखा गया है, प्रत्येक वर्ष के लिये वक्र उसी ऊर्ध्वाधर पैमाने पर, परन्तु भिन्न स्तर पर, आरेखित किया गया है।

समाचारपत्रीय कागज-उपभोग के आँकड़ों का कैलेन्डर विचरण के लिये समजित नहीं किया गया है। यह समजन न करने का कारण यह है कि प्रकाशित आँकड़े इस प्रकार समजित नहीं हैं। यदि कैलेन्डर दिवसों के लिये समजित आँकड़ों से ऋतुनिष्ठ सूचकांक बनाना होता तो सभी मासिक अंकों, जिनमें वे भी सम्मिलित हैं जो नवीन दिखाई देते हैं, का समजन करना पड़ता पूर्व इसके कि उनकी प्रकृति ऋतुनिष्ठ गति से तुलना की जा सकती। इस प्रकार के आँकड़ों का प्रयोग करने वाले प्रायः प्रतिदिन के अंकों की अपेक्षा मासिक अंकों में अधिक रुचि रखते हैं कई बार मास की लम्बाई के बारे में प्रकार सोचा

जाता है, जैसेकि वह प्रह्पी ऋतुनिष्ठ विचरण के प्रति अपना भाग अदा कर रही हो। ऋतुनिष्ठ विचरण के सूचकांक के परिकलन की प्रविधि वही है चाहे कैलेन्डर विचरण के लिये आँकडो का समजन किया गया हो अथवा नही।



चार्ट 14.4. वर्ष पर-वर्ष चार्ट (क) समाचारपत्रीय कागज के उपभोग तथा (ख) बारह-मास गतिशील औसत की प्रतिशतता 1954–1963, के वर्ष पर-वर्ष-चार्ट। सारणी 14.5 के आंकडे। चार्ट के प्रत्येक भाग मे, प्रत्येक वर्ष के वक्र को ठीक पहले वक्र के ऊपर रखा गया है। नौ वक्रो मे से प्रत्येक के लिए समान ऊर्ध्वाधर पैमाने के प्रयोग से, किन्तु आवश्यकतानुसार पैमाने को घटा-बढा कर, ऐसा किया गया है।

12-मास-गतिशील-औसत-प्रतिशतता विधि, जिसका सकेत साधारणतया केवल गतिशील-औसत-की-प्रतिशतता विधि (या केवल गतिशील-औसत-विधि) के रूप मे किया जाता है, का आजकल विस्तृत रूप से प्रयोग होता है। यह उपनति-की-प्रतिशतता विधि से केवल इस दृष्टि से भिन्न है कि मूल आँकडो को उपनति की प्रतिशतताओ की अपेक्षा गतिशील औसत की प्रतिशतताओ मे व्यक्त किया जाता है। केन्द्रित 12-मास गतिशील औसत का परिकलन करने मे उपनति मानो के निर्धारण की अपेक्षा अधिक काम करना पडता है, पर

इससे प्राप्त ऋतुनिष्ठ सूचकांक अपेक्षाकृत उत्तम होता है क्योंकि गतिशील औसत उपनति और चक्रीय गतियों दोनों का पर्याप्त अच्छा आकलन है।

एक 12 मास गतिशील औसत औसतों की एक श्रेणी है जो पहले एक श्रेणी के प्रथम 12 मासों को स्वीकार करती है तत्पश्चात दूसरे से तेरहवें महीने, फिर तीसरे से चौदहवें महीने, इत्यादि। अधिक यथार्थ होने के लिये आइये हम सारणी 14 4 मे दिखाए

सारणी 14 4

संयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा जनवरी 1954 से जून 1964 तक उपभोग किये गए समाचारपत्रीय कागज के केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत का परिकलन

वर्ष तथा मास (1)	उपभोग (छोटे टन सहस्रों मे) (2)	12 मास गतिशील योग (3)	12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 3 – 12 (4)	2 मास गतिशील योग (5)	केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 5 – 2 (6)
1954					
जनवरी	363				
फरवरी	346				
मार्च	400				
अप्रैल	415				
मई	422				
जून	384	4 683	390 25		
जुलाई	339	4 704	392 00	782 25	391 1
अगस्त	361	4 723	393 58	785 58	392 8
सितम्बर	388	4 762	396 83	790 41	395 2
अक्तूबर	437	4 779	398 25	795 08	397 5
नवम्बर	420	4 812	401 00	799 25	399 6
दिसम्बर	408	4 850	404 17	805 17	402 6
1955					
जनवरी	384	4 889	407 42	811 59	405 8
फरवरी	365	4 913	409 42	816 84	408 4
मार्च	439	4 950	412 50	821 92	411 0
अप्रैल	432	4 992	416 00	828 50	414 3
मई	455	5 034	419 50	835 50	417 8
जून	472	5 045	420 42	839 92	420,0
जुलाई	378	5 063	421 92	842 34	421 0
अगस्त	385	5,096	424 67	846 59	423 3
सितम्बर	425	5 103	425 25	849 92	425 0
अक्तूबर	479	5 133	427 75	853 00	426 5
नवम्बर	462	5 142	428 50	856 25	428 1
दिसम्बर	419	5 142	428 50	857 00	428 5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1963					
जनवरी	376	5 460	455 00		454 9
फरवरी	356	5,458	454 83	909 83	454 9
मार्च	435	5 459	454 92	909 75	455 4
अप्रल	490	5 470	455 83	910 75	4 56 6
मई	516	5 488	457 33	913 16	458 0
जून	483	5 504	458 67	916 00	462 0
जुलाई	421	5 585	465 42	924 09	468 7
अगस्त	443	5 664	472 00	937 42	476 0
सितम्बर	490	5 760	480 00	952 00	483 5
अक्तूबर	529	5 843	486 92	966 92	488 5
नवम्बर	524	5 881	490 08	977 00	491 5
दिसम्बर	522	5 915	492 92	983 00	493 5
		5 928	494 00	986 92	
1964					
जनवरी	455				
फरवरी	452				
मार्च	518				
अप्रन	528				
मई	550				
जन	496				

आकड सव आफ करेन्ट *विजनेस* के विभिन्न अको से।

गए सयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशको द्वारा उपभोग किय गए समचारपत्रीय कागज के आकडो का विचार कर। 12 मास गतिशील औसत के लिय प्रथम अक पहले 12 मास जनवरी 1954-दिसम्बर 1954 की औसत है। सारणी क चौथ स्तम्भ मे यह 390 25 दीख पडता है। ध्यान दीजिय कि 12 मास काल जनवरी दिसम्बर 1954 की औसत होन के कारण यह अक जून और जुलाई 1954 के मध्य केन्द्रित है। दूसरी गतिशील औसत अक 392 00 फरवरी 1954 जनवरी 1955 के समय को लेता है तथा जुलाई और अगस्त 1954 के बीच केन्द्रित है। *सारणी 14 4 के स्तम्भ 4 म प्रत्यक अक उन छ मूल* अको का समान्तर माध्य है जो इसके आग आग चलते हैं और छ मूल अक जो इसके पीछ चलते हैं।

क्योंकि अक सारणी 14 4 के 4 स्तम्भ म महीनो के प्रत्येक युग्म के मध्य मे आते है जबकि मूल आकडे स्तम्भ 2 म कलेंडर मासो के लिय है और प्रत्यक महीने के मध्य मे केन्द्रित है अत गतिशील औसतो का समजन करना आवश्यक है ताकि व मूल आँकडो क साथ चल सक। इस क्रम को केन्द्रित करना[2] कहते हैं और इसमे 12 मास

2 कुछ सांख्यिकीविद 12 मास गतिशील औसत को केन्द्रित करने क झंझट मे नही पडते बल्कि प्रत्येक 12 मास की औसत सातव मास के सामने स्वेच्छा से यह सोचते हुए रख देते हैं कि शुद्धता की हानि की क्षतिपूर्ति से अधिक लाभ समय की बचत से हो जाता है। यदि केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत का आगामी पष्ठो पर वर्णित तथा सारणी 14 5 मे दिखाई गई विधि से परिकलन किया जाता है और यदि गतिशील योगो को प्राप्त करने के लिये मशीन का प्रयोग किया जाता है (देखिये एफ० ई० क्राक्सटन तथा

गतिशील-औसतों की एक द्वि-मास गतिशील-औसत का परिकलन करना आता है। सारणी 14 4 के स्तम्भ 5 और 6 यह दिखाते है कि यह किस प्रकार किया जाता है। परिणाम है, गतिशील-औसतो की श्रेणी जोकि उचित रूप से केन्द्रित है तथा जुलाई 1954 से प्रारम्भ होती है। इन गतिशील औसतो को चार्ट 14 3 मे आरेखित किया गया है।

चार्ट 14.3 से यह स्पष्ट है कि केन्द्रित गतिशील-औसत अक किसी पर्याप्त मात्रा मे, न तो ऋतुनिष्ठ गति को प्रत्यावर्तित करते है और न ही अनियमित गतियो को। चार्ट 14 3 से यह इतना स्पष्ट नही है कि गतिशील औसत सन्निकट सयुक्त उपनति तथा चक्रीय प्रतिरूप का अनुसरण करती है, क्योकि विचाराधीन समय मे समाचारपत्रीय कागज के उपभोग की श्रेणी मे तनिक भी चक्रीय गति नही है। एक केन्द्रित 12-मास गतिशील औसत वास्तव मे सन्निकट उपनति और चक्रीय गतियो[3] का वर्णन अवश्य करती है यह बात चार्ट 15 1 मे भी प्रेक्षित की जा सकती है।

समाचारपत्रीय कागज उपभोग के ऋतुनिष्ठ सूचकाक का परिकलन प्रारम्भ करने से पूर्व यह अच्छा होगा कि सारणी 14 4 को एक बार फिर देखे और यह ध्यान दें कि उस सारणी मे प्रदर्शित प्रविधियाँ आवश्यकता से अधिक परिश्रम-साध्य है। हमे स्तम्भ 4 की गतिशील-औसत का परिकलन करने की आवश्यकता नही। इसके स्थान पर हम स्तम्भ 3 के अको का द्वि-मास गतिशील योग परिकलन कर सकते थे और फिर ठीक वे ही अक जो सारणी 14 4 के स्तम्भ 6 मे दिखाए गए है प्राप्त करने के लिए उन योगो मे से प्रत्येक को 24 से भाग दे सकते थे। तथापि एक और भी अधिक क्षिप्र प्रविधि है जो हम काम मे लाएंगे। जुलाई 1954 की केन्द्रित गतिशील औसत पर विचार कीजिए। जनवरी 1954 के मान, फरवरी 1954 के मान के दुगने दिसम्बर 1954 तक आगामी मासो मे से प्रत्यक के मान के दुगने, तथा जनवरी 1955 के मान का योग कर के तथा इस योग को 24 से भाग देकर, यह अक प्राप्त किया गया था। इसी प्रकार फरवरी 1954 के मान, अगले 11 मानो मे से प्रत्यक के दुगने, तथा फरवरी 1955 के मान के योग को 24 से भाग करने का परिणाम अगस्त 1954 की औसत है। दूसरे शब्दो मे, केन्द्रित 12-मास गतिशील औसत का परिकलन करने के लिए जो कुछ हमने वास्तव मे किया है वह है, 13-मास गतिशील औसत का 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ?, 2, 2, 2, 2, 1 से भारित महीनो के साथ परिकलन।

एस० क्रेनेन द्वारा लिखित वर्कबुक इन ऐप्लाइड जनरल स्टैटिस्टिक्स, पचम सस्करण, प्रेन्टिस हाल, इन्क०, एगलवुड क्लिफ, एन० जे०, (1967), तो केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत को लगभग उतनी शीघ्रता से प्राप्त किया जा सकता है जितना अकेन्द्रित 12 मास गतिशील औसत को।

3 जब श्रेणी अधिक चक्रीय गतियाँ प्रदर्शित करती है तो केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत चक्रीय व्यापार शिखाओ मे पर्याप्त ऊंचा या चक्रीय गर्तो मे पर्याप्त नीचा न जाए यह हो सकता है। यह स्पष्ट होना चाहिए कि ऐसा क्यो है, क्योकि जब केन्द्रित 12-मास गतिशील औसत चक्रीय उच्च बिन्दु पर केन्द्रित हो तो औसत न केवल बीच के महीने के मान द्वारा प्रभावित होगी अपितु छ पिछले तथा छ आगामी महीनो द्वारा भी प्रभावित होगी। जिसमे से सबके या अधिकाश के मान बीच के महीने के मान से कम होगे। जब गतिशील-औसत चक्रीय निम्न बिन्दु पर केन्द्रित हो तो इसके विपरीत बात सत्य होगी। उपर्युक्त कारणो से सयुक्त उपनति तथा चक्रीय गतियां का जिसे श्रेष्ठतर आकलन समझा जाता है उसे प्राप्त करने के लिए कुछ सांख्यिकीविद प्राय स्वनम्रहस्त क्रम से औसत वक्र पर मूल मानो को प्रतिशतताओं के रूप मे व्यक्त किया जाता है।

सारणी 14 5 मे भारित 13-मास गतिशील योग तथा 12-मास केन्द्रित गतिशील-औसत का परिकलन दिखाया गया है । प्रविधि निम्न प्रकार है :

सारणी 14 5

सयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशको द्वारा, जनवरी 1954—जून 1964 में समाचार-पत्रीय कागज उपभोग की गतिशील-औसत की प्रतिशतताओं तथा केन्द्रित 12-मास गतिशील-औसत का परिकलन करने की लघु विधि

वर्ष तथा मास (1)	उपभोग(छोटे टन हजारो मे) (2)	13-मास गतिशील योग भारित 1, 2,2,.. ,2, 2, 1 (3)	केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 3 ÷ 24 (4)	12-मास गतिशील-औसत का प्रतिशत स्तम्भ 2 ÷ 4 (5)
1954				
जनवरी..	363	...	...	...
फरवरी	346	...	...	...
मार्च...........	400	...	...	...
अप्रैल	415	...	...	...
मई	422	...	...	...
जून	384	.	...	...
जुलाई	339	9,387 ✓	391.1	86 7
अगस्त	361	9,427	392.8	91.9
सितम्बर	388	9,485	395.2	98.2
अक्तूबर..... . ..	437	9,541	397.5	109 9
नवम्बर.	420	9,591	399.6	105.1
दिसम्बर...	408	9,662	402.6	101.3
1955				
जनवरी..	384	9,739	405.8	94 6
फरवरी..........	365	9,802	408.4	89.4
मार्च............	439	9,863	411.0	106.8
अप्रैल	432	9,942	414.3	104 3
मई...	455	10,026	417.8	108.9
जून...	422	10,079	420 0	100.5
जुलाई...	378	10,108 ✓	421.2	89.7
अगस्त............	385	10,159	423 3	91.0
सितम्बर......... .	425	10,199	425 0	100.0
अक्तूबर..........	479	10,236	426.5	112.3
नवम्बर	462	10,275	428.1	107.9
दिसम्बर...........	419	10,284	428.5	97 8
1956				
जनवरी......... .	402	10,295	429 0	93 7
फरवरी...........	398	10,324	430.2	92.5
मार्च............	446	10,352	431 3	103.4
अप्रैल............	462	10,360	431.7	107 0

सारणी 14 5 (वितत)

वर्ष तथा मास (1)	उपभोग (शोर्ट टन हजारों में) (2)	13 मास गतिशील योग भारित 1 2 2 2 2 1 (3)	केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 3—24 (4)	12 मास गतिशील औसत का प्रतिशत स्तम्भ (2—4) (5)
मई	464	10 364	431 8	107 5
जून	422	10 395	433 1	97 4
जुलाई	389	10 426✓	434 4	89 5
अगस्त	403	10 421	434 2	92 8
सितम्बर	435	10 427	434 5	100 1
अक्तूबर	477	10 424	434 3	109 8
नवम्बर	468	10 406	433 6	107 9
दिसम्बर	444	10 420	434 2	102 3
1957				
जनवरी	408	10 417	434 0	94 0
फरवरी	387	10 385	432 7	89 4
मार्च	463	10 367	432 0	107 2
अप्रैल	442	10 354	431 4	102 5
मई	466	10 327	430 3	108 3
जून	434	10 304	429 3	101 1
जुलाई	374	10 274✓	428 1	87 4
अगस्त	386	10 230	426 3	90 5
सितम्बर	434	10 179	424 1	102 3
अक्तूबर	465	10 131	421 1	110 2
नवम्बर	453	10 084	420 2	107 8
दिसम्बर	436	10 031	418 0	104 3
1958				
जनवरी	360	9 997	416 5	92 7
फरवरी	365	9,990	416 3	87 7
मार्च	434	9,971	415 5	104 5
अप्रैल	423	9 955	414 8	102 0
मई	438	9 972	415 5	105 4
जून	409	9 942	414 3	98 7
जुलाई	365	9,909✓	412 9	88 4
अगस्त	388	9,938	414 1	93 [illegible]
सितम्बर	413	9,982	415 9	99 3
अक्तूबर	470	10 050	418 8	112 2
नवम्बर	465	10 140	422 5	110 1
दिसम्बर	394	10,206	425 3	92 6

सारणी 14 5 (वितत)

वर्ष तथा मास (1)	उपभोग (छोटे टन हजारों में) (2)	13 मास गतिशील योग भारित 1 2, 2 2 2, 1 (3)	केन्द्रित 12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 3 – 24 (4)	12 मास गतिशील औसत का प्रतिशत (स्तम्भ 2 – 4) (5)
1959				
जनवरी	395	10 261	427 5	92 4
फरवरी	385	10 331	430 5	89 4
मार्च	458	10 402	433 4	105 7
अप्रैल	467	10 460	435 8	107 2
मई	484	10 505	437 7	110 6
जून	429	10 593	441 4	97 2
जुलाई	400	10 695 ✓	445 6	89 8
अगस्त	423	10 763	448 5	94 3
सितम्बर	449	10 806	450 3	99 7
अक्तूबर	492	10 828	451 2	109 0
नवम्बर	488	10 864	452 7	107 8
दिसम्बर	459	10 923	455 1	100 9
1960				
जनवरी	432	0 976	457 3	94 5
फरवरी	416	10 993	458 0	90 8
मार्च	470	10 995	458 1	102 6
अप्रैल	477	11 025	459 4	103 8
मई	510	11 059	460 8	110 7
जून	462	11 066	461 1	100 2
जुलाई	420	11 054 ✓	460 6	91 2
अगस्त	420	11 020	459 2	91 5
सितम्बर	454	10 995	458 1	99 1
अक्तूबर	517	10 996	458 2	112 8
नवम्बर	497	10 974	457 3	108 7
दिसम्बर	457	10 935	455 6	100 3
1961				
जनवरी	422	10 913	454 7	92 8
फरवरी	392	10 903	454 3	86 0
मार्च	469	10 897	454 0	103 3
अप्रैल	479	10 889	453 7	105 6
मई	486	10 886	453 6	107 1
जून	447	10 904	454 3	98 4
जुलाई	413	10 932 ✓	455 5	90 7
अगस्त	417	10 967	457 0	91 2
सितम्बर	451	11 002	458 4	98 4

सारणी 14 5 समाप्त

वर्ष तथा मास (1)	उपभोग (छोटे टन हजारों में) (2)	13 मास गतिशील योग भारित 1 2 2 ... 2 2 1 (3)	केंद्रित 12 मास गतिशील औसत स्तम्भ 3 ÷ 24 (4)	13 मास गतिशील औसत का प्रतिशत (स्तम्भ 2 ÷ 4) (5)
अक्तूबर	512	11 022	459 3	111 5
नवम्बर	499	11 043	460 1	108 5
दिसम्बर	473	11 066	461 1	102 6
1962				
जनवरी	434	11 086	461 9	94 0
फरवरी	415	11 121	463 4	89 6
मार्च	481	11 174	465 6	103 3
अप्रैल	487	11 201	466 7	104 3
मई	499	11 209	467 0	106 9
जून	457	11 186	466 1	98 0
जुलाई	423	11 096 ✓	462 3	91 5
अगस्त	442	10 979	457 5	96 6
सितम्बर	479	10 874	453 1	105 7
अक्तूबर	511	10 831	451 3	113 2
नवम्बर	508	10 851	452 1	112 4
दिसम्बर	441	10 894	453 9	97 2
1963				
जनवरी	376	10 918	454 9	82 7
फरवरी	356	10 917	454 9	78 3
मार्च	435	10 929	455 4	95 5
अप्रैल	490	10 958	456 6	107 3
मई	516	10 992	458 0	112 7
जून	483	11 089	462 0	104 5
जुलाई	421	11 249 ✓	468 7	89 8
अगस्त	443	11 424	476 0	93 1
सितम्बर	490	11 603	483 5	101 3
अक्तूबर	529	11 724	488 5	108 3
नवम्बर	524	11 796	491 5	106 6
दिसम्बर	522	11 843 ✓	493 5	105 8
1964				
जनवरी	455			
फरवरी	452			
मार्च	516			
अप्रैल	528			
मई	550			
जून	496			

आंकड़े सारणी 14 4 के नीचे दिए स्रोत से।

9 387 S
363 –
346 –
384
365
9 427 S
346 –
400 –
365
439
9 485 S
400 –
415 –
439
432
9 541 S
415 –
422 –
432
455
9 591 S
422 –
384 –
455
422
9 662 S
334 –
339 –
422
378
9 739 S
339 –
361 –
379
385
9 802 S
361 –
388
385
425
9 863 S
388
437 –
425
479
9 942 S
437 –
420
479
462
10 026 S
420 –
408 –
462
419
10 079 S
408
384 –
419
402
10 108 S
384 –
365 –
402
378
10 159 S

1 योग करने वाली मशीन का उपयोग करते हुए प्रत्येक वर्ष की जुलाई के भारित 13-मास गतिशील योग का तथा अन्तिम गतिशील योग का, जो सारणी 14 5 में दिसम्बर 1963 के लिए है, परिकलन करो। प्रत्येक जुलाई के योग मे पिछली जनवरी से लेकर आगामी जनवरी तक के मान सम्मिलित होंगे। 1963 दिसम्बर के योग में जून 1963 से जून 1964 तक के मान सम्मिलित होंगे। ये मान सारणी 14.5 के स्तम्भ 3 म प्रविष्ट है तथा पग 2 मे प्राप्त किये जाने वाले गतिशील योगफलो के लिए पडताल मूल्यो के रूप मे कार्य करते है।

2 योग करने वाली मशीन[4], जो घटाव करेगी, का प्रयोग करते हुए जुलाई 1954 के भारित गतिशील योग को लो। जनवरी और फरवरी 1954 के मूल्यों को घटाओ, जनवरी और फरवरी 1955 के मानो को जोडो और फिर योग लो। यह योग अगस्त 1954 का भारित गतिशील योग है। तत्पश्चात् फरवरी और मार्च 1954 के मूल्यो को घटाओ और फरवरी तथा मार्च 1955 के मूल्यो को जोडो और योग करो यह दूसरा उप-योग सितम्बर 1954 का मूल्य है। दो मूल्यो को घटाने, दो मूल्यो को जोडने, और उनका उप-योग करने का क्रम निरन्तर चालू रखो जैसा कि जोड करने वाली मशीन के फीते के एक भाग के साथ वाले पुनरुत्पादन मे दिखाया गया है। जब जुलाई 1955 का उप-योग प्राप्त कर लिया जाए, तो इसे पूर्व प्राप्त अक के अनुकूल होना चाहिए। सारणी 14 5 के स्तम्भ 3 म पडताल चिह्नो द्वारा जुलाई के सभी तथा दिसम्बर 1963 के अको के अन्वय का सकेत किया गया है।

3 सारणी 14 5 के स्तम्भ 3 मे प्रत्येक अक को 24 से भाग देकर केन्द्रित गतिशील-औसत का परिकलन करो। 24 के व्युत्क्रम को (जो 0 04166667 है) गणना क्रम-यन्त्र के चाबी पट्ट मे रख कर तथा सारणी 14 5 के स्तम्भ 3 मे प्रदर्शित मूल्यो से गुणा करके विभाजन बहुत शीघ्रता से सम्पन्न किया जा सकता है। गुणा के मध्य मशीन को साफ करने की आवश्यकता नहीं, क्योकि आगामी गुणनफल को प्राप्त करने के लिए गुणक को केवल बढाने अथवा घटाने की आवश्यकता पडती है। यदि

4 यदि योग यन्त्र घटाव दण्डिका के साथ प्राप्य न हो तो परिकलन यन्त्र का उपयोग किया जा सकता है। जोड की ऐसी मशीन के द्वारा जिसमे घटाव दण्डिका नहीं है सख्या के पूरक को जोड कर घटाव करना सम्भव है है (उदाहरण के लिए एक आठ स्तम्भ वाली योग करने वाली मशीन पर 99999724 को 276 के पूरक के रूप में प्रविष्ट किया जाएगा)। तो भी पग 2, मे पूरक जोडने की सिफारिश नहीं की गई है, क्योंकि यन्त्रचालक से बहुत अशुद्धियां होने की सभावना है।

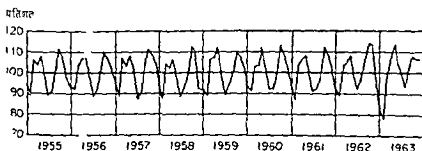
स्वचालित गुणनप्रक्रिया वाले परिकलन यन्त्र का प्रयोग किया जाए तो सम्भवतः दूसरे को प्रारम्भ करने से पूर्व कदाचित् प्रत्येक पहले गुणन के परिणाम को साफ करना अभिमान्य होगा; सभी गुणनो के लिए मशीन मे 0 04166667 को रखे रहना चाहिए। परिणाम सारणी 14.5 के स्तम्भ 4 मे दिखाए गए है।

ऋतुनिष्ठ सूचकाक के परिकलन मे अगला चरण प्रत्येक मूल मान को सगत कन्द्रित गतिशील-ग्रौसत की प्रतिशतता के रूप मे अभिव्यक्त करने मे निहित है। इस पग के परिणाम सारणी 14.5 के स्तम्भ 5 तथा चार्ट 14 5 मे दिखाए गए हैं। इस प्रविधि का तर्क इस प्रकार है. काल-श्रेणियां $T \times C \times S \times I$ उपनति × चक्र × ऋतुनिष्ठ × ग्रनियमित) से बनी हुई कल्पित की जाती है। 12-मास गतिशील ग्रौसत $T \times C$ का स्थूल ग्राकलन है क्योकि 12-मास ग्रौसत ऋतुनिष्ठ गतियो को ग्रौर, अधिकतर, ग्रनियमित गतियों को आसान कर देती है क्योकि बाद वाली गतियाँ प्राय थोड़े परिसर तथा लघु अवधि वाली होती है। यदि अब हम मूल ग्राँकडो को 12-मास गतिशील ग्रौसत से विभक्त कर दे तो हमे ऋतुनिष्ठ तथा ग्रनियमित गतियो का सयुक्त ग्राकलन प्राप्त हो जाता है

$$\frac{T \times C \times S \times I}{T \times C} = S \times I$$

चार्ट 14.5 बहुत स्पष्ट रूप से ऋतुनिष्ठ गति की विद्यमानता को प्रदर्शित करता है जो वर्षानुवर्ष लगभग एक-सी दिखाई देती है। यह पूर्णतया एक-सी नहीं है, क्योकि वसन्त शिखर प्राय: मई मे होता है परन्तु कभी-कभी अप्रैल मे, पतझड शिखर ग्रौर भी अक्तूबर मे आता है, परन्तु कभी-कभी नवम्बर भी लगभग उतना ही उच्च होता है।

इस बिन्दु से आगे, प्रविधि पुस्तकालय प्रचलन ग्राँकडो को प्रतिशतता के रूप मे अभिव्यक्त करने के प्रयोग मे लायी गयी प्रविधि के समान्तर हो जाती है। तथापि हम प्रथम सारणी 14 6 बनाते है जो गतिशील ग्रौसत के प्रतिशत ग्राँकडो को ऐसे रूप मे प्रस्तुत करती है जो कि सरणियो के निर्माण मे सहायता करते हैं, जो सारणी 14 7 मे दिखाई गई हैं। देखिये, केवल वे ही वर्ष सारणी 14 6 ग्रौर 14 7 मे सम्मिलित किए गए हैं जिनको गतिशील-ग्रौसत को 12 प्रतिशत ग्रक प्राप्त थे।



चार्ट 14 5 संयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा 1955—1963 में समाचारपत्रीय कागज के उपभोग की केन्द्रित 12-मास गतिशील ग्रौसत की प्रतिशतताएँ। सारणी 14.5 या 14 6 के आँकडे।

सारणी 14 6

1955—63 मे सयुक्त राज्य श्रमरीका के प्रकाशकों द्वारा समाचारपत्रीय कागज के उपभोग की केंद्रित 12 मास गतिशील श्रौसतो की प्रतिशतताएँ

वर्ष	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्तूबर	नवम्बर	दिसम्बर
1955	94 6	89 4	106 8	104 3	108 9	100 5	89 7	91 0	100 0	112 3	107 9	97 8
1956	93 7	92 5	103 4	107 0	107 5	97 4	89 5	92 8	100 1	109 8	107 9	102 3
1957	94 0	89 4	107 2	102 5	108 3	101 1	87 4	90 5	102 3	110 2	107 8	104 3
1958	92 7	87 7	104 5	102 0	105 4	98 7	88 4	93 7	99 3	112 2	110 1	92 6
1959	92 4	89 4	105 7	107 2	110 6	97 2	89 8	94 3	99 7	109 0	107 8	100 9
1960	94 5	90 8	102 6	103 8	110 7	100 2	91 2	91 5	99 1	112 8	108 7	100 3
1961	92 8	86 3	103 3	105 6	107 1	98 4	90 7	91 2	98 4	111 5	108 5	102 6
1962	94 0	89 6	103 3	104 3	106 9	98 0	91 5	96 6	105 7	113 2	112 4	97 2
1963	82 7	78 3	95 5	107 3	112 7	104 5	89 8	93 1	101 3	108 3	106 6	105 8

आँकड़े सारणी 14 5 से।

सारणी 14 7

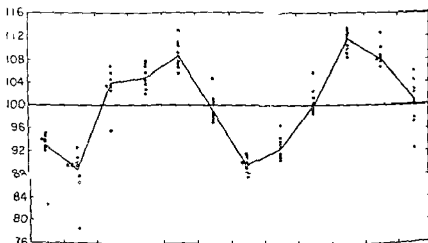
1955—63 में संयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों द्वारा समाचारपत्रीय कागज के उपभोग के ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिकलन तथा केन्द्रित 12 मास गतिशील औसतों की प्रतिशतताओं की सरणियाँ

पद (या पंक्ति या विवरण)	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्तूबर	नवम्बर	दिसम्बर	माध्य
1	94 6	92 5	107 2	107 3	112 7	104 5	91 5	96 6	105.7	113 2	112 4	105 8	—
2	94 5	90 8	106 8	107 2	110 7	101 1	91 2	94 3	102 3	112 8	110 1	104 3	—
3	94 0	89 6	105 7	107 0	110 6	100 5	90 7	93 7	101 3	112 3	108 7	102 6	—
4	94 0	89 4	104 5	105 6	108 9	100 2	89 8	93 1	100 1	112 2	108 5	102 3	—
5	93 7	89 4	103 4	104 3	108 3	98 7	89 8	92 8	100 0	111 5	107 9	100 9	—
6	92 8	69 4	103 3	104 3	107 5	98 4	89 7	91 5	99 7	110 2	107 9	100 3	—
7	92 7	87 7	103 3	103 8	107 1	98 0	89 5	91 2	99 3	109 8	107 8	97 8	—
8	92 4	86 3	102 6	102 5	106 9	97 4	88 4	91 0	99 1	109 0	107 8	97 2	—
9	82 7	78 3	95 5	102 0	105 4	97 2	87 4	90 5	98 4	108 3	106 6	92 6	—
10 मध्य मात का योग	654 1	622 6	729 6	734.7	760 0	694 3	629 1	647 6	701 8	777 8	758 7	705 4	—
11 मध्य मात का माध्य	93 4	88 9	104 2	105 0	108 6	99 2	99 9	92 5	100 3	111 1	108 4	100 8	100 2
12 ऋतुनिष्ठ सूचकांक*	93 2	88 7	104 0	104.8	108 4	99 0	89 7	92 3	100 1	110 9	108 2	100 6	100 0

*पंक्ति 11 की प्रत्येक मद को 100 2 से विभक्त तथा 100 से गुणा किया गया है। वैकल्पिक रूप से, प्रत्येक मद को शुद्धि कारक (1 × 100 2) 100=0 998004 से गुणा किया जा सकता है। आँकड़े सारणी 14 6 से।

मासिक गणियों की एक सारणी बनाने के पश्चात्, चार्ट 14 6 जैसा एक चार्ट बनाना चाहिए। मासों को औसत निकालने में केन्द्रीय उपनति की कौनसी विधि अपनायी जाए इसका निर्णय करने के लिए मासिक सरणियों का चार्ट प्राय. उपयोगी और सहायक होता है, इसके अतिरिक्त यह ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप का सामान्य संकेत करता है।

कौनसी मदों का निरसन करना है, इसका निर्णय करने के दो ढंग हैं। पहला ढंग है चार्ट 14.6 की प्रत्येक सरणी पर अलग अलग विचार करना तथा उन मदों का निरसन करना जो असाधारणतया ऊँची या नीची दिखाई देती हैं, कदाचित् प्रत्येक दीर्घ विचलन का एक-एक करके अध्ययन करते हुए तथा उनका उन्मूलन करते हुए जिनके लिए विशेष परिस्थिति ज्ञात की जा सकती है। यदि इस ढंग पर चला जाता है तो एक सरणी सभी मदों की औसत का प्रयोग कर सकती है, दूसरी माध्यिका का प्रयोग कर सकती है, तीसरी केन्द्रीय पाँच मदों का, चौथी, उच्चतम दो के अतिरिक्त सभी मदों का, तथा इसी प्रकार आगे। विधि की अत्यधिक आत्मपरकता के कारण, जब तक सांख्यिकीविद् के पास उच्च प्रकार की शिक्षा तथा निर्णय शक्ति न हो, यह भयानक है। एक वैकल्पिक विधि जिसका सम्भवतः पर्याप्त प्रयोग किया जाता है, प्रत्येक मास के इसी प्रकार के संशोधित माध्य का परिकलन करने में निहित है। उपयुक्त संशोधित माध्य के चयन के लिए साधारण रूप से प्रयुक्त कोई नियम स्थापित नहीं किया जा सकता, अपितु एक उच्चतम मान तथा एक निम्नतम मान अथवा दो उच्चतम तथा दो निम्नतम मानों का परित्याग प्राय. संतोषजनक पाया जाएगा। जिन मदों का परित्याग करना है उनकी संख्या आंशिक रूप से श्रेणी में सम्मिलित चक्रों की संख्या पर निर्भर करती है, जितनी अधिक संख्या में चक्रीय ऊँचाइयाँ और निचाइयाँ गतिशील औसत की प्रतिशतताओं में प्रत्यावर्तित होंगी (क्योंकि उनको गतिशील



चार्ट 14 6 1955-1963 में संयुक्त राज्य अमरीका के प्रकाशकों के समाचार-पत्रीय कागज उपभोग के ऋतुनिष्ठ सूचकांक तथा गतिशील-औसत की सरणीकृत प्रतिशतताएँ। सारणी 14 7 के आंकड़े ऋतुनिष्ठ सूचकांक के परिकलन के उद्देश्य से प्रत्येक सरणी में उच्चतम तथा निम्नतम मान को निकाल दिया गया था।

औसत द्वारा बिल्कुल सरल नही कर दिया गया है), उतनी ही अधिक चरम मदें होगी जिनके बहिष्कार की आवश्यकता पड सकती है। समाचारपत्रीय कागज उपभोग के सारणी 14 7 के आँकडो के लिए, सारणी के अन्तिम से पहली पक्ति मे दिखाये गए परिणामो के साथ, हमने बीच के सात मूल्यो के माध्य का उपयोग किया है।

12 सशोधित माध्यों की औसत 100 2 है। जब प्रत्येक सशोधित माध्य को 100 2 से विभक्त किया जाता है और 100 मे गुणा किया जाता है तो हमे सारणी 14.7 की अन्तिम पक्ति और चार्ट 14 6 मे प्रदर्शित ऋतुनिष्ठ सूचकाक[5] प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि ऋतुनिष्ठ सूचकाक के 12 मूल्यो की औसत 100 0 है। यह महत्त्वपूर्ण है, क्योकि बाद मे मूल आँकडो को ऋतुनिष्ठ सूचकाक से भाग देकर, मूल आँकडो से ऋतुनिष्ठ विचरण को हटा दिया जाएगा। यदि ऋतुनिष्ठ सूचकाक की औसत 100 से कम होती तो सभी समजित अक कुछ बहुत बडे होते, यदि ऋतुनिष्ठ सूचकाक की औसत 100 0 से अधिक होती तो सभी समजित अक कुछ अतिलघु होते।

शृंखलित आपेक्षिक—किसी समय ऋतुनिष्ठ सूचकाक को प्राप्त करने की सबसे अधिक प्रचलित विधि शृखलित आपेक्षिक विधि थी। गतिशील औसत विधि के लिए आवश्यक परिकलनो की अपेक्षा इसमे परिकलनो का विस्तार बहुत कम होता है, परन्तु शृखलित आपेक्षिक विधि गतिशील औसत विधि से कम सन्तोषजनक है, विशेष रूप से, परिवर्तनशील ऋतुनिष्ठ गतियो के निर्धारण मे यह शीघ्रता से ग्रहण करने योग्य नही है, जिस विषय पर अगले अध्याय मे विचार किया जायेगा।

इस विधि म पहला पग प्रत्येक मासिक मूल्य को पहले मासिक मूल्य की प्रतिशतता के रूप मे अभिव्यक्त करने मे है। ये शृखलित आपेक्षिक है। इस बिन्दु से आगे, प्रविधि[6] वैसी ही है जैसी सारणी 14 7 मे दिखाई गयी है, अपवाद यह है कि 12 मासिक औसतो मे प्राय कुछ अधिशेष उपनति पायी जाती है, जिसका शृखलित आपेक्षिको के परिकलन-द्वारा निरसन नही किया गया था। ऋतुनिष्ठ सूचकाक प्राप्त करने से पूर्व इस अधिशेष उपनति का समजन अवश्य कर लिया जाना चाहिये।

ऋतुनिष्ठ सूचकांक की पर्याप्तता

ऋतुनिष्ठ सूचकाक की एक परख मरणियो के चार्ट द्वारा प्राप्त होती है, जैसा कि चार्ट 14 6 मे दिखाया गया है। यदि अलग-अलग मरणियाँ विस्तृत रूप से फैली हो (अर्थात् ऊर्ध्वाधर रूप से विस्तृत परिसर ग्रहण करती हो), तो हम ऋतुनिष्ठ सूचकाक मे कोई विश्वास नही रख सकते। अलग-अलग मासिक मरणियो मे जितना कम फैलाव होगा, ऋतुनिष्ठ गति वर्षानुवर्ष उतनी ही अधिक एक सार होगी।

यह निश्चित करना सम्भव है कि (अध्याय 24 मे वर्णित विधि द्वारा) क्या एक प्रदत्त सशोधित माध्य 100 से सार्थक रूप मे भिन्न है। या, प्रसरण के विश्लेषण की विधि

5 सारणी 14.7 मे मध्य पाँच मदो के माध्य पर आधारित ऋतुनिष्ठ सूचकाक लगभग वैसा ही है कि चार्ट 14 6 मे प्रदर्शित वक्र से इस वक्र मे कठिनाई से भेद किया जा सकता है। ऊपर के दृष्टान्त मे किसी एक मास के लिए अधिकतम अन्तर 0 2 है।

6 इस पुस्तक के प्रथम सस्करण के पृष्ठ 486—492 पर इस विधि का अधिक विस्तार मे वर्णन किया गया है। शृखलित आपेक्षिक विधि के लाभ तथा हानियों को वहाँ अधिक विस्तार से प्रस्तुत किया गया है।

का प्रयोग करते हुए (अध्याय 26 में वर्णित), यह निश्चित करना कि क्या 12 संशोधित माध्य सामूहिक रूप से परस्पर एक दूसरे से सार्थक रूप में भिन्न हैं। तो भी इन, प्रविधियों का महत्त्व संदिग्ध है, क्योंकि प्रथम तो जिन बंटनों से माध्यों का परिकलन किया गया था, वे यादृच्छिक बंटन न थे, और इसलिए भी कि माध्य संशोधित माध्य थे, जिनका आंशिक आँकड़ों को अस्वीकार कर देने के बाद परिकलन किया गया था।

श्रेणी में ऋतुनिष्ठ विचरण का निरसन करने में इसका उपयोग करना तथा फिर यह देखना कि क्या कोई अवशिष्ट ऋतुनिष्ठ गतियां विद्यमान हैं, ऋतुनिष्ठ सूचकांक की पर्याप्तता की व्यावहारिक परख है। हम सोलहवें अध्याय में इस विषय पर पुनर्विचार करेंगे।

15

काल-श्रेणी का विश्लेषण :

आवर्ती गतियाँ II–परिवर्तनशील वस्तुनिष्ठ प्रतिरूप

अध्याय 14 म हमने उस श्रेणी के ऋतुनिष्ठ सूचकाकों के निर्धारण की विधियों के विषय मे विचार किया जिनके प्रतिरूपों मे उस समय मे, जिससे हमारा सबध था, तनिक या कोई परिवर्तन नहीं हुआ। कुछ काल श्रेणियों के ऐसे ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप हैं जो परिवर्तित होते हैं। परिवर्तन उत्तरोत्तर हो सकते हैं—जिसका अर्थ यह है कि ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप एक वर्ष से दूसरे वर्ष धीरे धीरे बदलता है—अथवा वे अधिक आकस्मिक स्वभाव के हो सकते हैं उदाहरणतया ईस्टर की तिथि परिवर्तन या किसी महत्वपूर्ण घटना की बदलती हुई तिथि का सकेत करने वाले जैसे न्यूयार्क का मोटर गाडी प्रदर्शन, जैसाकि अध्याय 11 मे वर्णन किया गया था।

ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप में उत्तरोत्तर परिवर्तन

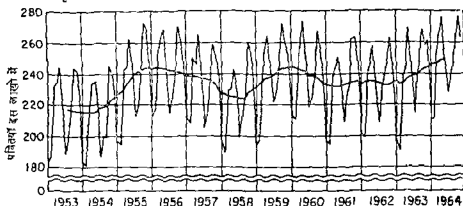
गतिशील ऋतुनिष्ठ—चार्ट 15 1 सयुक्त राज्य के 52 शहरों के जनवरी 1953 से दिसम्बर 1964 तक के समाचारपत्र विज्ञापन पक्तियों के मासिक आकडों को व्यक्त करता है। जैसा कि बाद म स्पष्ट हो जाएगा, इस श्रेणी के ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप मे उत्तरोत्तर परिवर्तन है जिस काल से हमारा सम्बध है उस काल मे प्रतिरूप सर्वत्र एक जैसा नही है। इसे प्राय गतिशील ऋतुनिष्ठ कहा जाता है। चार्ट 15 1 जैसे चार्ट से यह निश्चित करना सदा सम्भव नही है कि ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप स्थिर है अथवा गतिशील। इस का निर्णय करने के लिये प्राय यह आवश्यक है कि आंशिक रूप ऋतुनिष्ठ विश्लेषण से किया जाए (आगामी प्रविधि के पग 2 से) सौभाग्यवश, स्थिर अथवा गतिशील ऋतुनिष्ठ का निर्धारण करने के लिये प्रारम्भिक पग समान है।

गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकाक का परिकलन—एक गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकाक को निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है

1 मूल आकडों की केन्द्रित बारह-मास गतिशील औसत का परिकलन करें। क्योंकि प्रविधि बिल्कुल उसी प्रकार की है जैसी कि समाचारपत्रीय उपभोग के आकडों के लिये सारणी 14 5 के स्तम्भ 2 3, और 4 म दिखाई गई है, अत गतिशील औसत का परिकलन यहां नहीं दिखाया गया है। तथापि गतिशील औसत को चार्ट 15 1 म लेखाचित्र द्वारा दिखाया गया है।

2 मूल आकडों को गतिशील औसत की प्रतिशतताओं के रूप म व्यक्त करें। ये अब सारणी 15 1 म दिखाए गए है।

3. सारणी 15.1 के आँकडो को, *प्रत्येक मास के लिये एक चार्ट बनाते हुए*, जैसा चार्ट 15 2 के 12 भागो मे दिखाया गया है, 12 चार्टों मे आरेखित करें। इन बारह मासिक चार्टों को लेखाचित्रीय कागजो पर अलग-अलग या एक बडे कागज पर, जैसे भी सुविधाजनक हो, दिखाया जा सकता है। किसी भी दशा मे, अगले दो पगो मे किये जाने वाले उनके प्रयोग की दृष्टि से वे अधिक छोटे न हो।



चार्ट 15 1. सयुक्त राज्य में समाचारपत्र विज्ञापन, 1953—1964, तथा बारह-, मास केन्द्रित गतिशील औसत, जुलाई 1953—जून 1964। आँकडे सर्वे आफ करेन्ट बिजनेस के विभिन्न अंकों से। गतिशील औसत का परिकलन सारणी 14 5 के अनुसार किया गया है।

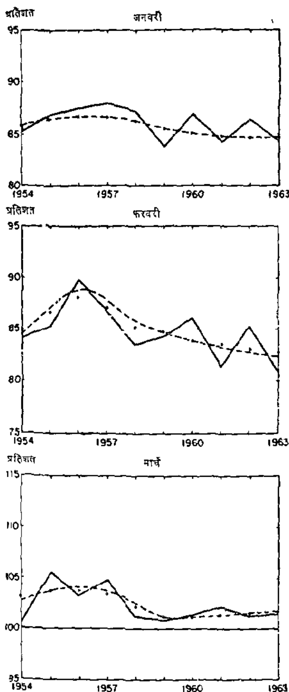
4 चार्ट 15 2 के प्रसग मे दिखाया है कि जनवरी, फरवरी, मार्च, और अक्तूबर की थोडी अधोगामी उपनतियाँ हैं। कुछ महीनो, उदाहरणार्थ, मई, जुलाई, अगस्त, तथा दिसम्बर की *उपनतियाँ ऊर्ध्वगामी हैं। मासिक उपनतियाँ रेखिक या अरेखिक हो सकती* है। साथ ही जैसा कि चार्ट 15 2 मे दिखाया है, एक मास की उपनति ऐसी हो सकती है जो गिरती है और फिर उठती है, या इसके विपरीत। चौथे पग मे मे बारह मासिक चार्टों मे प्रत्येक की उपनति का निर्धारण करना निहित है। यह मुक्तहस्त उपनति रेखाओ को खीचने से, गणितीय वक्रो के आसजन से, या एक गतिशील औसत (उदाहरणार्थ, एक पच-मद गतिशील औसत) का एक मार्गदर्शक के रूप मे प्रयोग करके और गतिशील औसत मुक्तहस्त समरेखण द्वारा हो सकता है। फिर भी उपनति रेखाएँ प्राप्त की जाती हैं, वे अपेक्षतया सरल वक्र होनी चाहिएँ तथा किनारो पर ऊपर या नीचे अधिक ढाल वाली नही होनी चाहिएँ। यह अवश्य अनुभव करना चाहिये कि जिन उपनतियो से हमारा यहाँ सम्बन्ध है वे उन्ही शक्तियो से प्रभावित नही होती जो दीर्घकालिक उपनति से सम्बन्धित है। मासिक उपनतिया एक ही निर्दिष्ट दिशा मे अनिश्चित काल के लिये निरतर जाती हुई दिखाई नही देती, अपितु एक निश्चित स्तर तक जाने की उनकी अधिक सभावना है और फिर कम या अधिक स्थिर रहती है, जब तक नए कारणो से उस स्तर मे परिवर्तन नही होता। दृष्टान्त के उद्देश्य से, चार्ट 15.2 मे बारह उपनति रेखाएँ मुक्तहस्त खीची गई थी। मासिक आँकडो को ऋतुनिष्ठता-रहित बनाने के लिये ज्यो ही वे प्राप्य हो, यदि हम 15.2 जैसे चार्ट मे दिखाए गए वर्ष की अपेक्षा अगले वर्ष का ऋतुनिष्ठ सूचकाक चाहते है, तो हम पिछले वर्ष के लिए दिखाए गए (जैसा कि सारणी 16.3 मे किया गया है) ऋतु-निष्ठ सूचकाक का प्रयोग कर सकते हैं या मासिक उपनति रेखाओ को बढ़ा सकते हैं।

सारणी 15 1

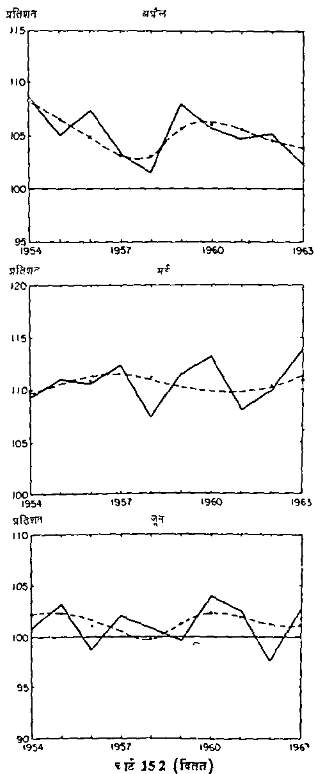
सयुक्त राज्य मे समाचारपत्र विज्ञापन के लिये केन्द्रित 1-2मास गतिशील औसतो की प्रतिशतताएँ, 1954—1963

वर्ष	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्तूबर	नवम्बर	दिसम्बर
1954	85 1	84 1	100 6	108 6	109 2	100 8	86 1	92 0	100 2	111 3	107 7	102 6
1955	86 9	85 3	105 5	105 0	111 0	103 1	89 4	91 9	102 3	113 0	110 6	99 8
1956	87 4	89 8	103 2	107 3	110 6	98 6	88 2	93 9	101 1	112 1	109 2	101 3
1957	87 9	86 8	104 8	103 3	112 3	102 0	86 7	92 5	103 9	112 4	109 3	105 5
1958	87 1	83 4	101 2	101 6	107 4	100 9	88 5	94 6	100 0	114 7	110 9	100 7
1959	83 8	84 3	100 8	108 0	111 4	99 6	92 0	97 3	102 2	112 1	107 0	103 1
1960	86 9	86 2	100 4	105 8	113 1	103 9	90 6	94 0	101 2	112 4	109 3	102 4
1961	84 3	81 4	102 1	104 7	108 0	102 3	89 6	96 6	99 6	112 0	111 9	104 0
1962	86 4	85 3	101 3	105 2	109 9	97 5	88 8	98 8	103 1	111 1	112 5	100 7
1963	84 4	81 0	101 5	102 2	113 8	102 5	89 0	97 1	102 2	110 3	105 9	106 6

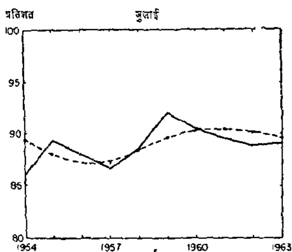
सर्वे ऑफ करन्ट बिनेजस के विभिन्न अको से मौलिक आँकडे । गतिशील औसतो की सारणी 14 5 मे दिखाए के अनुसार परिकलित ।

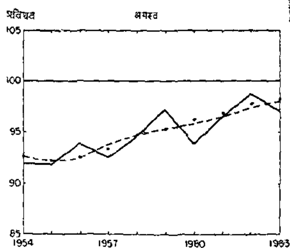


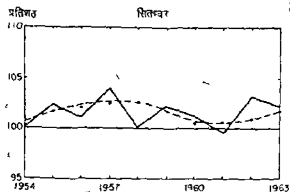
चार्ट 15 2. संयुक्त राज्य में समाचारपत्र विज्ञापन के लिये गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांको के निर्धारण मे सहायता के लिये मासिक चार्ट, 1954—1963। आंकड़े सारणी 15.1 से संदिग्ध विवरणों को दूर करने के लिये इन चार्टों, मे कोई निर्देशक रेखाएं नही है। जब गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक के परिकलन में सहायता के लिये इस प्रकार के चार्टों का उपयोग किया जाता है, तब चार्टों में सूक्ष्म रेखांकित ग्रिड होंगे। *सारणी 15 2 मे मानों को सीधे वक्रो मे पढ़ा जाता है।* सारणी15.3 मे मान बिन्दुओ द्वारा दिखाए हैं जो सीधे वक्रो पर, उनके एकदम ऊपर अथवा नीचे हैं।


प्रतिशत
अप्रैल
115
110
105
100
95
1954
1957
1960
1963
प्रतिशत
मई
120
115
110
105
100
1954
1957
1960
1963
प्रतिशत
जून
110
105
100
95
90
1954
1957
1960

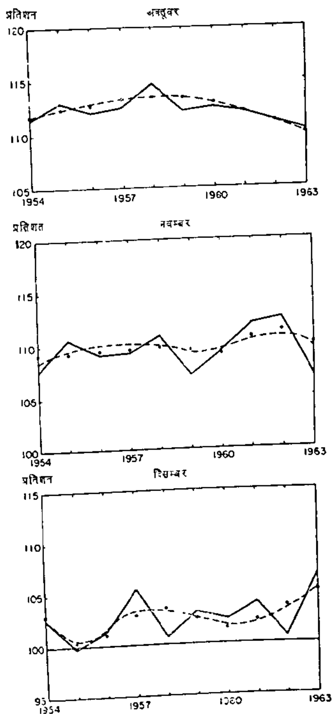
चार्ट 15.2 (वितत)


प्रतिशत
जुलाई
100
95
90
85
80
1954
1957
1960
1963


प्रतिशत
अगस्त
105
100
95
90
85
1954
1957
1960
1963


प्रतिशत
सितम्बर
110
105
100
95
1954
1957
1960
1963

चार्ट 15 2 (वितत)


प्रतिशत
अक्तूबर
120
115
110
105
1954
1957
1960
1963
प्रतिशत
नवम्बर
120
115
110
105
100
1954
1957
1960
1963
प्रतिशत
दिसम्बर
115
110
105
100
95
1954
1957
1960
1963

चार्ट 15.2 (समाप्त)

5. चार्ट 15.2 के मासिक चार्टों से उपनति मानों को पढ़ें, और उन्हें एक सारणी में प्रविष्ट करें। गतिशील ऋतुनिष्ठ के ये पहले अनुमान हैं और इन्हें सारणी 15.2 में दिखाया गया है।

प्रतिशत
118 112 106 100 94 88 82
1954 1955 1956 1957 1958 1959 1960 1961 1962 1963

चार्ट 15.3 संयुक्त राज्य में समाचारपत्र विज्ञापन के लिये गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक, 1954—1963। *आंकड़े सारणी 15.3 से।*

6. हम यह देखेंगे कि प्रतिवर्ष के लिये 12 मानों का, जिन्हें सारणी 15.2 में दिखाया गया है, योग केवल एक दृष्टान्त में 1,200.0 होता है। सारणी 15.2 के प्रथम सन्निकटन आंकड़ों का समजन करने में, ताकि प्रत्येक वार्षिक योग 1,200.0 हो, किन्तु साथ ही साथ चार्ट 15.2 के 12 भागों के लिये सरल सु-आसंजित उपनतियों को बनाए रखने में अन्तिम पग निहित है। इस पग के परिणाम चार्ट 15.2 में बिन्दुओं के द्वारा दिखाए गए हैं और सारणी 15.3 गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक देती है। ध्यान दीजिये कि प्रतिवर्ष के लिये अब योग 1,200.0 है। यदि बारह-मासिक उपनति-रेखाएँ रैखिक हैं तो उन्हें एक ऐसी गणितीय प्रविधि[1] से जोड़ा जा सकता है जिसका स्वत परिणाम, प्रत्येक वार्षिक योग 1,200.0 होगा।

समाचारपत्र विज्ञापन के लिये गतिशील ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप चार्ट 15.3 में लेखाचित्रीय विधि से दिखाया गया है। ध्यान दीजिये कि इस अवधि में अप्रैल तथा मई का सापेक्षिक महत्त्व किस प्रकार बदलता है। चार्ट 15.3 के द्वारा प्रस्तुत की गई दूसरी रुचिकर बात अवधि के अन्तर्गत ऋतुनिष्ठ विचरण के कोणांक में बहुत धीमा परिवर्तन है।

पाठक ने यह देखा होगा कि गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक के निर्धारण में पग 4 और 6 में व्यक्तिनिष्ठ प्रतिफल आते हैं। इसका कारण प्रविधि की निर्बलता नहीं है अपितु इसका अभिप्राय यह है कि अनुभवी कार्यकर्त्ता के द्वारा जो अध्ययनान्तर्गत श्रेणी से परिचित है, श्रेष्ठतर परिणाम प्राप्त होने की अधिक संभावना है। गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्राप्त करने की प्रविधि को, जिसका पहले अनुच्छेदों में वर्णन किया जा चुका है, केन्द्रित करके नहीं, अपितु स्वेच्छा से सातवें (या छठे) मास के सम्मुख रख कर एक 12-मास गतिशील औसत का प्रयोग करके कभी-कभी संशोधित कर लिया जाता है।

1 देखिए आर० जे० फूट तथा कार्ल ए० कॉइन, सीजनल वेरिएशन : मेथड्स ऑफ मेजरमेन्ट एन्ड टेस्ट्स ऑफ सिगनीफिकेन्स, पृष्ठ 6—7, ब्यूरो ऑफ एग्रीकल्चरल इकानामिक्स द्वारा एग्रीकल्चरल हैंडबुक न० 48 के रूप में प्रकाशित।

सारणी 15 2

सयुक्त राज्य ग्रमरीका मे समाचारपत्र विज्ञापन के लिय गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकाक के प्रथम सन्निकटन 1954—1963

मास	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
जनवरी	85 8	86 4	86 7	86 6	86 3	85 5	85 1	84 8	84 7	84 7
फरवरी	84 8	87 1	88 8	87 7	85 8	84 7	84 0	83 3	82 8	82 4
माच	102 7	103 6	104 1	103 7	102 4	101 1	101 2	101 3	101 4	101 7
ग्रप्रैल	108 3	107 0	104 8	103 2	103 0	104 4	106 3	105 6	104 7	103 9
मई	109 5	110 6	111 2	111 4	111 0	110 3	109 8	109 8	110 3	111 6
जून	102 2	102 3	101 5	100 4	99 8	101 2	102 2	101 9	101 1	101 0
जुलाई	89 2	88 1	87 1	87 3	88 3	89 6	90 2	90 2	90 1	89 8
ग्रगस्त	92 6	92 2	92 5	93 8	94 8	95 3	95 9	96 5	97 4	98 0
सितम्बर	100 6	101 7	102 3	102 7	102 6	101 8	100 8	100 5	100 9	101 8
ग्रक्टूबर	110 7	112 2	112 9	113 2	113 4	113 4	113 0	112 0	111 0	110 1
नवम्बर	108 7	109 5	110 0	110 0	110 0	109 4	109 6	110 3	110 7	109 8
दिसम्बर	102 6	100 5	101 6	103 3	103 3	102 6	101 9	102 1	103 3	105 3
योग	1 197 7	1 201 2	1 203 5	1 203 3	1 200 7	1 199 3	1 200 0	1 198 9	1 198 4	1 200 1

ग्रोर चार्ट 15 2 ग ।

सारणी 15 3

सयुक्त राज्य अमरीका मे समाचारपत्र विज्ञापन के लिए गतिशील ऋतुनिष्ठ सचकाक 1954—1963

मास	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
जनवरी	85 8	86 4	86 7	86 6	86 3	85 5	85 1	84 8	84 7	84 7
फरवरी	85 0	86 7	88 1	87 1	85 2	84 7	84 0	83 5	83 0	82 8
मार्च	103 2	103 6	103 8	103 4	102 2	101 1	101 2	101 3	101 4	101 7
अप्रैल	108 3	107 0	104 8	103 2	103 0	104 4	106 1	105 6	104 7	103 9
मई	109 9	110 2	110 8	111 0	111 1	110 9	110 5	110 4	110 4	110 9
जून	102 2	102 3	101 0	100 0	99 8	101 2	102 2	101 9	101 1	101 0
जुलाई	89 2	88 1	87 0	87 2	88 3	89 6	90 2	90 2	90 1	89 8
अगस्त	92 6	92 2	92 5	93 3	94 8	95 3	96 2	96 9	97 8	98 2
सितम्बर	100 9	101 7	102 0	102 4	102 6	101 8	100 6	100 5	100 9	101 8
अक्तूबर	110 7	112 2	112 8	113 2	113 4	113 4	113 0	112 0	111 0	110 1
नवम्बर	109 2	109 3	109 5	109 6	109 9	109 5	109 2	110 7	111 2	110 0
दिसम्बर	103 0	100 3	101 0	103 0	103 4	102 6	101 7	102 2	103 7	105 1
योग	1 200 0	1 200 0	1 200 0	1 200 0	1 200 0	1 200 0	1 200 0	1 200 0	1,200 0	1 200 0

आँकड़े चार्ट 15 2 से

यदि श्रेणी को, जिसमे गतिशील ऋतुनिष्ठ है, स्थिर ऋतुनिष्ठ सूचकाक के द्वारा ऋतुनिष्ठता रहित कर दिया जाए तो समजित आँकडो मे केवल श्रेणी मे वस्तुत विद्यमान अनियमित गतियाँ ही नही होगी अपितु अतिरिक्त अनियमितताएँ भी होगी जहाँ ऋतुनिष्ठ सूचकाक अवसशोधित या अतिसशोधित कर देता है। जब तक कोई व्यक्ति उस श्रेणी के विषय मे जिसके साथ वह कार्य कर रहा है यह नही जानता कि उसमे स्थिर ऋतुनिष्ठगति है, तो चार्ट 15 2 के 12-मासीय चार्ट बनाना सर्वदा बुद्धिमत्तापूर्ण होता है। ये इस बात को प्रकट करेंगे कि क्या गतिशील ऋतुनिष्ठ उपस्थित है, यदि ऋतुनिष्ठ स्थिर है तो उपनतियाँ क्षैतिज रेखाएँ होगी।

अध्याय 14 की पाद टिप्पणी 3 म यह सकेत किया गया था कि सभव है, एक 12-मास गतिशील औसत चक्रीय चोटियो मे ऊँचे और चक्रीय गर्त मे नीचे की ओर गतिशील न हो। गतिशील औसत के इस गुण को आशिक रूप मे शुद्ध करने के लिये फेडरल रिजर्व सिस्टम के अनुसन्धान तथा सांख्यिकी विभाग के गवर्नरो का बोर्ड अभी अभी वर्णित प्रविधि की अपेक्षा एक अधिक जटिल प्रविधि[2] का प्रयोग करता है।

फेडरल रिजर्व प्रविधि इस पुस्तक मे प्रयुक्त विधि से दो बातो मे भिन्न है प्रथम, गतिशील औसत (जो केन्द्रित नही है) एक मुक्तहस्त वक्र के द्वारा सशोधित कर ली जाती है, और दूसरे, प्रथम प्राप्त ऋतुनिष्ठ सूचकाक का दो बार सशोधन किया जाता है। इस विधि मे आँकडो द्वारा व्यक्त क्षेत्र का ज्ञान तथा उच्च निर्णयबुद्धि की आवश्यकता है। इसमे अधिकाश यात्रिक विधियो की अपेक्षा उच्चतर स्तर के कार्य तथा अधिक समय की आवश्यकता है। एक कुछ अनिश्चित श्रेणी के लिये, उदाहरणार्थ, यह पाया गया कि 14 वर्ष की अवधि के आकडो के लिए ऋतुनिष्ठ के निर्धारण तथा निरसन के लिये आधे दिन के व्यावसायिक प्रकृति के कार्य और दो दिन के लिपिक सम्बन्धी कार्य की आवश्यकता थी। तो भी एक गणनीय प्रक्रिया के प्रयोग से प्राप्त किये जा सकने वाले ऋतुनिष्ठ समजनो की अपेक्षा इसने अधिक शुद्ध ऋतुनिष्ठ समजन प्रदान किया। इसने इसके अन्तर्गत आने वाली श्रेणी के दूसरे गुणो का ज्ञान भी प्रदान किया, जो दूसरे कारणो से मूल्यवान हैं।

ऋतुनिष्ठ प्रतिरूपों में आकस्मिक विचरण

ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप शनै-शनै की अपेक्षा सहसा बदल सकते हैं और तब गतिशील ऋतुनिष्ठ उपाय लागू नही होगा। इन परिवर्तनो मे केवल दो क्रमागत महीनो की आपेक्षिक महत्ता निहित हो सकती है या सारे प्रतिरूप मे परिवर्तन हो सकता है। प्रथम प्रकार का प्रायश होने वाला परिवर्तन ईस्टर के बदलते हुए आँकडो के द्वारा प्रस्तुत हो जाता है।

ईस्टर के लिये समजन—बहुत सी सांख्यिकीय श्रेणियाँ, ईस्टर की तिथि मे होने वाले परिवर्तनो द्वारा, जो 22 मार्च से 25 अप्रैल के मध्य आते है, अत्यधिक प्रभावित होती है। श्रेणियो मे से परचून विक्रय तथा सचरण मे मुद्रा दो ऐसी श्रेणियाँ हैं जो इस प्रकार प्रभावित होती है। बहुविभागीय भण्डार विक्रय ईस्टर से पूर्व प्रचलित वस्त्र-क्रय के प्रभावो को विशेष रूप से दिखाते है। विलम्बित ईस्टर मार्च की अपेक्षा अप्रैल के विक्रय को अधिक बनाने मे प्रवृत्त होगा, तथा सीमाओ के भीतर, अप्रैल मे जितनी अधिक देर से ईस्टर

2 इस प्रविधि की रूपरेखा के लिए इस पुस्तक के द्वितीय सस्करण मे पृष्ठ 350—351 देखिए।

आएगा उतनी ही अधिक यह प्रवृत्ति होगी। दूसरी ओर जब ईस्टर मार्च मे आता है तो मार्च के और सम्भवत फरवरी के विक्रयो मे वृद्धि होगी।[3]

समस्त ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप मे आकस्मिक परिवर्तन—अध्याय 11 में यह बताया गया था कि एक वर्ष न्यूयॉर्क मे एक मोटर गाडी प्रदर्शन केवल जनवरी मे ही नही हुआ था अपितु नवम्बर मे भी हुआ था, नवम्बर का प्रदर्शन उस प्रदर्शन के स्थान पर हुआ जिसे मौलिक रूप मे आगामी जनवरी मे किये जाने की व्यवस्था थी। इसके पश्चात् कुछ वर्ष प्रदर्शन नवम्बर मे होता रहा। न्यूयॉर्क प्रदर्शन की महत्ता इस बात से दीखती थी कि इन्ही प्रदर्शनो मे मोटर गाडियो के अधिकाश नए मॉडल लोगो के सामने प्रस्तुत किये जाते थे। परिवर्तन से पहले मोटर गाडियो के विक्रय की ऋतुनिष्ठ गति ने बसन्त (प्रदर्शन के कुछ मास बाद) मे आधिक्य तथा पतझड और शरद् ऋतु मे कमी को प्रकट किया। परिवर्तन के पश्चात् प्रतिवर्ष दो ऋतुनिष्ठ उच्च प्रमाणित हुए, एक बसन्त मे तथा दूसरा वर्ष के बहुत अन्त मे।

जब समस्त ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप मे अचानक परिवर्तन होता है तो केवल दो ऋतु निष्ठ सूचकाको का परिकलन करना आवश्यक है, एक परिवर्तन से पहले काल के लिए तथा एक परिवर्तन के बाद के वर्षो के लिए। दो सूचकाक या तो स्थिर हो सकते है या परिवर्तनशील, जो भी श्रेणी के अनुकूल हो।

समय निर्धारण मे लघुकालिक विस्थापन—ईस्टर की बदलती हुई तिथि केवल मार्च और अप्रैल पर अधिक प्रभाव डालती है, मोटर गाडियो के प्रदर्शन की तिथि के बदलने पर इसके पहले तथा बाद के कुछ महीनो पर मुख्य रूप से प्रभाव पडा। तथापि, ऋतुसम्बन्धी अवस्थाओ का भी, जो वर्षानुवर्ष बदलती रहती हैं, परिणाम एक वर्ष शीघ्र फसले तथा दूसरे वर्ष देर से फसलें हो सकता है, और न केवल विभिन्न वर्षो मे विभिन्न समयो पर उपज का क्रय-विक्रय होता है, अपितु सम्पूर्ण वर्ष मे वस्तुओ का प्रवाह भी प्रभावित हो सकता है और प्रभाव समस्त प्रतिरूप का कुछ मास बाएँ अथवा दाएँ विवर्तन कर सकता है। इसी प्रकार उपभोक्ता माँग का समय बदल सकता है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि ऋतु कितनी शीघ्र बदलती है।

इस प्रकार ऋतुनिष्ठ प्रतिरूपो का विवर्तन एक कठिन समस्या प्रस्तुत करता है। इसका सर्वाधिक व्यावहारिक हल कदाचित् यह है कि स्थिति को समस्त प्रतिरूप मे अचानक परिवर्तन का विशेष मामला समझा जाए, उन वर्षो (आवश्यक रूप से निकटवर्ती नही) का इकट्ठा वर्ग बनाया जाय जो अपने क्रमो मे उसी प्रकार का समय दिखाते है तथा उतने ऋतुनिष्ठ सूचकाको का परिकलन किया जाए जितने वर्षो के वर्ग हो। इस प्रकार के सूचकाको का परिकलन करने के लिये, कोई कारण नही कि कैलेन्डर वर्ष को अवश्य ही एक इकाई के रूप मे लिया जाए। अपितु, यदि विषयसामग्री कृषि से सम्बन्धित है तो वर्ष को फसल वर्ष मे सम्बन्धित कर दिया जाना चाहिये। कदाचित् मध्य का महीना या तो ऋतुनिष्ठ ऊँचाई या ऋतुनिष्ठ निचाई का होना चाहिये।

परिवर्ती कोणाक—कुछ आर्थिक श्रेणियाँ वर्षानुवर्ष न्यूनाधिक उसी सामान्य ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप को स्थिर रखती है परन्तु कोणाक मे या तो धीरे-धीरे या अचानक उनके

3. बहुविभागीय भण्डार विक्रय श्रेणी मे ईस्टर के समजन करने के लिए फेडरल रिजर्व सिस्टम द्वारा प्रयुक्त एक प्रविधि की विस्तृत व्याख्या के लिए इस पुस्तक के द्वितीय सस्करण मे पृष्ठ 352—359 देखिए।

बदलने की प्रवृत्ति रहती है। यह विशेष रूप से कृषि सम्बन्धी वस्तुओं के भण्डार मे ठीक बैठता है। उदाहरणार्थ, कृषि के भण्डार एक वर्ष से दूसरे वर्ष बदलते हुए ऋतुनिष्ठ कोणाक प्रस्तुत करते है जो पिछले वर्ष से लाई हुई मात्रा, फसल की मात्रा और उपभोग की मात्रा पर निर्भर करता है। इसी प्रकार अपने ऋतुनिष्ठ उतार-चढाव के कोणाक मे पशुधन के पोत-लदान बदलते हुए दीखते है। यहा पर परिवर्तन का सम्बन्ध पशुधन के तत्काल विक्रय के लाभ से हो सकता है इसकी तुलना मे जब कि उन्हें आगे बढाने के लिय या मूल वृद्धि के लिये रखा जाना है। क्योंकि इन नीतियों (पृ० 132 पर वर्णित) के आपेक्षिक लाभ, चक्रों के अन्तर्गत बदल सकते है अत चक्रो मे ऋतुनिष्ठ विचरण मे भी परिवर्तन आ सकता है और प्रतिरूप मे परिवर्तन को पर्याप्त सीमा तक गतिशील ऋतुनिष्ठ के रूप म व्यक्त किया जा सकता है। एक अन्य विनिर्माण मे सर्वाधित ऋतुनिष्ठ कोणाक है जो कि मुश्किल से निर्वाह योग्य आय मे से क्रय के प्रति एक सामान्य चक्रीय प्रवृत्ति द्वारा लाया जाता है। यह स्पष्ट है कि इस परिवर्तन को गतिशील ऋतुनिष्ठ के रूप म विचारा जा सकता है, किन्तु इसमें श्रेढी उपनति प्रकार की न होकर चक्रीय होती है।

यह स्पष्ट होना चाहिये कि जब ऋतुनिष्ठ गति का कोणाक शनै शनै. न बदल रहा हो अपितु सहसा बदल रहा हो और मुख्यतया यह अपूर्वानुमेय हो तो समस्त ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप मे गतिशील ऋतुनिष्ठ कठिनाई का कोई श्रेष्ठतर समाधान नहीं करा सकता जितना कि लघुकाल विवतन द्वारा हो सकता है। यहा पर वर्णन किए गए ऋतुनिष्ठ सूचकाक प्रकारो मे से कोई भी प्रकार कुछ वर्षों मे बहुत अधिक तथा अन्य वर्षो मे बहुत लघु कोणाक प्रदर्शित करेगा। कोणाक म एकाएक परिवर्तन के लिये ऋतुनिष्ठ सूचकाक को शुद्ध करने की विधि का इस पुस्तक[4] मे विस्तार से वर्णन नहीं किया जाएगा, परन्तु सामान्यतया यह प्रविधि उस सम्बन्ध के निर्धारण म निहित है जो प्रत्येक वर्ष के *12*-महीनों के (1) 100 मे विचलन के रूप मे अभिव्यक्त ऋतुनिष्ठ सूचकाक (2) 12-मास केन्द्रित गतिशील औसत म मौलिक मूल्यो मे प्रतिशत विचलन के मध्य उपस्थित है और बाद के प्रतिशतता विचलन शून्य औसत तक समजित किये जाते हैं। प्रत्येक वर्ष के लिये मानो के 12 युग्मो के मध्य सम्बन्ध एक कोणाक अनुपात प्रदान करता है जो 100 से विचलन के रूप मे अभिव्यक्त मूलभूत ऋतुनिष्ठ मानो मे प्रयोग किय जाने के लिये शुद्धि का सकेत करता है। इनमे से प्रत्येक विचलन मे तब 100 को जोड दिया जाता है।

सावधानी का एक शब्द यहा आवश्यक हो सकता है यदि एक गतिशील ऋतुनिष्ठ का प्रयोग किया गया हो तो कोणाक अनुपात मे परिवर्तन आवश्यक रूप से मूलभूत आंकडो के ऋतुनिष्ठ कोणाक मे परिवर्तन का सकेत नही करता। उदाहरणार्थ, ऋतुनिष्ठ कोणाक म शनै शनै वृद्धि कोणाक अनुपात की अपेक्षा ऋतुनिष्ठ सूचकांक मे प्रतिबिम्बित हो जाएगी, परन्तु गतिशील ऋतुनिष्ठ, कोणाक परिवर्तन मे सामान्य उपनति मे किसी सहसा पार्थक्य को पजीकृत करने मे असमर्थ होगा।

विधि के और अधिक परिष्कार

ऋतुनिष्ठ सूचकाको का सातत्य—एक ऋतुनिष्ठ सूचकाक का अध्ययन न केवल सूचकाक के लिये चुने गए 12-मास के काल के लिये अपितु किसी भी क्रमागत 12-मास काल

4 सारणियो और चार्टों सहित पूर्ण विवरण के लिये मूल अंग्रेजी पुस्तक का प्रथम सस्करण, पृष्ठ 518—524 देखिये।

के लिये 100 प्रतिशत होता। तथापि इस अध्याय में वर्णित किसी भी ऋतुनिष्ठ के लिये क्रमागत 12-मास के लिए 100 प्रतिशत होना सत्य नहीं है, यद्यपि प्रगतिशील या गतिशील ऋतुनिष्ठ के सम्बन्ध में असगति केवल नाममात्र की होगी। तो भी विशेषतया कोणाक मे परिवर्तनो के लिये सशोधित ऋतुनिष्ठ सूचकाको के सम्बन्ध मे असगति भयप्रद मात्राओ मे हो सकती है। उस बिन्दु पर जहाँ एक वर्ष समाप्त होता है और दूसरा प्रारम्भ होता है, ऋतु के अनुसार समजित आँकडो की अनियमितता मे कठिनाई स्वयमेव प्रकट होती है, उदाहरणार्थ, हम कल्पना करें कि दिसम्बर 1963 तथा जनवरी 1964 के लिये प्रत्यक असमजित ऋतुनिष्ठ सूचकाक 100 प्रतिशत है तो हम यह कह सकते हैं कि कैलेन्डर वर्षो म कोणाक समजन का प्रयोग किया जाता है। अब आगे कल्पना करो कि कोणाक अनुपात क्रमश 0 5 तथा 1 5 हैं। यह दिसम्बर 1963 के समजित सूचकाक को 50 प्रतिशत तथा जनवरी 1964 के सूचकाक को 150 बना देता है। यह स्पष्ट है कि दिसम्बर तथा जनवरी के मध्य ऋतु के अनुसार समजित आकडो मे अत्यधिक कमी होगी। तो भी थोडा सा विचार किसी को यह विश्वास दिला देगा कि कोणाक मे परिवर्तन पूर्णतया एक महीने के समय मे नही होता अपितु यह कुछ महीनो की अवधि के स्थानान्तरण को प्रस्तुत करता है।

यद्यपि इस समस्या का कोई पूर्णतया सन्तोषजनक समाधान नहीं है तथापि एक बहुत श्रमसाध्य उपचार यह है कि सारी श्रेणी के प्रत्यक क्रमागत 12-मास काल के लिये कोणाक अनुपात का परिकलन किया जाए। उदाहरण के लिये यदि आँकडे 1954 से 1964 मे से होकर जाएँ तो पहला 12-मास काल जनवरी 1954 से दिसम्बर 1954 मे होकर, दूसरा फरवरी 1954 से जनवरी 1955 मे होकर जाएगा, तथा आगे भी इसी प्रकार होगा। सर्वदा इस प्रकार के 121 12-मास काल होगे और कोणाक अनुपात की सख्या भी वही होगी। हम इन अनुपातो को सामूहिक रूप से *गतिशील कोणाक अनुपात* कह सकते है। एक 12-मास गतिशील औसत की समानता का अनुसरण करते हुए इन अनुपातो को, 120 कोणाक अनुपातो को त्यागते हुए, जुलाई 1954 से जून 1964 मे से जाते हुए 2-मास गतिशील औसत पर केन्द्रित होना चाहिए। तब अन्तिम ऋतुनिष्ठ सूचकाक प्राप्त करने के लिये ऋतुनिष्ठ सूचकाको को इन कोणाक अनुपातो के साथ गुणा किया जाता है।

यह विधि श्रमसाध्य है, परन्तु यह पूर्णतया सन्तोषजनक नही है। यद्यपि श्रेणी के सातत्य म कोई भी तीक्ष्ण कटाव नहीं है तो भी इसमे यह दोष है कि कोई भी 12 क्रमागत ऋतुनिष्ठ सूचकाक 100 प्रतिशत पर केन्द्रित नहीं होते। प्रत्येक वर्ष के कोणाक अनुपात का परिकलन करने, अनुपात को छठे अथवा सातवें महीने पर केन्द्रित करने और एक वर्ष से दूसरे वर्ष अकगणितीय विधि से अन्तर्वेशन करने की, पूर्व-वर्णित विधि की अपेक्षा कम शुद्ध परन्तु बहुत ही अल्प श्रमसाध्य विधि और है।

ऋतुनिष्ठ प्रस्पों का सचय—यह बहुधा सत्य है कि एक श्रेणी के ऋतुनिष्ठ विचरण के प्रतिरूप धीरे-धीरे बदल रहे हो, अपने समय मे आगे पीछे हो रहे हों, कोणाक मे बदल रहे हो, अथवा इन तीनो का कोई सम्मिश्रण हो। कोणाक मे परिवर्तन तथा समयों में विवर्तन दिखाने वाले आँकडो के लिये अन्तिम सूचकाको की प्राप्ति की विधि इस प्रकार हो सकती है. (1) ऋतुनिष्ठ ऊँचाई की उत्पत्ति के अनुसार आकडो को उप-कालों मे विभाजित करो; (2) फिर ऋतुनिष्ठ का प्रत्येक ऐसे उप-काल के लिये परिकलन करो, (3) इन ऋतुनिष्ठ सूचकाको का प्रयोग करते हुए प्रत्येक वर्ष के लिये कोणाक अनुपातो

का परिकलन करो (जहा तक सम्भव हो ऊपर वर्णित अन्तर्वेशन विधि का प्रयोग करते हुए), (4) ऋतुनिष्ठ सूचकाका का उपयुक्त कोणाक अनुपातो द्वारा गुणा करो।

ऋतुनिष्ठ व्यवहार के दूसरे सम्मिश्रण अलग उपचार की माग कर सकते है। ऋतुनिष्ठ विचरण को सफलतापूर्वक मापन के लिये अधिकतर बहुत अधिक पटुता की आवश्यकता पडती है। दुर्भाग्यवश, इसे बताने का कोई मार्ग नही है कि हम कब समस्या के सर्वोत्तम समाधान पर पहुँच गए हैं। प्रविधि की जटिलता इस प्रकार का आश्वासन नही देती कि प्राप्त परिणाम उस गति को ठीक प्रकार से मापते हैं जिसके माप के लिये हम चले हैं। विशेषतया यदि आँकड मौलिक रूप से विश्वस्त नही हैं तो विधि के अत्यधिक सूक्ष्म परिष्कार का प्रयास अधिकतर व्यय होने की सभावना है।[5]

निर्माण-विधियो का तर्कसगत आधार—ईस्टर के लिये समजन के अतिरिक्त, जिसकी ओर पृष्ठ 323 पर सकेत किया गया, इस अध्याय म वर्णित विधियाँ अपने द्वारा उत्पन्न किये गए परिणामो की पुष्टि पर निर्भर करत हुए स्वभाव से न्यूनाधिक अनुभवाश्रित प्रकृति की हैं। विधि तभी सन्तोषजनक हो सकती है यदि ऋतुनिष्ठता रहित किये गए आँकडे (1) विभिन्न वर्षों म अन्त वर्ष प्रतिरूप (चक्रीय से भिन्न) की बराबरी नही दिखाते, (2) अपनी गति म अत्यधिक अनियमित नही होते, तथा (3) 12-माम कालो मे भौतिक आँकडो की तरह जो एक ही महत्व के नहीं होत।

इसके विपरीत ईस्टर समजन न अप्रैल विक्रय ऋण माच विक्रय तथा ईस्टर की तिथि के फलनीय सम्बन्ध को ढूँढने का प्रयास किया है। इस विचार को आगे ले जाते हुए दिन के प्रकाश के समय तथा उद्दीप्त लैम्प के विक्रय में या तापमान तथा बर्फ के विक्रय म, या तापमान के सम्मिश्रण और बर्फ के गिरने तथा गैलोश के विक्रय म, एक समय मे सख्यात्मक सम्बन्ध को खोजना सम्भव हो सकता है। इस प्रकार की विधि से सूचकाका का परिकलन हमे सहसम्बन्ध के क्षेत्र म बहुत दूर ल जाएगा, जिसका अध्याय 19—22 मे वर्णन किया गया है। आगे भी, उदाहरण के लिए क्रिसमस के महत्व को विक्रय तथा किसी और कारक के सहसम्बन्ध मे मापना कठिन होगा।

इन दो प्रकार की विधियों के बीच स्थित वह विधि है जो अनुभवाश्रित विधि द्वारा एक प्रथम सन्निकटन ऋतुनिष्ठ सूचकाक प्राप्त करती है तथा फिर इस सिद्धात पर कि ऋतुनिष्ठ गतिया सरल प्रतिरूप प्रस्तुत करेंगी यदि नियत समय पर्याप्त दीर्घ होगा जो सभी अनियमित गतियो को एकदम प्रभावहीन कर दे, तो ऋतुनिष्ठ सूचकाक के साथ एक वक्र को आसजित कर सूचकाक को सरल बनान का प्रयत्न करती है। ऋतुनिष्ठ वक्र की मुक्तहस्त सरलता का अभ्यास थोडे से सांख्यिकीविदो द्वारा किया जाता है। अत गणितीय वक्र को जोडने का प्राय पक्ष नही लिया जाता। न केवल तार्किक आपत्तियाँ ही उठाई जा सकती हैं अपितु सामाजिक कारण भी हो सकते हैं जो सरल गणितीय वक्र में निहित परिरेखीय सरलता मे बाधा डालते हैं।

---

5 उक्त अध्ययन के लिए दि जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, खण्ड 59, सख्या 308, दिसम्बर 1964, पृष्ठ 1063—1077 मे प्रकाशित ई० ज० हनान द्वारा लिखित 'दि एस्टीमेशन आफ ए चेंजिंग सीजनल पैटर्न' देखिए।

16

काल-श्रेणी का विश्लेषण : चक्रीय गतियाँ—उपनति, ऋतुनिष्ठ, एवं अनियमित गतियों के लिए काल-श्रेणी का समंजन

अध्याय 11 मे यह सकेत किया गया था कि मासिक काल श्रेणियाँ प्रकारात्मक रूप से चार महत्त्वपूर्ण गतियो की उपज है दीर्घकालिक उपनति (T), ऋतुनिष्ठ विचरण (S), चक्रीय गतियाँ (C), तथा अनियमित घटावढियाँ (I)। अध्याय 12 तथा 13 मे उपनतियो के प्रकार, उचित प्ररूप तथा उपनति आसजन की विधि कैसे चुनी जाए, इस पर विचार किया गया था। अध्याय 14 और 15 मे ऋतुनिष्ठ विचरणो के प्रकारो तथा ऋतुनिष्ठ विचरण के सूचकाको के निर्धारण की ओर ध्यान दिया गया है। इस अध्याय मे, हम प्रथम वार्षिक काल-श्रेणी आकडो से उपनति के निरसन का विवेचन करेंगे। ऐसा करने से मासिक आकडो मे से ऋतुनिष्ठ विचरण और उपनति दोनो का निरसन हो जाएगा और अनियमित गतियो का सरलन हो जाएगा। अन्तिम परिणाम मुख्य रूप से श्रेणी का चक्रीय गतियो को प्रदर्शित करने वाले समजित आँकडो का समुच्चय होगा।

उपनति के लिए वार्षिक आँकडो का समजन करना

यह वास्तव मे स्पष्ट है कि वार्षिक आँकडे, जो प्रत्येक वर्ष के लिये केवल एक सख्या दिखाते हैं, किसी ऋतुनिष्ठ विचरण का समावेश नही कर सकते। न ही वार्षिक आकडे अनियमित गतियाँ दिखा सकते है, यद्यपि यह सम्भव है कि प्रासगिक गति (जैसे कठोर हडताल या प्रचण्ड अग्नि के कारण उत्पन्न गति) वार्षिक जोड पर प्रभाव डालने के लिये पर्याप्त महत्त्वपूर्ण हो।

सारणी 12.2 मे 1932—1960 के समाचारपत्र विज्ञापनार्थ ऋजु रेखा उपनति का निर्धारण करने के लिये आवश्यक परिकलनो को दिखाया गया था। समीकरण के प्रयोग से प्राप्त उपनति मान 1932—1964 की सारणी 12.2 के अन्तिम स्तम्भ मे दिये गए थे। चार्ट 12 3 ने दोनो प्रेक्षित वार्षिक आँकडो और उपनति को दिखाया। सारणी 16 1, 1932—1964 के प्रेक्षित वार्षिक आँकडो तथा उन्ही वर्षो के उपनति मानो को दोहराती हैं। सारणी 16 1 मे भी हमने प्रत्येक वर्ष के उपनति मानो के प्रतिशत का परिकलन किया है। इन्हें मूल सख्याओ मे से प्रत्येक को सगत उपनति मान से भाग करके तथा 100 से गुणा करके प्राप्त किया है। परिणाम चार्ट 16 1 मे दिखाये गये है। वार्षिक आँकडे

सारणी 16.1

संयुक्त राज्य के समाचारपत्र विज्ञापन के 1932—1964 के आँकड़ों का उपनति समंजन

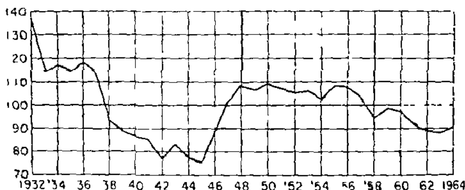
(मूल आँकड़े और उपनति मान पंक्तियों में—दस लाखों में)

वर्ष	मूल आँकड़े Y	उपनति मान Y_c	उपनति का प्रतिशत $100(Y-Y_c)$
1932	1,164 8	857 4	135 9
1933	1,065 5	933 7	114 1
1934	1,178 9	1,010 0	116 7
1935	1,246 0	1,086 2	114 7
1936	1 380 0	1,162 5	118 7
1937	1,409 8	1,238 8	113 8
1938	1,225 4	1,315 0	93 2
1939	1,243 6	1,391 3	89 4
1940	1 268 6	1,467 6	86 4
1941	1,313 2	1,543 9	85 1
1942	1,241 8	1,620 1	76 6
1943	1,396 4	1,696 4	82 3
1944	1,361 3	1 772 7	76 8
1945	1 391 6	1,848 9	75 3
1946	1,729 7	1,925 2	89 8
1947	2,008 6	2,001 5	100 4
1948	2,263 3	2,077 7	108 9
1949	2,302 1	2,154 0	106 9
1950	2,440 2	2,230 3	109 4
1951	2,478 3	2,306 6	107 4
1952	2,505 4	2 382 8	105 1
1953	2,610 5	2,459 1	106 2
1954	2,581 3	2,535 4	101 8
1955	2,843 5	2,611 6	108 9
1956	2,911 0	2,687 9	108 3
1957	2,829 1	2,764 2	102 3
1958	2,685 6	2,840 4	94 6
1959	2,865 6	2 916 7	98 2
1960	2,888 6	2,993 0	96 5
1961	2,777 0*	3,069 3	90 5
1962	2,798 3*	3,145 5	89 0
1963	2,858 6*	3,221 8	88 7
1964	2,973 4*	3,298 1	90 2

* उपनति के परिकलन के लिए प्रयोग में नहीं लाए गए।

मूल आँकड़े सर्वे ऑफ करन्ट बिजनेस के विविध अंकों से।
उपनति मान सारणी 12.2 से।

काल-श्रेणी की घटाबढ़ियों के केवल बहुत अपूर्ण सूचक प्रदान करते हैं, परन्तु चार्ट 16.1 बताता है कि महत्वपूर्ण घटाबढ़ी वार्षिक समाचारपत्र विज्ञापन वंश में हुई है।



चार्ट 16.1 संयुक्त राज्य में समाचारपत्र विज्ञापन के वार्षिक आंकड़े 1932—1964 की उपनति के लिये समजित। 100 प्रतिशत आधार 1961—1964 के लिए टूटी हुई रेखा द्वारा दिखाया गया है क्योंकि उपनति का 1932—1960 के वर्षों के साथ आसजित किया गया था और 1964 तक बढ़ाया गया था। सारणी 16.1 के आंकड़े।

सारणी 16.1 में उपनति का, घटाव की अपेक्षा भाग से निरसन किया गया था। यदि मूल संख्याओं में से उपनति मानों को घटा दिया जाता तो परिणाम सापेक्ष शब्दों की अपेक्षा पूर्ण शब्दों में (पंक्तियाँ दस लाखों में) विचलित होते। अधिकांश उद्देश्यों के लिये, जैसे कि उपनति, किसी तार्किक आधार के सम्बन्ध में, यह जान लेना अधिक उपयोगी है कि विचरण विस्तृत है अथवा लघु। इस प्रकार, 200 के उपनति मान के सम्बन्ध में निर्णय करने पर 50 का विचलन दस गुणा इतना महत्वपूर्ण है जितना तुलना में 2,000 का उपनति मान।

मासिक आँकड़ों का समजन

यद्यपि काल श्रेणी की चक्रीय गतियों के आकलनों पर पहुँचने की दूसरी विधियाँ भी है परन्तु इनमें से इस अध्याय के अन्त में वर्णित तथाकथित "शेष विधि" का ही सामान्यत प्रयोग किया जाता है। इस विधि में ऋतुनिष्ठ विचरण तथा उपनति का निरसन कर चक्रीय अनियमित गतियों को प्राप्त करना निहित है। संकेत रूप में,[1]

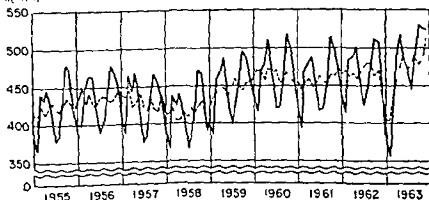
1 $T \times S \times C \times I$ की धारणा प्राय $T+S+C+I$ की धारणा से अधिक उपयोगी है। यह इस कारण है क्योंकि S, C, और I की निरपेक्ष पद की अपेक्षा सापेक्षिक शब्दों में उपनति के सम्बन्ध में परिमाण में अधिकतर लगभग स्थिर रहने की प्रवृत्ति होती है। आगे सामान्यत गतियाँ उस समय अधिक सार्थक होती हैं जबकि उन्हें एक दूसरे की तुलना में सोचा जाता है अपेक्षा इसके कि जब उन पर निरपेक्ष रूप से विचार किया जाता है। इस प्रकार एक ऋतुनिष्ठ सूचकांक का निर्धारण करने के लिए जो महीनों की सापेक्षिक महत्ता में परिवर्तन के साथ बदलता है और चक्रीय गतियों की घटाबढ़ियों की प्रतिशतता की तुलना करने के लिये, एक ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिकलन सम्भव है जो कई वर्षों की अवधि तक समान रहता है। यदि ऋतुनिष्ठ गति को सापेक्ष की अपेक्षा निरपेक्ष रूप में स्थिर समझा जाए तो कभी-कभी श्रेणियों की प्रतिद्वन्द्विता में अधिक अच्छे परिणाम प्राप्त होते हैं। उसका विवेचन पृष्ठ 333—336 पर किया गया है।

$$(T \times S \times C \times I) - S = T \times C \times I \text{ तथा}$$
$$(T \times C \times I) - T = C \times I$$

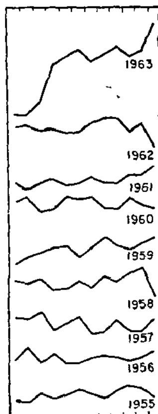
आगे, चक्रीय गतियों के प्राप्त करने के हेतु, जिन्हें कई बार चक्रीय सम्बन्धी की संज्ञा दी जाती है, क्योंकि वे सदा प्रतिशत होते हैं आँकड़ों का प्रायः सरलन कर दिया जाता है। यह इसलिये है क्योंकि चक्रीय अनियमित या चक्रीय गतियाँ शेष रहती हैं इसलिये इस विधि को शेष विधि कहा जाता है।

ऋतुनिष्ठताहीन बनाना—जैसा कि अध्याय 11 में स्पष्ट किया गया है, ऋतुनिष्ठ सूचकांक का स्वयं ऋतुनिष्ठ गति के अध्ययन के उद्देश्य से, अध्ययन किया जा सकता है, ऋतुनिष्ठ घटावढियों को सरल करना, अथवा उनका लाभ उठाने के उद्देश्य से ऋतुनिष्ठ परिवर्तनों को शून्य करना अथवा उनके परिणामों को न्यून करना है। दूसरी ओर, हम ऋतुनिष्ठ विचरण से निर्विघ्न काल-श्रेणी के अध्ययन में रुचि रख सकते हैं, और वह हम ऋतुनिष्ठ विचरण के लिये प्रेक्षित आँकड़ों को समजित करने से सिद्ध करते हैं।

ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिकलन और मासिक आँकड़ों के समुच्चय को ऋतुनिष्ठता-रहित बनाने में इसका प्रयोग चक्रीय गतियों के पृथकत्व में केवल एक पग हो सकता है, दूसरे पग (जिनका शीघ्र ही वर्णन किया जायेगा) उपनति में समजन और अनियमित गतियों का सरलन है। प्रायः फिर भी, केवल ऋतुनिष्ठ विचरण के लिये समजित आर्थिक तथा व्यापारिक श्रेणी के अध्ययन की इच्छा की जा सकती है। इस प्रकार व्यापारी, निर्णय करने में, उपनति एवं ऋतुनिष्ठ गतियों व अतिशीघ्र दिखाई न देने वाले समुच्चय के अनुसार विक्रय बढ़ रहे हैं (अथवा घट रहे हैं) पर अधिक विचार करने की अपेक्षा वर्ष के विशेष ऋतु के लिये साधारणतया प्रत्याशित विक्रय के अनुसार विक्रय की घटाबढ़ी पर, हो सकता है, अधिक ध्यान दे। यह रोचक बात है कि बहुत सी ऋतुनिष्ठता रहित



चार्ट 16.2 1955—1963 के लिए संयुक्त राज्य के प्रकाशकों द्वारा समाचारपत्र कागज़ की खपत (ठोस रेखा) और ऋतुनिष्ठता-रहित आँकड़े (टूटी रेखा)। सारणी 16.2 के आँकड़े।



चार्ट 16 3 1955 से 1963 के लिए सयुक्त राज्य के प्रकाशकों द्वारा समाचारपत्र के कागज की खपत के ऋतुनिष्ठता-रहित आकडो का वर्षानुवर्ष चार्ट । सारणी 16 2 के आकड ।

श्रेणियाँ फेडरल रिजर्व सिम्टम के वाई ऑफ गवर्नर्ज द्वारा प्रकाशित *फेडरल रिजर्व बुलेटिन* मे तथा वाणिज्य विभाग क व्यापारिक अर्थशास्त्र कार्यालय से प्रकाशित *सर्वे ऑफ करट बिजनेस* म दृष्टिगोचर होती है ।

ऋतुनिष्ठ विचरण का निरसन प्राय मूल मानो को ऋतुनिष्ठ सूचकाक से भाग करके सिद्ध किया गया है (और परिणामो को 100 से गुणा करके) जैसा कि सारणी 16 2 म समाचारपत्र कागजा क उपभोग के आँकडो के लिये दिखाया गया है। वह इस प्रकार है - $(T\times S\times C\times I)-S=T\times C\times I$, इसलिये कि ऋतुनिष्ठता-रहित आँकडों मे उपनति तथा अनियमित गतियाँ सन्निहित हैं। सारणी 16 2 के ऋतुनिष्ठता-रहित आँकडे समाचारपत्र के उपभोग मूल अकों सहित चार्ट 16 2 मे दिखाए गए हैं जहाँ पर यह स्पष्ट है कि ऋतुनिष्ठता-रहित आँकडों का वक्र दोनो मे अधिक सरल है । क्योंकि अवधि के अन्तर्गत केवल 9 वर्ष सम्मिलित हैं, अत न तो मूल आँकडे और न ही ऋतुनिष्ठता-रहित आँकडे चक्रीय गतियाँ प्रदर्शित करते हैं। समाचारपत्रो के उपभोग के आँकडे अध्याय 14 मे दृष्टान्त रूप मे इसलिये नही चुने गए थे कि वे ऋतुनिष्ठ विचरणो के समाप्त होने के पश्चात् चक्रीय गतियाँ दिखाएँगे या नहीं, वरन् इसलिए कि श्रेणी मे स्पष्टत ऋतुनिष्ठ था, जिसमे वर्षानुवर्ष कोई परिवर्तन दिखाई नहीं दिया जबकि (चार्ट 15 2 की तरह) गतिशील औसत आँकडों के प्रतिशत का बारह मासिक कोई चार्ट बनाकर उसका परीक्षण

सारणी 16 2

सयुक्त राज्य के प्रकाशको क समाचारपत्र कागज के उपभोग के 1955—1963 के आकडो मे से ऋतुनिष्ठ विचरणो का निरसन

(मूल तथा ऋतुनिष्टता रहित आकड छोट सहस्र टनो मे)

वर्ष तथा मास (1)	मूल आकड (2)	ऋतुनिष्ठ सूचकाक (3)	ऋतुनिष्टता रहित आकड स्तम्भ 2 —स्तम्भ 3 (4)
1955			
जनवरी	384	93 2	412 0
फरवरी	365	88 7	411 5
माच	439	104 0	422 1
अप्रैल	432	104 8	412 2
मई	455	108 4	419 7
जून	422	99 0	426 3
जुलाई	378	89 7	421 4
अगस्त	385	92 3	417 1
सितम्बर	425	100 1	424 6
अक्तूबर	479	110 9	431 9
नवम्बर	462	108 2	427 0
दिसम्बर	419	100 6	416 5
1956			
जनवरी	402	93 2	431 3
फरवरी	398	88 7	448 7
माच	446	104 0	428 8
अप्रैल	462	104 8	440 8
मई	464	108 4	428 0
जून	422	99 0	426 3
जुलाई	389	89 7	433 7
अगस्त	403	92 3	436 6
सितम्बर	435	100 1	434 6
अक्तूबर	477	100 9	430 1
नवम्बर	468	108 2	432 5
दिसम्बर	444	100 6	441 4
1957			
जनवरी	408	93 2	437 8
फरवरा	387	88 7	436 3
माच	463	104 0	445 2
अप्रैल	442	104 8	421 8
मई	466	108 4	429 9
जून	434	99 0	438 4
जुलाई	374	89 7	416 9

सारणी 16 2 वितत

(1)	(2)	(3)	(4)
ग्रास्त	386	92 3	418 2
सितम्बर	434	100 I	433 6
ग्रक्तूबर	465	110 9	419 3
नवम्बर	453	108 2	418 7
दिसम्बर	436	100 6	433 4
1958			
न वरी	386	93 2	414 2
फरवरी	365	88 7	411 5
माच	434	104 0	417 3
ग्रप्रल	423	104 8	403 6
मई	438	108 4	404 1
जन	409	99 0	413 1
जुलाई	365	89 7	406 9
ग्रगस्त	388	92 3	420 4
मितम्बर	413	100 1	412 6
ग्रक्तूबर	470	110 9	423 8
नवम्बर	465	108 2	429 8
दिसम्बर	394	100 6	391 7
1959			
जनवरी	395	93 2	423 8
फरवरी	385	88 7	434 0
माच	458	104 0	440 4
ग्रप्रल	467	104 8	445 6
मइ	484	108 4	446 5
जन	429	99 0	433 3
जुलाई	400	89 7	445 9
ग्रगस्त	423	92 3	458 3
मितम्बर	449	100 1	448 6
ग्रक्तूबर	492	100 9	443 6
नवम्बर	488	108 2	451 0
दिसम्बर	459	100 6	456 3
1960			
जनवरी	432	93 2	463 5
फरवरी	416	88 7	469 0
माच	470	104 0	451 9
ग्रप्रल	477	104 8	455 2
मइ	510	108 4	470 5
जन	462	99 0	466 7
जुलाई	420	89 7	468 2
ग्रगस्त	420	92 3	455 0
सितम्बर	454	100 1	453 5
ग्रक्तूबर	517	110 9	466 2
नवम्बर	497	108 2	459 3
दिसम्बर	457	100 6	454 3

सारणी 16 2 समाप्त

(1)	(2)	(3)	(4)
1961			
जनवरी	422	93 2	452 8
फरवरी	392	88 7	441 9
माच	469	104 0	451 0
अप्रैल	479	104 8	457 1
मई	486	108 4	448 3
जून	447	99 0	451 5
जुलाई	413	89 7	460 4
अगस्त	417	92 3	451 8
सितम्बर	451	100 1	450 5
अक्तूबर	512	110 9	461 7
नवम्बर	499	108 2	461 2
दिसम्बर	473	100 6	470 2
1962			
जनवरी	434	93 2	465 7
फरवरी	415	88 7	467 9
माच	481	104 0	462 5
अप्रैल	487	104 8	464 7
मई	499	108 4	460 3
जून	457	99 0	461 6
जुलाई	423	89 7	471 6
अगस्त	442	92 3	478 9
सितम्बर	479	100 1	478 5
अक्तूबर	511	110 9	460 8
नवम्बर	508	108 2	469 5
दिसम्बर	441	100 6	438 4
1963			
जनवरी	376	93 2	403 4
फरवरी	356	88 7	401 4
माच	435	104 0	418 3
अप्रैल	490	104 8	467 6
मई	516	108 4	476 0
जून	483	99 0	487 9
जुलाई	421	89 7	469 3
अगस्त	443	92 3	480 0
सितम्बर	490	100 1	489 5
अक्तूबर	529	110 9	477 0
नवम्बर	524	108 2	484 3
दिसम्बर	522	100 6	518 9

आंकड़े सारणी 14 5 तथा 14 7 से।

किया गया। तो भी ऋतुनिष्ठताहीन आकडो का वक्र यह सुझाव देता है कि ऋतुनिष्ठ सूचकाक बहुत सन्तोषजनक न हो क्योंकि तीव्र शिखर और गिरावटें बनी रहती हैं। इन परिस्थितियों मे मासिक चार्टो का पुन परीक्षण होना चाहिये। ऋतुनिष्ठता-रहित आँकडो मे दिखाई चोटिया और गिरावटें शेष ऋतुनिष्ठ घटाबढियो का प्रतिनिधित्व नही करती, वरन् जैसा कि सारणी 16 2 मे देखा जा सकता है उन महीनो के असाधारण ऊँचे और नीचे मूल मानों को अऋतुनिष्ठ कारणो मे प्रकट करती हैं।

ऋतुनिष्ठ का परीक्षण—ऋतुनिष्ठ सूचकाको के परीक्षण मे यह देखना है कि क्या इसके प्रयोग न श्रेणी से सभी ऋतुनिष्ठ गतियो का निरसन कर दिया है। इस उद्देश्य के लिये चार्ट 16 2 जैसा चार्ट प्रयोग मे लाया जा सकता है, परन्तु एक वर्ष के पश्चात् दूसरे वर्ष का ऋतुनिष्ठता रहित आकडो का चार्ट 16 3 अधिक अच्छा है। इस चार्ट से यह देखा जा सकता है कि ऋतुनिष्ठता रहित आकडो मे अभी भी उपस्थित उतार-चढाव मुख्यतया अनियमित गतिया है जो श्रेणी मे चक्रीय उतार-चढाव की कमी के कारण दूर हो गई है। जब समजित श्रेणी म शेष ऋतुनिष्ठ गतियाँ उपस्थित हो तो वर्षानुवर्ष चार्ट का प्रत्येक वक्र एक दूसरे के साथ समानता प्रकट करेगा।

ऋतुनिष्ठ के घटाव द्वारा शोधन—कभी-कभी ऐसा होता है, जैसा कि वर्ष 1963 के चार्ट 16 3 मे है कि जब ऋतुनिष्ठ सूचकाक से भाग करके ऋतुनिष्ठ का निरसन किया जाता है तो विलक्षण परिणाम प्राप्त होते हैं। विशेष रूप से ऐसी स्थिति की सभावना तब होती है जब कि ऋतुनिष्ठ गति लाक्षणिक रूप मे एक अथवा अधिक महीनो मे लगभग शून्य तक गिर जाती है। फिर यदि दिये हुए वर्ष मे उन महीनों के लिये मूल आकडे वस्तुत शून्य म ऊपर रहे तो अत्यन्त निम्न ऋतुनिष्ठ सूचकाक प्रतिशतता द्वारा भाग ऋतुनिष्ठता रहित आकडो को बहुत ही नुकीली चोटी पर ऊपर ले जाएगा। यद्यपि ऋतुनिष्ठ गति शून्य अथवा शून्य के निकट तक न गिरे, तो भी ऐसे दृष्टान्त कठिन हैं जिनमे ऋतुनिष्ठ प्रतिरूप सापेक्षिक रूप की अपेक्षा निरपेक्ष रूप से एक-सा रहे। यह स्पष्ट हो जाएगा यदि गतिशील औसत की प्रतिशतताओं के विस्तृत होने की प्रवृत्ति हो जबकि मूल आँकडे लघु तथा निम्न स्तर पर हो जबकि मूल आकडे उच्च स्तर पर हो।

एक सामान्य उपाय निम्न प्रकार से है। किसी भी यथोचित विधि से ऋतुनिष्ठ सूचकाक का परिकलन करो। अब ऋतुनिष्ठ सूचकाक को (प्रतिशतता विचलनो मे व्यक्त) प्रतिवर्ष उस वर्ष की मूल श्रेणी के औसत मान द्वारा गुणा करके सूचकाक को मूल आँकडों के रूप मे परिवर्तित कर दिया जाता है। तब ऋतुनिष्ठ सूचकाक को मूल आँकडो मे से बीजगणित के अनुसार घटा कर ऋतुनिष्ठ का निरसन किया जाता है।

प्रथम दृष्टान्त मे, ऐसे ढग से जिससे कि सापेक्षिक रूप की अपेक्षा निरपेक्ष रूप मे ऋतुनिष्ठ सूचकाक प्राप्त हो, सूचकाक का परिकलन करना वाछनीय हो सकता है। यह तब इस प्रकार होगा यदि ऋतुनिष्ठ गतियाँ प्रतिवर्ष प्रतिशतता विचलनों की अपेक्षा निरपेक्षत एक जैसी प्रतीत हा। मूल आँकडों के चार्ट का परीक्षण यह सकेत कर सकता है कि यह ठीक है अथवा नही। यदि प्रमाण यह सकेत करता है कि निरपेक्ष विचलनो के सूचकाक का परिकलन किया जाना चाहिये तो यह आवश्यक है कि उन उपायो मे से जिनसे पाठक पहले ही परिचित है, एक उपाय को ग्रहण करें। उदाहरणार्थ, यदि गतिशील औसत विधि का प्रयोग किया जाता है, तो गतिशील औसत को मूल आँकडो म बाँटने की अपेक्षा

उनमे से घटाया जाता है, और अन्तिम अ।भसूचको का शुद्धि कारक द्वारा जमा या घटाव मे कुल शून्य तक समजित करते हुए सूचकांक पहल की तरह उसी बिन्दु से बनाया जाता है। सयोगवश, इस पर ध्यान दिया जाना चाहिये कि अध्याय 14 मे वर्णित युक्तियो मे से कोई भी एक ऋतुनिष्ठ के परिकलन की घटाव विधि पर आधारित हो। के सम्पर्कसापक्ष विधि (अध्याय 14 मे वर्णित) को निम्न प्रकार स भी सरलता से व्यवहार म लाया जा सकता है (1) प्रत्येक मास मे से पिछल माम को घटा कर सम्पर्क अन्तरो को प्राप्त करो, (2) प्रतिमास इन सम्पर्क अन्तरा की औसत निकालो (3) प्रथम मास के सम्पर्क अन्तरो को शून्य रहने दो, और अन्तरो को उत्तरोत्तर योग से जोड दो, (4) शुद्धि कारक के उत्तरोत्तर घटाव द्वारा उपनति (ऊर्ध्वमुखी) के लिये शृखला अन्तरो को ठीक करो, (5) सतत शुद्धि कारक के योग अथवा घटाव द्वारा शृखला अन्तरो को योग शून्य तक समजित करो।

ऋतुनिष्ठ तथा उपनति के लिये समजन—इस भाग के अधिकाश शेषाश के दृष्टान्त के रूप मे हम समाचार विज्ञापन परम्परा के आकडो का प्रयोग करेंगे, जिसके लिय उपनति को अध्याय 12 मे मापा गया था और जिसके एक भाग के लिये अध्याय 15 मे एक गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकाक का परिकलन किया गया था। सामान्य प्रविधि म प्रथम, ऋतुनिष्ठ उतार-चढाव को हटाना सम्मिलित है, जो

$$(T \times S \times C \times I) - S = T \times C \times I$$

प्रदान करती है, और दूसरे मे

$$(T \times C \times I) - T = C \times I$$

प्रदान करने के लिए उपनति का निरसन सम्मिलित है।

हम जनवरी 1932 से दिसम्बर 1964 तक के समाचारपत्र विज्ञापन परम्परा के आँकडो का प्रयोग करेंगे। चार्ट 16 4 मे असमजित मूल आँकडे दिखाए गए हैं। ऋतुनिष्ठ विचरण का उन्मूलन ठीक उसी प्रकार से सिद्ध हो जाता है जैसे कि मूल आँकडो को ऋतुनिष्ठ सूचकाको द्वारा भाग देने मे समाचारपत्र कागज के उपभोग के आँकडो का वर्णन किया गया है। इस प्रविधि का सारणी 16 3 म सकेत किया गया है। समाचारपत्र विज्ञापन मे प्रयुक्त ऋतुनिष्ठ सूचकाक थे (1) 1932—1963 के लिये गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकाक तथा (2) 1963 के मान 1964 म दोहराए गए। 1964 के लिये 1963 के ऋतुनिष्ठ सूचकाक का प्रयोग प्रचलित विधि से होता है जबकि गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकाक का (अनुवर्ती आँकडो की अनुपलब्धि के कारण) विस्तार करना सम्भव नही है। गतिशील ऋतुनिष्ठ सूचकाक के 1954—1963 के भाग के निर्धारण का वर्णन पिछले अध्याय म किया गया था, और सूचकाक सारणी 15 3 म दृष्टिगोचर था। ऋतुनिष्ठ सूचकाको को लेखाचित्र विधि से चार्ट 11 9 म दिखाया गया था। पत्रिका विज्ञापन के ऋतुनिष्ठता रहित आँकडो को सारणी 16 3 के चौथे स्तम्भ म और चार्ट 16 4 म दिखाया गया है।

अगल पग मे उपनति का निरसन सम्मिलित है, प्रविधि वही है जैसी कि सारणी 16 1 मे दिखायी गयी है, अतिरिक्त इसके कि अब हम मासिक आँकडो की व्याख्या कर रहे हैं और उपनति समीकरण को अवश्यमेव मासिक पदो मे रखना चाहिये। ध्यान दीजिये जबकि हमारी प्रस्तुत व्याख्या 1932—1964 के वर्षों से सम्बन्धित है उपनति समीकरण को

सारणी 16 3

संयुक्त राज्य समाचारपत्र विज्ञापन के ऋतुनिष्ठ विचरण तथा उपनति 1933—1964 के लिये आंकडों का समजन

(मल आंक- ऋतुनिष्ठता रहित आंकड तथा उपनति मान दस लाख पक्तियो मे।)

वर्ष तथा मास	मूल आंकड $T\times S\times C\times I$	ऋतुनिष्ठ सूचकांक	ऋतुनिष्ठता रहित आंकड $T\times C\times I$ स्तम्भ (2) — स्तम्भ (3) $\times 100$	उपनति मान T	चक्रीय अनियमित प्रतिशतताएँ $C\times I$ स्तम्भ (4) — स्तम्भ (5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1933					
जनवरी	78 0	87 1	89 6	74 8	119 8
फरवरी	72 5	83 5	86 8	75 4	115 1
मार्च	76 4	106 5	71 7	75 9	94 5
अप्रल	91 1	108 8	83 7	76 4	109 6
मई	94 6	111 2	85 1	76 9	110 7
जून	93 2	103 3	90 2	77 5	116 4
जुलाइ	78 3	86 5	90 5	78 0	116 0
अगस्त	86 3	88 7	97 3	78 5	123 9
सितम्बर	92 6	98 9	93 6	79 1	118 3
अक्तूबर	106 0	112 0	94 6	79 6	118 8
नवम्बर	99 8	108 5	92 0	80 1	114 9
दिसम्बर	96 7	105 0	92 1	80 7	114 1
1934					
जनवरी	82 5	86 2	95 7	81 2	117 9
फरवरी	80 8	84 0	96 2	81 7	117 7
मार्च	103 6	106 5	97 3	82 2	118 4
अप्रल	107 5	108 7	98 9	82 8	119 4
मई	112 1	112 2	99 9	83 3	119 9
जून	103 6	102 2	101 4	83 8	121 0
जुलाई	83 2	85 4	97 4	84 4	115 4
अगस्त	87 7	87 3	100 5	84 9	118 4
सितम्बर	96 4	99 3	9[illegible] 1	85 4	113 7
अक्तूबर	108 8	112 1	97 1	86 0	112 9
नवम्बर	107 0	108 7	98 4	86 5	113 8
दिसम्बर	105 7	107 4	98 4	87 0	113 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1963					
जनवरी	197 7	84 7	233 4	65 6	87 9
फरवरी	190 3	82 8	229 8	266 2	86 3
मार्च	238 7	101	254 7	266 7	88 0
अप्रैल	241 1	103 9	237 1	267 2	86 9
मई	268 7	110 9	242 3	267 8	90 5
जून	243 1	01 0	240 7	268 3	89 7
जुलाई	212 5	89 8	236 6	268 8	88 0
अगस्त	233 1	98 2	237 4	269 4	88 1
सितम्बर	246 7	101 8	242 3	270 0	89 7
अक्तूबर	267 7	110 1	243 1	270 4	89 9
नवम्बर	258 4	110 0	234 9	270 9	86 7
दिसम्बर	260 6	105 1	248 0	271 5	91 3
1964					
जनवरी	210 6	84 7	248 6	272 0	91 4
फरवरी	210 4	82 8	254 1	272 5	93 2
मार्च	248 0	101 7	243 9	2 3 1	89 3
अप्रैल	265 1	103 9	255 1	273 6	93 2
मई	275 9	110 9	248 8	274 1	90 8
जून	247 0	101 0	244 6	274 7	89 0
जुलाई	226 5	89 8	252 2	275 2	91 6
अगस्त	238 0	98 2	242 4	275 7	87 9
सितम्बर	248 2	101 8	243 8	276 2	88 3
अक्तूबर—	265 0	110 1	240 7	276 8	87 0
नवम्बर	276 4	110 0	251 3	277 3	90 6
दिसम्बर	262 3	105 1	249 6	277 8	89 8

सर्वे आफ करन्ट बिजनेस के विभिन्न अंकों से समाचारपत्र विज्ञापन परम्परा। ऋतुनिष्ठ सूचकांक कायम चक्र से 1933—1953 के लिए बनाते हुए न। दिखाए सारणी 15 3 से 1954—1963 के लिये बनाते हुए 1964 में वही जो 1963 में। समीकरण से उपनति मान पृष्ठ 342 पर दिये गए।

1932—19 0 के काल में आमंजित किया गया था और उसे 1964 तक बढ़ाया गया था। पृष्ठ 249 पर उपनति को मासिक सम्बन्ध में इस प्रकार पाया गया

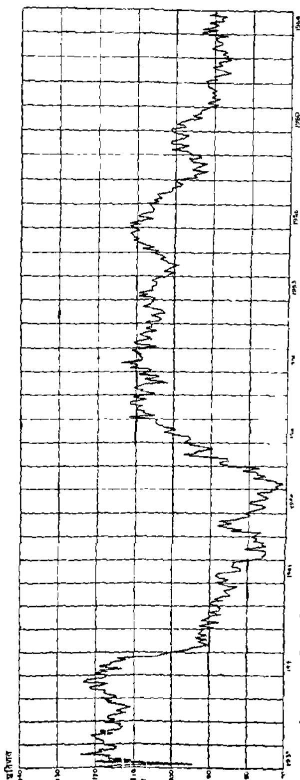
$$Y = 160\ 698? + 0\ 5?97X$$

उद्गम जुलाई 1946 X इकाइयां एक मास।

सारणी 16 3 के स्तम्भ 5 में प्रदर्शित उपनति मान इस समीकरण से प्राप्त किए गए। अब सारणी के स्तम्भ 6 में चक्रीय अनियमित मानों का उत्तान कानवनियम सारणी 16 3 के स्तम्भ 4 के ऋतुनिष्ठता रहित मानों में से प्रत्येक को संगत उपनति मान $[(T \times C \times I) - T - C \times I]$ द्वारा विभाजित किया जाना है। इन चक्रीय अनियमित मानों का चार्ट 16 5 में दिखाया गया है। यहाँ ध्यान देना आवश्यक है कि सारणी 16 3 के स्तम्भ 6

चार्ट 16 4 संयुक्त राज्य में समाचारपत्र विज्ञापन (खण्डित रेखा) तथा ऋतुनिष्ठता-रहित आँकड़े (मोटी रेखा), 1933—1934 । आँकड़े

सारणी 16 3 से और उस सारणी से हटाए गए वर्षों (जिन्हें दिखाया नहीं गया) की काय सूचियों से ।



चार्ट 16 5. ऋतुनिष्ठ गतियों तथा उपनति के लिये समजित संयुक्त राज्य में समाचारपत्र विज्ञापन, **1933—1964** । जोकि सारणी 16 3 से और उस सारणी में से छोड़े गए वर्षों के लिए कार्य सूचियों से (जिन्हें दिखाया नहीं गया) सारणी 16 3 के स्रोत संकेत को भी देखें ।

में प्रदर्शित मान दस लाखों में पत्तियाँ नहीं हैं, वरन् प्रतिशतताएँ हैं। जब ऋतुनिष्ठ सूचकांक से भाग करके ऋतुनिष्ठ गतियों का निरसन किया जाता है (जो प्रतिशतताओं की एक श्रेणी है), तो ऋतुनिष्ठता-रहित आँकड़ों को सर्वदा उन्हीं इकाइयों में दिखाया गया है जैसे कि प्रारम्भिक आँकड़े दिखाए गए थे। उपनति, तो भी, सर्वदा मूल इकाइयों के रूप में है, इस प्रकार कि जब श्रेणी की उपनति का निरसन किया जाता है तो फलित आँकड़े प्रतिशतताएँ होती है।

सारणी 16.3 में चक्रीय अनियमित गतियों को प्रथम ऋतुनिष्ठ विचरण तथा फिर उपनति का निरसन करके प्राप्त किया गया था। सकेताक्षरों में प्रविधि थी

$(T\times S\times C\times I)-S=T\times C\times I$, ऋतुनिष्ठता-रहित आँकड़े, और

$(T\times C\times I)-T=C\times I$, चक्रीय अनियमित गतियाँ।

यदि वाञ्छित हो तो अवश्य ही हम पहले उपनति और फिर ऋतुनिष्ठ विचरण का निरसन कर सकते थे, इस प्रकार

$(T\times S\times C\times I)-T=S\times C\times I$, उपनति के लिए समजित आँकड़े तथा

$(S\times C\times I)-S=C\times I$, चक्रीय अनियमित गतियाँ।

दूसरी सम्भावना उपनति और ऋतुनिष्ठ मानों को एक साथ गुणा करने (ऋतुनिष्ठ प्रतिशतताओं को दशमलव अनुपातों के रूप में प्रयुक्त करके) और दोनों गतियों का एक ही साथ निरसन करने में, निहित है। सकेताक्षरों में, यह है

$(T\times S\times C\times I)-(T\times S)=C\times I$, चक्रीय अनियमित गतियाँ।

सारणी 16.4, 1963 के समाचारपत्र विज्ञापन परम्परा के लिये इन तीनों सम्भावित प्रविधियों को व्यक्त करती है। ध्यान दीजिये कि तीन प्रविधियों से अन्तिम परिणाम, जिन्हें सारणी 16.4 के प्रत्येक भाग के स्तम्भ 6 में दिखाया गया है, या तो पूर्णतया मिलते है या सन्निकटन के कारण कभी-कभी 0.1 तक भिन्न हैं।

ऋतुनिष्ठ विचरण और उपनति का समजन करने की तीनों प्रविधियों में से प्रथम वर्णित प्रविधि का ही प्राय अधिकतम प्रयोग होता है क्योंकि ऋतुनिष्ठ विचरण के लिये समजित श्रेणी का अध्ययन करने की तथा चक्रीय अनियमित गतियों पर ध्यान देने की प्राय इच्छा की जाती है। क्योंकि कोई मासिक श्रेणी को केवल उपनति के लिये समजित करने में कठिनता से रुचि लेगा, अत दूसरी प्रविधि प्राय प्रयुक्त नहीं की जाती। यदि विश्लेषण का एकमात्र उद्देश्य चक्रीय अनियमित गतियों को प्राप्त करना है (या तो अन्तिम उद्देश्य के रूप में या चक्रीय गतियों को प्राप्त करने के एक पग के रूप में), तो सारणी 16.4 में दिखाई गई तीसरी विधि दूसरी दोनों विधियों से थोडा कम समय लेने वाली है, क्योंकि अधिकांश प्रकार के परिकलन-यन्त्र गुणाओं की श्रेणी को अधिक शीघ्रता से कर सकते हैं जो दूसरी विधियों में विद्यमान विभाजन की दो श्रेणियों में से एक को प्रतिस्थापित करती हैं।

तथापि चक्रीय अनियमित गतियाँ प्राप्त की जाती है, उनमा ो को प्राय "प्रसामान्य" की प्रतिशतताओं के रूप में अभिहित किया जाता है। शब्द "प्रसामान्य" का प्रयोग प्रायश अर्थशास्त्र, व्यापार, मनोविज्ञान, सांख्यिकी, तथा अन्य क्षेत्रों में किया जाता है, और

इसे सर्वदा एक ही अर्थ में प्रयुक्त नही किया जाता। इस उदाहरण मे, "प्रसामान्य" शब्द श्रेणी की सयुक्त उपनति और ऋतुनिष्ठ गतियो की ओर सकेत करता है, भाव यह है कि दीर्घ-काल की दृष्टि से एक उद्योग के लिये सतत प्रकार से बढना (या घटना) प्रसामान्य है, और लघु-काल की दृष्टि से ऋतुनिष्ठ विचलन का विद्यमान होना प्रसामान्य है। सयुक्त रूप से लिए जाने पर दोनो गतिया "प्रसामान्य" है।

अनियमित गतियो का समरेखण—पहले ही निरसित शक्तिया के अतिरिक्त, शक्तियो के समूह की पारस्परिक क्रिया मुख्यतया उन अनियमित गतियो के लिये उत्तरदायी है जो प्राय. ऋतुनिष्ठ विचरण एव उपनति के लिये समजित श्रेणी के वक्र मे दिखाई जाती हैं। समाचारपत्र विज्ञापन परम्परा मे अनियमित उतार-चढाव चार्ट 16 5 मे स्पष्ट है। कभी अनियमित उतार-चढाव उत्पन्न हो सकते हैं क्योकि ऋतुनिष्ठ सूचकाक जिसे प्रयुक्त किया गया था, इतना श्रेष्ठ नही जितना कि वाछित था। समाचारपत्र विज्ञापन परम्परा के लिये ऋतुनिष्ठ सूचकाक पर पूर्व विचार से यह सकेत मिल जाता है कि वह सतोषजनक था।

सारणी 16 4

1963 के लिए सयुक्त राज्य समाचारपत्र विज्ञापन की चक्रीय-अनियमित गतियाँ प्राप्त करने के लिए तीन विधियाँ

I. ऋतुनिष्ठ विवरण के लिए और फिर उपनति के लिए समजन।

मास (1)	मूल आँकडे $T \times S \times C \times I$ (2)	ऋतुनिष्ठ सूचकाक S (3)	ऋतुनिष्ठता-रहित आँकड $T \times C + I$ [स्तम्भ (2) — स्तम्भ (3)] × 100 (4)	उपनति मान T (5)	चक्रीय-अनियमित प्रतिशतताएँ $C \times I$ स्तम्भ (4) — स्तम्भ (5) (6)
जनवरी .	197 7	84 7	233 4	265 6	87 9
फरवरी	190.3	82 8	229 8	266 2	86 3
मार्च . . .	238 7	101 7	234 7	266 7	88 0
अप्रैल .	241.1	103.9	232 1	267 2	86.9
मई	268 7	110 9	242 3	267 8	90 5
जून . .	243.1	101 0	240 7	268 3	89.7
जुलाई	212.5	89 8	236 6	268 8	88 0
अगस्त . .	233 1	98 2	237.4	269 4	88.1
सितम्बर	246 7	101.8	242.3	270 0	89.7
अक्तूबर . .	267.7	110.1	243.1	270 4	89.9
नवम्बर .	258 4	110 0	234 9	270.9	86.7
दिसम्बर . .	260 6	105 1	248 0	271 5	91.3

II. उपनति के लिए और फिर ऋतुनिष्ठ विचरण के लिए समंजन।

मास (1)	मूल आँकड़े $T \times S \times C \times I$ (2)	उपनति मान T (3)	उपनति प्रतिशत $S \times C \times I$ स्तम्भ (2) ÷ स्तम्भ (3) (4)	ऋतुनिष्ठ सूचकांक S (5)	चक्रीय-अनियमित प्रतिशतताएँ $C \times I$ स्तम्भ (4) ÷ स्तम्भ (5) (6)
जनवरी	197.7	265.6	74.4	84.7	87.9
फरवरी	190.3	266.2	71.5	82.8	86.3
मार्च	238.7	266.7	89.5	101.7	88.0
अप्रैल	241.1	267.2	90.2	103.9	86.8
मई	268.7	267.8	100.3	110.9	90.5
जून	243.1	268.3	90.6	101.0	89.7
जुलाई	212.5	268.8	79.1	89.8	88.0
अगस्त	233.1	269.4	86.5	98.2	88.1
सितम्बर	246.7	270.0	91.4	101.8	89.8
अक्तूबर	267.7	270.4	99.0	110.1	89.9
नवम्बर	258.4	270.9	95.4	110.0	86.7
दिसम्बर	260.6	271.5	96.0	105.1	91.3

III. संयुक्त उपनति तथा ऋतुनिष्ठ गतियों के लिए समंजन।

मास (1)	मूल आँकड़े $T \times S \times C \times I$ (2)	उपनति मान T (3)	ऋतुनिष्ठ सूचकांक S (4)	"सामान्य" मान $T \times S$ स्तम्भ (3) × स्तम्भ (4) (5)	चक्रीय-अनियमित प्रतिशतताएँ $C \times I$ स्तम्भ (2) ÷ स्तम्भ (5) (6)
जनवरी	197.7	265.6	84.7	224.8	87.9
फरवरी	190.3	266.2	82.8	220.4	86.3
मार्च	238.7	266.7	101.7	271.2	88.0
अप्रैल	241.1	267.2	103.9	277.6	86.8
मई.	268.7	267.8	110.9	297.0	90.5
जून..	243.1	268.3	101.0	271.0	89.7
जुलाई	212.5	268.8	89.8	241.4	88.0
अगस्त	233.1	269.4	98.2	264.6	88.1
अक्तूबर	246.7	270.0	101.8	274.9	89.8
सितम्बर...	267.7	270.4	110.1	297.7	89.9
नवम्बर....	258.4	270.9	110.0	289.0	86.7
दिसम्बर...	260.6	271.5	105.1	285.3	91.3

आँकड़े सारणी 16.3 के नीचे दिए गए स्रोतों से।

एक श्रेणी मे प्रति-समरेखण के सलग्न भय के बिना अनियमित घट-बढ का पूर्णतया निरसन नही किया जा सकता। तथापि चक्रीय गतियों के स्पष्टतर समाधान के लिये, अल्पविधि गतिशील औसत के प्रयोग से अनियमित गतियो को समरेखित किया जा सकता है। चार्ट 16 5 के परीक्षण से यह दिखाई देता है कि अनियमित गतियों मे से अधिकाश एक मास की अवधि की है, यद्यपि कभी कभी, जैसे कि 1934 के प्रथमार्ध मे, वे एक मास से अधिक ठहरती हुई दिखाई देती है। इन गतियो को समरेखित करने के लिये, हम द्वि-मासीय गतिशील औसत का प्रयोग कर सकते थे। अपवाद यह है कि इस प्रकार की औसत के मानों को महीनो के प्रत्येक युग्म के बीच आलेखित किया जाना चाहिये। यदि हमे तीन महीनो की औसत निकालनी होती तो औसत उचित रूप से मध्य के महीने के सामने आएगी, परन्तु हमे एक अन्य गम्भीर स्थिति का सामना करना पडेगा यदि प्रथम और तृतीय मास ऊँचे हैं और द्वितीय मास नीचा, तो परिणामत औसत ऊँची होगी, यदि पहला और तीसरा महीना नीचा और दूसरा महीना ऊँचा हो तो औसत नीची होगी। अत कभी-कभी एक त्रैमासिक औसत श्रेणी मे विपरीत गतियाँ उत्पन्न करेगी। दोनो पूर्ववर्ती कठिनाइयो पर त्रैमासिक गतिशील औसत भारित 1, 2, 1 के प्रयोग द्वारा, जो वास्तव मे एक केन्द्रित द्विमासिक गतिशील औसत है विजय प्राप्त की जा सकती है। सारणी 16 5 बताती है कि किस प्रकार यह औसत प्राप्त की जाती है पहले चक्रीय अनियमित मानों के लिये एक त्रैमासिक गतिशील योग भारित 1, 2, 1 प्राप्त किया जाता है, और तब गतिशील योग मानो मे से प्रत्येक को गतिशील औसत पर पहुँचने के लिये 4 से भाग किया जाता है। प्रत्येक योग को अलग-अलग प्राप्त करने और क्रमिक अनुयोगो का उपयोग न करके जैसाकि हमने सारणी 14 5 मे 13—मास भारित गतिशील योग के परिकलन मे किया था, गतिशील योगो को एक सकलन यन्त्र के द्वारा प्राप्त करना चाहिये। गतिशील औसतो को, गतिशील योगो को, 4 द्वारा भाग करने की अपेक्षा, 0 25 से गुणा करके प्राप्त करना चाहिए, क्योंकि जब सतत गुणक का उपयोग किया जाता है तो अधिकाश परिकलन यन्त्र अति शीघ्र परिणाम प्रदान करेगे। ध्यान दीजिये कि सारणी 16 5 के स्तम्भ मे वही आँकडे है जो सारणी 16 3 के स्तम्भ 6 मे हैं। वास्तविक व्यवहार मे सारणी 16 5 के स्तम्भ 3 और 4 सारणी 16 3 के अतिरिक्त स्तम्भो के रूप मे सम्मिलित किये जायेगे। इस पुस्तक मे छपे पृष्ठ पर इतनी बडी सारणी दिखाने मे कठिनाई के कारण यहाँ दो विभिन्न सारणियाँ प्रदर्शित की गई है। ध्यान दीजिये कि श्रेणी के प्रथम तथा अन्तिम महीने के लिये कोई त्रैमासिक गतिशील औसत अक नही होगा।

त्रैमासिक गतिशील औसत भारित 1, 2, 1 के प्रयोग से चक्रीय अनियमित मानो को समरेखित करने का परिणाम चार्ट 16 6 मे दिखाया गया है। यह स्पष्ट है कि यह वक्र चार्ट 16 5 के वक्र की अपेक्षा अधिक समरेखित है, यद्यपि कुछ स्थल ऐसे हैं जहाँ पर गतिशील औसत इतनी कम अवधि की है कि वह अनियमित घट-बढो का पूर्णतया समरेखण नहीं कर सकती। एक श्रेणी से अनियमित गतियो का प्राय पूर्णतया निरसन नही किया जाता। उनके पूर्णतया निरसन के लिये सम्भवत मुक्तहस्त समरेखण अथवा तीन महीने से अधिक अवधि वाली गतिशील औसत के प्रयोग की आवश्यकता पडे। किसी भी दशा मे, समरेखण प्रविधि को चक्रीय गतियो के मोड बिन्दुओ को कदापि छिपाना नही चाहिए। क्योंकि चार-मास गतिशील औसत मे वही कमियाँ हैं जो कि दो-मास गतिशील औसत मे, तो व्यावहारिक

सारणी 16.5

संयुक्त राज्य समाचार पत्र विज्ञापन के आंकड़ों की चक्रीय गतियों का परिकलन
1933—1964

वर्ष तथा मास (1)	चक्रीय अनियमित प्रतिशतताएं $C \times I$ (2)	त्रैमासिक गतिशील योग स्तम्भ (2) के 1 2 1 भारित (3)	चक्रीय प्रतिशतताएं C स्तम्भ (3) ÷ 4 (4)
1933			
जनवरी	119.8	474.6	118.7
फरवरी	[illegible]	444.5	111.1
मार्च	[illegible]	413.7	103.4
अप्रैल	109.6	[illegible]	106.1
मई	110.7	447.4	111.9
जून	116.4	[illegible]	114.9
जुलाई	116.0	[illegible]	118.1
अगस्त	[illegible]	482.1	120.5
सितम्बर	115	479.3	119.8
अक्तूबर	118.8	470.8	117.7
नवम्बर	114.9	462.7	115.7
दिसम्बर	114.1	461.0	115.3
1934			
जनवरी	117.9	476.6	116.9
फरवरी	117	471.7	117.9
मार्च	118.4	473.9	118.5
अप्रैल	119.4	477.1	119.3
मई	119.9	480.2	120.1
जून	121.0	477.3	119.3
जुलाई	115.4	470.2	117.6
अगस्त	118.4	465.9	116.5
सितम्बर	113.7	458.7	114.7
अक्तूबर	112.9	453.3	113.3
नवम्बर	113.8	453.6	113.4
दिसम्बर	113.1	457.9	114.5
1963			
जनवरी	87.9	347.7	86.9
फरवरी	86.5	348.5	87.1
मार्च	88.0	349.2	87.3
अप्रैल	86.9	352.3	88.1
मई	90.5	357.6	89.4
जून	89.7	357.9	89.5
जुलाई	88.0	353.8	88.5

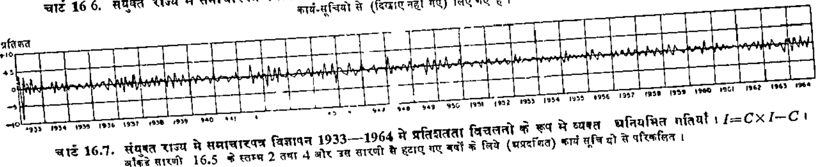
(1)	(2)	(3)	(4)
अगस्त ...	88 1	353 9	88 5
सितम्बर	89 7	357 4	89 4
अक्तूबर	89 9	356 2	89 1
नवम्बर	86 7	354 6	88 7
दिसम्बर ...	91 3	360 7	90 2
1964			
जनवरी	91 4	367 3	91 8
फरवरी ..	93 2	373 1	91 8
मार्च	89 3	365 0	91 3
अप्रैल	93 2	366 5	91 6
मई ..	90 8	363 8	91 0
जून ...	89 0	360 4	90 1
जुलाई	91 6	360 1	90 0
अगस्त ...	87 9	355 7	88 9
सितम्बर ...	88 3	351 5	87 9
अक्तूबर	87 0	352 9	88 2
नवम्बर	90 6	358 0	89 5
दिसम्बर . .	89 8		...

चक्रीय अनियमित प्रतिशतताए सारणी 16 3 से।

गतिशील औसत, जो सारणी 16 5 मे प्रयुक्त औसत से अगली अधिक लम्बी अवधि की है, एक (भारित) पाँच-मास गतिशील औसत होगी। पाँच मास गतिशील औसत मानो को प्रत्येक पाँच मास के समूह के तीसरे महीने के सामने रखा गया है। महीनो को प्राय 1, 2, 4, 2, 1 भारित किया जाता है जो मध्य के महीने को अधिकतम और अन्त के महीनो को अल्पतम भार प्रदान करता है। क्योकि इस भार प्रतिरूप का योग 10 बनता है, तो परिकलन यन्त्र के प्रयोग के बिना गतिशील योगो मे गतिशील औसतो का परिकलन किया जा सकता है।

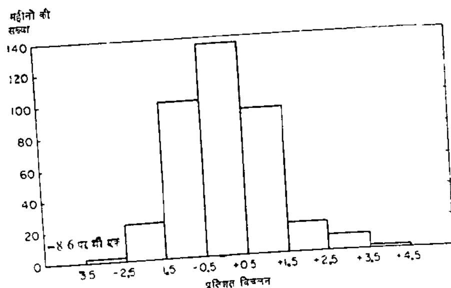
अनियमित गतियाँ—अनियमित गतियो को स्वयमेव सारणी 16 5 के स्तम्भ 2 मे दिखाए गए चक्रीय अनियमित मानो को चक्रीय मानो द्वारा, जिन्हे उसी सारणी के स्तम्भ 4 मे दिखाया गया है, भाग करके प्राप्त किया जा सकता है। अनियमित गतियो का परिकलन नही दिखाया गया है, केवल चार्ट 16 7 इनको महीना वार करके प्रदर्शित करता है, और चार्ट 16 8 अनियमित विचरणो का बारबारता बटन प्रस्तुत करता है। यदि अनियमित गतियाँ यादृच्छिक प्रकार की हो तो उनमे प्रसामान्य वक्र की रचना की आशा की जा सकती थी। यद्यपि चार्ट 16 8 का वक्र लगभग सममित है ($\beta_1=0\ 1169$), यह तुगककुदी है जिसमे $\beta_2=3\ 41$। यदि $-8\ 6$ के विचलन को, जिसे चार्ट 16 8 मे नही दिखाया गया है, परिकलनो मे जोड लिया जाता है तो तिरछापन और तुगककुदी दोनो बहुत बढ जाते है, क्योकि β_1 0 6226 तथा $\beta_2=10\ 83$। यह एक समय श्रेणी की अनियमित गतियो के लिये प्रत्याशित बारबारता बटन के प्रकार का-सा है, क्योकि छोटे-छोटे उतार-चढावो के अतिरिक्त यहाँ साधारणतया और भी है, जिनका स्वभाव प्रासगिक है, और जिनके प्रभाव कई महीनो तक निरन्तर (या सचयी) रह सकते है। समाचारपत्र विज्ञापन के आँकडे इस

चार्ट 16 6. सयुक्त राज्य मे समाचारपत्र विज्ञापन की चक्रीय गतियाँ, 1933—1964। आँकड़े सारणी 16 5 से तथा उस सारणी से हटाए गए वर्षों के लिये कार्य-सूचियों से (दिखाए नही गए) लिए गए हैं।



चार्ट 16.7. संयुक्त राज्य मे समाचारपत्र विज्ञापन 1933—1964 मे प्रतिशतता विचलनो के रूप मे व्यक्त अनियमित गतियाँ। $I = C \times I - C$। आँकड़े सारणी 16.5 के स्तम्भ 2 तथा 4 और उस सारणी से हटाए गए वर्षों के लिये (अप्रदर्शित) कार्य सूचियो से परिकलित।

दृष्टि मे "अच्छे आचरण" के है, चार्ट 16.8 की शून्य रेखा[2] के एक ही ओर विचलन पांच महीने के लिये एक समय मे केवल एक बार, चार महीनों के लिए एक समय मे केवल दो बार, और तीन महीनों के लिए एक समय में चौदह बार निरन्तर चलते जाते हैं।



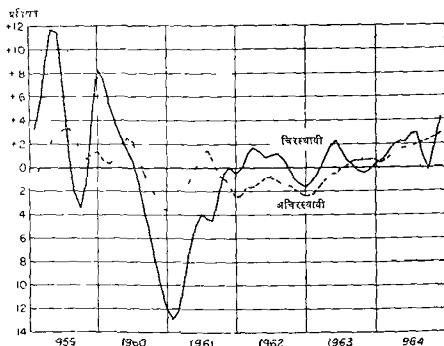
चार्ट 16 8. संयुक्त राज्य मे समाचारपत्र विज्ञापन की अनियमित गतियों का बारंबारता बटन, 1932 – 1964। अनियमित गतियां $I = C \times I - C$ है और उन्हें प्रतिशतता विचलनों मे व्यक्त किया गया है। सारणी 16 5 के स्तम्भ 2 और 4 तथा उन वर्षों की कार्य सूचियों से (प्रदर्शित नहीं किया है) जिनको सारणी से हटा दिया गया है, आंकड़ो का परिकलन किया गया है।

चक्रीय गतियों की तुलना करना—चक्रीय गतियों को एक काल श्रेणी मे सीमित करने की इच्छा करने का एक अन्य कारण एक या अधिक श्रेणियों मे चक्रीय गतियों से उनकी तुलना करने की अभिलाषा है। कभी-कभी यह भी सोचा जा सकता है कि एक श्रेणी अधिक या कम दृढता से दूसरी के चक्रीय मोड़ बिन्दुओं[3] पर उसके पूर्व चलती है। तथापि जब दो श्रेणियाँ अपने उतार-चढावों के कोणाक के सम्बन्ध मे जिन्हे पूर्णांकों मे व्यक्त किया गया है, एक दूसरे मे नहीं मिलती तो उन उतार-चढावों के समय की तुलना करने मे कुछ कठिनाई का अनुभव किया जाता है। जितना अधिक स्पष्ट अन्तर विस्तारों मे होगा, उतना ही अधिक महत्वपूर्ण उनके अन्तर मे किसी प्रकार का समजन करना होगा।

2. चार्ट से यह देखना सुगम नहीं। उन आँकड़ो से जिनके ऊपर चार्ट आधारित है गणनाएं की गई थी।

3. अग्रता-पश्चता सम्बन्धों का अध्याय 22 मे विवेचन किया गया है।

दृष्टान्त के रूप म हम चिरस्थायी निर्माणों के सूचकाक और जनवरी 1959 से दिसम्बर 1964 के अचिरस्थायी निर्माणा के सूचकाक का प्रयोग करेंगे। दोनो फेडरेल रिजर्व सिस्टम क गवनरा का परिषद द्वारा प्रकाशित किये जाते है। अनियमित उतार चढावो के समरेखण और चक्रीय विचलनो के रूप म व्यक्त किय जान पर चार्ट 16 9 उपर्नात तथा ऋतुनिष्ठ गतियो के लिय समजित इन दो श्रेणियो को दर्शाता है। चक्रीय विचलन वही वक्र देत है जो कि चक्रीय प्रतिशतनताएँ केवल मात्रा को अलग प्रकार मे व्यक्त किया जाता है उदाहरण के लिए 102 5 है + 2 5 101 2 है 1 2 100 है 98 3 है 1 7 96 4 है – 3 6 इत्यादि। यद्यपि चार्ट 16 9 म दो श्रेणिया चक्रीय उतार चढावो के दृष्टिकोण से स्पष्ट रूप स भिन्न नही तथापि यह स्पष्ट है कि चिरस्थायी निर्माणों का सूचकाक अचिर स्थाई निर्माणो के सूचकाक से अधिक जोरदार दर्शाता है।



चार्ट 16 9 चिरस्थायी निर्माणो के उत्पादन के फेडरल रिजव तथा सूचकाक अचिरस्थायी निर्माणा के सूचकाक के चक्रीय विचलन, 1959—1964। आकडो क स्रोतो क लिये सारणी 16 6 की टिप्पणी देख।

चक्रीय गतियो के विस्तार की अधिक सरलता से तुलना करने की एक सम्भव विधि दो श्रेणियो के लिए विभिन्न ऊर्ध्वाधर पैमानो के प्रयोग मे सन्निहित है। जब कि यह सीधा-सादा हल है, तो भी यह निर्णय करना सुगम नही है कि दोनों ऊर्ध्वाधर पैमान परस्पर किस प्रकार का सम्बन्ध रखग, उदाहरणार्थ यदि ऊर्ध्वाधर अन्तरो पर विजय प्राप्त करने के लिए अधिकतम उतार-चढावो का प्रयोग किया जाए तो कुछ भागो मे अधिक विस्तार वाली श्रेणी को अत्यधिक सकुचित किया जा सकता है। एक अधिक सन्तोषजनक प्रविधि

सारणी 16 6

अचिरस्थायी निर्माणों के उत्पादन के फडरल रिजव सूचकाक के चक्रीय विचलनों के लिए s परिकलन तथा s क सम्बन्ध से चक्रीय विचलन 1959—1964

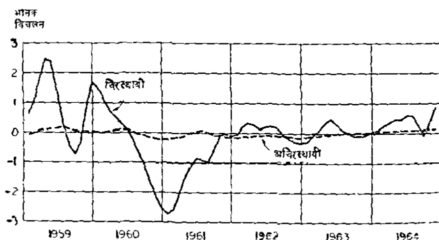
मूल सूचक क अ को मे अक्तूबर 1961 मे से 1957=100 और उस निधि के पश्चात 1957—1959=100

वष तथा मास (1)	चक्रीय विचलन* y (2)	स्तम्भ (2) के y वग (3)	चक्रीय विचलन s पदो मे स्तम्भ (2)—s (4)
1959			
जनवरी	0 7	0 49	—0 04
फरवरी	+0 1	0 01	+0 01
माच	+1 4	1 96	+0 08
अप्रल	+2 3	5 29	+0 13
मई	+2 6	6 76	+0 15
जून	+3 2	10 24	+0 18
जुलाई	+3 3	10 89	+0 19
अगस्त	+2 5	6 25	+1 14
सितम्बर	+1 3	1 69	+0 07
अक्तूबर	+0 7	0 49	+0 04
नवम्बर	+1 1	1 21	+0 06
दिसम्बर			
1964			
जनवरी	+0 6	0 36	+0 03
फरवरी	+0 5	0 25	+0 03
माच	+0 8	0 64	+0 05
अप्रैल	+1 3	1 69	+0 07
मई	+1 6	2 56	+0 09
जून	+1 7	2 89	+0 10
जुलाई	+1 8	3 24	+0 10
अगस्त	+2 0	4 00	+0 11
सितम्बर	—2 2	48 4	+0 12
अक्तूबर	+2 5	6 25	+0 14
नवम्बर	+2 6	6 76	+0 15
दिसम्बर	+2 9	8 41	0 16
योग	+1 6	223 56	

* चक्रीय विचलनो क जोड की आशा शून्य क बहुत लगभग हो सकती है यदि उमी काल म आने वाले आँकडो क साथ जसे कि विचाराधीन आँकड हैं न्यूनतम वर्गों क द्वारा उपनति को जोडा गया है। ऋतुनिष्ठता रहित आँकड फडरल रिज़र्व बुलेटिन क विभिन्न अकों म। उपनति तथा अनियमित गतियाँ लेखकों द्वारा हटायी गयी।

प्रत्येक श्रेणी को उसी के मानक विचलन के सन्दर्भ में अभिव्यक्त करने तथा केवल एक ऊर्ध्वाधर पैमाने का प्रयोग करने में सन्निहित है।

सारणी 16 6 अचिरस्थाई निर्माणों के सूचकाक के लिए *s* का मान परिकलित करने की प्रविधि का सकेत करती है। *s* को प्राप्त करने का सूत्र ऐसा है जैसा कि अध्याय 10 के अवर्गित आकड़ो को मापन के लिए प्रयोग में लाया गया था। जैसा कि सारणी 16 6 की पादटिप्पणी में दिखाया गया है, अचिरस्थाई निर्माणों के सूचकाक के लिए $s=1.724$ है। *चिरस्थायी निर्माणों के सूचकाक के लिए इसी प्रकार के परिकलनों से* $s=4\ 785$ *प्राप्त* होता है। सारणी 16 6 का अन्तिम स्तम्भ अचिरस्थाई निर्माणों के सूचकाक से, जो $s=1\ 774$ के रूप में अभिव्यक्त है चक्रीय विचलनो को दर्शाता है। चिरस्थायी निर्माणों के सूचकाक के लिए इसी प्रकार के परिकलन किए गए थे। दोनों श्रेणियाँ चार्ट 16.10 में दिखाई गई है, जहाँ यह स्पष्ट है कि दोनों श्रेणियों के उतार-चढ़ावों का विस्तार इस दृष्टात में अब बहुत असमान है। यद्यपि काल-श्रेणी के चक्रीय उतार-चढ़ावो के प्रसामान्य[4] रूप से बटन की आशा नहीं की जा सकती, तथापि इस बात पर ध्यान देना रुचिकर होगा कि दोनों श्रेणिया के लिए मान ± 3 मानक विचलनो के भीतर है। यह सदा सत्य सिद्ध नहीं होगा, ± 4 के मान, या इससे भी अधिक, कभी-कभी प्राप्त होते हैं।



चार्ट 16 10 चिरस्थायी निर्माणों के उत्पादन तथा अचिरस्थाई निर्माणों के उत्पादन के सूचकाको के मानक विचलनो की इकाइयों में चक्रीय विचलन, 1959—1964।
आँकडो के स्रोतो के लिए सारणी 16 6 की टिप्पणी देखिये।

ऐसे चार्ट को, जैसा कि चार्ट 16 10 है, कभी-कभी चक्रीय चार्ट कहा जाता है क्योंकि इसका उद्देश्य चक्रीय गतियो की तुलना को सुगम बनाना है। इस प्रकार के चार्ट के ऊर्ध्वाधर पैमाने को जब अतकनीकी प्रकाशन में देखा जाता है, तो इस बात का विशेष जिक्र किए बिना कि मान *s* के सम्बन्ध में हैं, इसको "चक्रीय मान" का नाम दे दिया जाता

4. सामान्य वक्र की अध्याय 23 में विवेचना की गई है। *s* की विशेषता का जिसका यहाँ सकेत किया गया है पृष्ठ 199—201 पर वर्णन किया गया था।

है। यह लोप सामान्यतया एक जाना-बूझा लोप है, क्योंकि सम्भव है कि समाचारपत्र अथवा पत्रिका के पाठकों ने s के अर्थ को न समझा हो।

दो श्रेणियों के विभिन्न मात्राओं में उतार-चढ़ावों का, परन्तु वार्षिक आँकड़ों से सम्बन्धित, एक और अधिक रुचिकर चित्रण चार्ट 22.4 और 22.7 में दिया गया है, जो परिवहन और सार्वजनिक उपयोगिताओं और ठेके के निर्माण में कर्मचारियों की संख्या के आँकड़ों को दिखाते हैं, पहले उपनति से विचलनों के रूप में और फिर s के सम्बन्ध में उपनति से विचलनों के रूप में।

चक्रीय गतियों के आकलन की अन्य विधियाँ

यद्यपि चक्रीय गतियों को अलग रखने की अवशेष विधि में विस्तृत परिकलन करना पड़ता है, तथापि यह सर्वाधिक प्रयुक्त प्रविधि है। तीन अन्य विधियों का संक्षिप्त विवरण यहाँ दिया जाएगा।

प्रत्यक्ष विश्लेषण—एक सम्भावना, प्रत्येक महीने को, पिछले वर्ष के संगत महीने की प्रतिशतता के रूप में व्यक्त करने में निहित है। इस क्रिया का परिणाम मोटे रूप से ऋतुनिष्ठ विचरण तथा दीर्घकालिक उपनति का निरसन करना है। तथापि कुछ अवशेष उपनति रहेगी, क्योंकि यदि उपनति ऊर्ध्वगामी है तो प्रतिशतताओं की 100 से ऊपर रहने की सम्भावना रहेगी, परन्तु यदि उपनति निम्नगामी होगी तो प्रतिशतताओं की प्रवृत्ति 100 से कम होने की होगी। यदि अवशेष उपनति का निरसन कर भी दिया जाता है तो परिणामन "चक्र" पूर्व विवेचित उतार-चढ़ाव के प्रकार से कुछ भिन्न होंगे, प्रतिशतताएँ चक्रीय स्तर की अपेक्षा चक्रीय परिवर्तन प्रस्तुत करती है। इस प्रकार, एक वर्ष का (अथवा अन्य) काल ऊँचा हो सकता है इसलिये नहीं कि यह उच्च स्तर पर था अपितु इसलिए कि पिछला वर्ष विशेष रूप से निम्न था। इस विधि में, व्यापारी के अधिकतर अभिव्यक्त प्रदत्त महीने को एक वर्ष पहले के उसी महीने के साथ समानान्तर बनाने का लाभ है।

प्रत्यक्ष विधि का एक भिन्न रूप प्रत्येक मास को कुछ पहले वर्षों के लिए संगत महीने की औसत की प्रतिशतता के रूप में व्यक्त करता है। वर्षों की संख्या के विषय में सोचना श्रेणी में चक्रों की लम्बाई पर निर्भर करता है, चक्रों की औसत लम्बाई को प्राय प्रयोग में लाया जाता है। चक्रीय गतियाँ प्राप्त करने से पहले इसमें अलग-अलग चक्रों की लम्बाई से सम्बन्धित निर्णय लिया जाता है। साथ ही, यह कम होता है कि आर्थिक श्रेणी में चक्र एक-सी विधि (या विस्तार) के हों जिसका परिणाम आँकड़ों की गम्भीर विकृति (तोड़-मरोड़) हो सकता है।

हरात्मक विश्लेषण—जब श्रेणी में चक्रीय गतियाँ लगभग उतनी ही अवधि और विस्तार की हों तो नियमित लहराती हुई गतियों वाली एक ज्या-कोटिज्या अथवा समान प्रकार के वक्र को आसंजित किया जा सकता है। इस प्रकार के वक्र को चक्रीय अनियमित आँकड़ों अथवा अनियमित गतियों के समरेखण के बाद के आँकड़ों के साथ जोड़ा जा सकता है। क्योंकि सामाजिक विज्ञानों तथा व्यापार में पर्याप्त नियमित कालान्तर एवं विस्तार की चक्रीय गतियों वाली श्रेणी दुर्लभ होती है, इसलिए हम इस ग्रन्थ में हरात्मक श्रेणी के आसंजन की विवेचना नहीं करेंगे।[5]

5 एक ज्या-कोटिज्या वक्र के आसंजन की विधि का वर्णन मूल अंग्रेजी पुस्तक के प्रथम संस्करण में पृष्ठ 554—560 पर, किया गया था।

निर्देश-चक्र विश्लेषण—जब कई काल-श्रेणियों का अध्ययन किया जा रहा है, तो वास्तव में, प्रत्येक श्रेणी की चक्रीय गतियों का दूसरी प्रत्येक विचाराधीन श्रेणी की चक्रीय गतियों के साथ तुलना करना सम्भव हो जाएगा। एक प्रविधि, जिसमें "निर्देश-तिथियाँ" आती हैं, आर्थिक अनुसंधान के राष्ट्रीय ब्यूरो द्वारा एक साधन के रूप में निर्मित की गयी है, जो न केवल प्रत्येक श्रेणी की तिथियों के मानक समुच्चय के साथ तुलना करने और विस्तार तथा संकोच के मध्य सामान्य व्यापार में अलग-अलग श्रेणी के व्यवहार का अध्ययन करने की अनुमति देता है, अपितु विभिन्न अलग-अलग श्रेणियों के लिए परिणामों की तुलना करने की भी अनुमति देता है। निम्नलिखित वर्णन अति सरल है, परन्तु इससे पाठक को प्रविधि का सामान्य ज्ञान प्राप्त हो जाना चाहिए।

प्रथम पग निर्देश-तिथियों का चयन है, जो व्यापार चक्रों के गर्त एवं चोटियों की तिथियाँ हैं। किसी सम्भव मिथ्याबोध को दूर करने के लिये यह स्पष्ट करना अच्छा होगा कि 'व्यापार चक्रों" का अर्थ सामान्य व्यापार गतिविधि में चक्रीय उतार-चढाव है, न कि किसी एक पक्ष या क्षेत्र में चक्र। बहुत बड़ी मात्रा में आर्थिक काल-श्रेणी का परीक्षण करने के पश्चात् और ' व्यापार दृश्य के प्रेक्षकों के समकालीन विवरणों" का अध्ययन करने के पश्चात् निर्देश तिथियों का, जिनका प्रयोग सभी अलग-अलग श्रेणियों में किया जाता है, चयन किया गया था।

अगला पग प्रत्येक श्रेणी के लिए प्रत्येक दो आगामी निर्देश गर्तों के बीच चक्रीय प्रतिरूप को प्राप्त करने के हेतु वैयक्तिक श्रेणी के आँकड़ों को क्रमबद्ध करना है। विभिन्न श्रेणियों के परिणामों की तुलना करने के योग्य बनाने के लिए प्रत्येक अवधि सभी श्रेणियों के लिए बराबर है। प्रत्येक श्रेणी की प्रक्रिया निम्न प्रकार से चलती है :

(1) ऋतुनिष्ठ विचरण के लिए आँकड़ों को समजित किया गया है।

(2) ऋतुनिष्ठतापूर्वक समजित आँकड़ों को "निर्देश-चक्र वृत्तखण्डों" में विभक्त किया जाता है ये वृत्तखण्ड निकटवर्ती निर्देश गर्तों के बीच मध्यान्तरों के अनुरूप हैं।

(3) प्रत्येक वृत्तखण्ड के लिए, वृत्तखण्ड में सभी मूल्यों की प्रतिशतताओं की औसत के रूप में मासिक मूल्यों का वर्णन किया गया है। ये "निर्देश चक्र सम्बन्धी" हैं। ध्यान दीजिए कि इस पग के परिणामस्वरूप सभी श्रेणियाँ प्रतिशतता अवस्था में हैं बिना इस विचार के कि मौलिक इकाई क्या है। इस पर भी ध्यान दीजिए कि यह पग अन्त चक्र उपनति का निरसन कर देता है क्योंकि प्रत्येक चक्र के सापेक्षों की औसत 100 है, परन्तु यह आन्तरिक चक्र उपनति का निरसन नही करता। आन्तरिक चक्र उपनति का सम्मिलित होना वाछनीय समझा जाता है। क्योंकि यह "व्यापार चक्र के दौरान क्या घटता है, इसको स्पष्ट करने तथा इसका वर्णन करने में सहायता करता है।"

(4) व्यापार चक्र में उन्हीं नौ अवस्थाओं के अनुरूप प्रत्येक निर्देश चक्र वृत्तखण्ड को नौ अवस्थाओं में तोड़ा जाता है, और नौ अवस्थाओं में से प्रत्येक के लिए निर्देश चक्र सापेक्षों की औसत ली जाती है। नौ अवस्थाएँ इस प्रकार हैं -

I. प्रारम्भिक गर्त पर केन्द्रित तीन महीने।

II प्रसारकाल का प्रथम तिहाई।

III. प्रसारकाल का दूसरा तिहाई।

IV. प्रसारकाल का अन्तिम तिहाई।

V. चोटी पर केन्द्रित तीन मास ।
VI. सकुचन काल का प्रथम तिहाई ।
VII. सकुचन काल का दूसरा तिहाई ।
VIII. सकुचन काल का अन्तिम तिहाई ।
IX. सीमान्त गर्त पर केन्द्रित तीन मास ।

प्रत्येक निर्देश चक्र वृत्तखण्ड के लिये नौ अवस्थाओ वाली औसतें एक श्रेणी मे अनियमित गतियों को कम करने मे काम करती है और विचाराधीन विशिष्ट श्रेणी के लिए एक निर्देश चक्र प्रतिरूप देती हैं ।

आर्थिक अनुसधान का राष्ट्रीय ब्यूरो भी विशिष्ट चक्र विश्लेषण का प्रयोग करता है । यह प्रविधि पूर्ववर्णित प्रविधि से इस दृष्टि से भिन्न है कि इसमे मोड बिन्दु, अवस्थाएँ और प्रतिरूप स्वयमेव प्रत्येक स्वतन्त्र श्रेणी मे निर्धारित किए जाते है। इस पुस्तक मे विशिष्ट चक्र विश्लेषण की ओर हम और अधिक ध्यान नही देंगे, केवल यह सकेत करेंगे कि चार्ट उस विशेष श्रेणी के लिए तैयार किए जा सकते है जिसमे विशिष्ट चक्र और निर्देश चक्र दोनो इसलिए दिखाए जाते है ताकि दोनों की तुलना की जा सके । चक्रो की दूसरे साधनो से भी तुलना की जा सकती है जिसमे "अग्रता" तथा "पश्चता" एव "समविन्यास के सूचकाक" का परिकलन सम्मिलित है ।

17

सूचकांक-निर्माण के मूल तत्त्व

सूचकांको का अर्थ तथा प्रयोग

सूचकाक सम्बद्ध चरो के समूह की मात्रा के अन्तरो को मापने के लिए युक्तियाँ हैं। इन अन्तरो का सम्बन्ध चाहे वस्तुओ की कीमतो से हो, उत्पादित, क्रय-विक्रय की गई या उपभोग की गई वस्तुओ की भौतिक मात्रा से हो, या "बुद्धिमत्ता", "सौन्दर्य" या "कार्य-क्षमता" जैसे मन्तव्यो में हो। ये तुलनाएँ समय की अवधियों मे हो सकती हैं; स्थानो मे हो सकती है, समान वर्गो जैसे व्यक्तियो, स्कूलो या वस्तुओ मे हो सकती है। इस प्रकार हमारे पास या तो विभिन्न समयो के या विभिन्न देशो के या स्थानो के निर्वाह खर्चों की तुलना करने वाले सूचकाक हो सकते है, अथवा विभिन्न वर्षों मे उत्पादन की भौतिक मात्रा के या विभिन्न स्कूल पद्धतियो की कार्यकुशलता के सूचकाक हो सकते हैं। सूचकाको के कुछ उपयोगो का नीचे वर्णन किया जाता है।

1 समय की अवधि मे कीमत स्तर मे परिवर्तन कदाचित् सूचकाक का सबसे अधिक प्रसिद्ध प्रकार है। पर्याप्त समय से इस प्रकार के सूचकाको का प्रयोग होता रहा है और वर्तमान समय मे इनका बहुत प्रयोग किया जा रहा है। कीमत सूचकाको का एक प्रयोग, जिससे पाठक पहले ही परिचित है, भौतिक मात्राओ मे बदलने के लिये मूल्य श्रेणी की अपस्फीति है। पीछे सारणी 11 1 का उल्लेख करते हुए हमें उपभोक्ता कीमत सूचकाक से विभक्त करने मे पता चलता है कि साप्ताहिक मजदूरी को साप्ताहिक वास्तविक मजदूरी म बदला जा सकता है। इसी प्रकार से हम निर्माण खर्चों के एक सूचकाक द्वारा अपस्फीति करने से भौतिक आधार प्रदत्त निर्माण सौदो के मूल्य को प्रस्तुत करने वाली काल-श्रेणी मे बदलने की इच्छा कर सकते है।

कीमत गतियो का, उनके कारण को खोजने के लिए या आर्थिक समाज पर उनके प्रभाव को खोजने के लिये, अध्ययन किया जा सकता है। इस प्रकार आर्थिक सम्बन्धो का अध्ययन करने के लिए यह प्रथा है कि कीमत-स्तर मे परिवर्तनो की अन्य श्रेणी के परिवर्तनो, जैसे स्वर्ण, बैंक रिजर्व, बैंक निक्षेप, बैंक नामे, तथा उत्पादन की भौतिक मात्रा से तुलना की जाए। इस प्रकार के अध्ययनो मे कीमत सापेक्षो का न केवल औसत परिवर्तन आता है अपितु निम्नलिखित भी आते हैं: (क) कीमत सापेक्षो का विक्षेपण, (ख) कीमत सापेक्षो के बारम्बारता बटनो का आकार, (ग) इस प्रकार की प्रतिशतताओ की सापेक्षिक अवस्थाओ मे परिवर्तन (कीमतो का विस्थापन), (घ) विक्रय करने के लिये प्रस्तुत मात्रा के परिवर्तनो के साथ कीमत मे परिवर्तन, (ङ) कीमत मे परिवर्तनो के साथ क्रयों या उत्पादन की मात्रा मे परिवर्तन (माँग अथवा पूर्ति की लोच),

(च) वारवारता जिमके साथ विभिन्न कीमते बदलती है, (छ) माँग मे परिवर्तनो के साथ कीमत परिवर्तनो का परिमाण ।

कीमत स्तर मे परिवर्तनो को, उन्हे नियन्त्रित करने के लिए मापा जा सकता है। अत 1933—34 म सामान्य कीमत स्तर को बढाने के लिए सोने की अधिकृत कीमत को वढाना एक आशिक प्रयास मात्र था। सोने की कीमत बढाये जाने के बाद यदि सूचकाक उच्च कीमत-स्तर दर्शाते, तो परिणाम को इस बात का सकेत माना जा सकता था कि स्वर्ण नीनि प्रभावपूर्ण थी।

कई वार सरकार का प्रभाव, कीमत स्तर को बढाने, घटाने अथवा स्थिर रखने के लिए नही अपितु दूसरे की अपेक्षा कीमतो के एक समूह को वढाने के लिए प्रयोग मे लाया जाता है। इस प्रकार सयुक्त राज्य मरकार न कृपि मम्वन्धी कीमतो को औद्योगिक कीमतो की अधिकृत "ममानता' तक बढाने के लिए बहुत सी युक्तियाँ विचारी तथा कुछ का प्रयोग किया। समानता सूचकाक का वर्णन अध्याय 18 म किया गया है।

द्वितीय विश्व युद्ध से लेकर बढती हुई सख्या मे ऐसे सामूहिक-सौदा समझौते किये गए हैं जो उपभोक्ता कीमत सूचकाको मे परिवतनो से उत्पन्न स्वत मजदूरी समजनो की व्यवस्था करते है। थोक कीमत सूचकाको पर आधारित इसी प्रकार के समजनो को बनाने के लिए कुछ व्यावसायिक सौदो का भी कार्यान्वित किया गया है। इस प्रकार के ममजनो को प्राय "प्रसारक (या प्रसार) खण्ड' कहा गया है। इन समझौतो या सौदो के सामान्यतया दो भाग होते है एक प्रयुक्त किये जाने वाले सूचकाक का, प्राय सयुक्त राज्य ब्यूरो ऑफ लेवर स्टैटिस्टिक्स द्वारा निर्मित सूचकाक का निर्देश करता है, दूसरा आधार राशि की परिभाषा करता है, जिसे सूचकाक मे प्रतिशतता परिवर्तनो से गुणा किया जाता है। अधिकतर मजदूरी सौदा मे जिनमे प्रसारक खण्ड होते ह, ऐसी व्यवस्था होती है कि कोई निम्नगामी समजन मौलिक आधार राशि से कम नही होगा। श्रम सख्यिकी ब्यूरो ने यह अनुमान लगाया है कि लगभग 35 00 000 श्रमिक उसी ब्यूरो द्वारा प्रकाशित उपभोक्ता कीमत सूचकाक से सम्बद्ध प्रसारक पदो वाले ठेको के अन्तर्गत आ जाते है। विभिन्न क्षेत्रों के बीच औसत कीमत तुलनाओं के उदाहरण प्रचलित नही हैं। इस प्रकार की तुलनाएँ करना बहुत कठिन है, क्योकि विभिन्न स्थानो पर उत्पन्न की गई और अथवा उपभोग की गई वस्तुओ की सापेक्षिक महत्ता बहुत अधिक भिन्न रहती है। इस प्रकार के सूचकाक का एक रुचिकर उदाहरण समार भर के 45 नगरो के लिए "सयुक्त राष्ट्र कर्मचारी वर्ग का निर्वाह व्यय" है। इस सूचकाक मे, न्यूयार्क नगर = 100। तथापि सूचकाक का सम्बन्ध केवल सयुक्त राष्ट्र के कर्मचारी वर्ग से है और सामान्य जनसख्या के निर्वाह व्यय से इसका सम्बन्ध नही है।

2 कुछ सस्याएँ समय की एक अवधि मे आने वाले भौतिक परिवर्तनो की तुलना करने वाले सूचकाको के सकलन करती हैं। ये व्यापार, औद्योगिक उत्पादन, कारखाना उत्पादन, विक्रय, वस्तुओ का भण्डार, आयात तथा निर्यात, इत्यादि के भौतिक परिमाणा का वर्णन करते है। काल-श्रेणी के विश्लेषण मे हमने पहले ही इस प्रकार के सूचकाको का प्रयोग किया है। ये दीर्घकालीन उपनतियों ऋतुनिष्ठ विचरणो, तथा व्यापार चक्रो के ऐतिहासिक अध्ययन, मे अत्यधिक उपयोगी हैं, तथा उन व्यक्तियो के लिए जो वर्तमान व्यापार स्थितियो मे परिचित रहना चाहते हैं, अत्यावश्यक हैं।

3 अधिकतर पूर्व-सूचना देने वाली सस्थाओं के द्वारा पूर्व-सूचना देने वाले सूचकाको का सकलन किया जाता है। यद्यपि बहुत से सूचकाक सिद्धान्त मे ठीक दिखाई देते हैं, और व्यवहार में भी जब उन्हें वास्तव म प्रयोग की गई मे पूर्व-अवधियो पर लागू किया जाता है, दुर्भाग्य मे उनम से अधिकतर वर्तमान प्रयोग मे विफल रहते है। पूर्व-सूचना देने वाले सूचकाक के कुछ साख्यिकीय रूपो का विवरण अध्याय 22 मे दिया गया है।

4 सूचकाको के दूसरे प्रकार स्वभाव मे भिन्न और सख्या मे कम हैं। एक प्रकार के उदाहरण के लिए, 1966 मे ओहियो राज्य विश्वविद्यालय के अपराध-विज्ञानविदो ने डा० वाल्टर सी० रेकलेस के नेतृत्व मे, जिन्होंने 24 प्रश्नो की एक सरल परीक्षा[1] का प्रयोग किया एक "अपराध विभव के सूचकाक का निर्माण किया।

सूचकाको के निर्माण में समस्याएँ

सूचकाको की रचना मे जिन समस्याओं का एक साख्यिकी-विद् को सामना करना पडता है, वे है

(1) जिस उद्देश्य के लिए सूचकाक का सकलन किया जा रहा है, उसकी परिभाषा।
(2) सूचकाक मे सम्मिलित करने के लिए श्रेणी का चयन।
(3) आंकडो के स्रोतो का चुनाव।
(4) आंकडो का सग्रह।
(5) आधार का चयन।
(6) आकडो को मिलाने की विधि।
(7) भारित करने की प्रणाली।

आंकडो को इकट्ठा करने तथा परिकलन करने से पूर्व यह जानना महत्त्वपूर्ण है कि हम किसे मापने का प्रयास कर रहे है और यह भी कि हम अपने मापो का किस प्रकार प्रयोग करना चाहते है। विचाराधीन उद्देश्य के लिये उपयुक्त प्रकार से बनाया गया सूचकाक एक अत्यन्त उपयोगी तथा शक्तिशाली साधन है, यदि यह उचित प्रकार से सकलित और रचित न हो तो यह हानिकारक हो सकता है। यदि हम निजी आवासो के निर्माण की लागत मे परिवर्तनो का जानना चाहते है तो हमे भारी निर्माण इस्पात की कीमतो को एकत्रित नही करना चाहिए। इसी प्रकार से यदि हम घरेलू कपडे की लागतो मे परिवर्तनो का मापना चाहे तो हमे रूई की कीमतो को प्रति गाँठ के हिसाब से एकत्रित नही करना चाहिए। परचून व्यापार की प्रगति को मापने के लिए हमे विभागीय भण्डार विक्रयों के प्रतिदर्श को प्रयोग म लाना चाहिए न कि थोक काम करने वालो तथा थोक विक्रेताओं के आंकडो को।

जब हम उपभोक्ता के कल्याण का माप करने का प्रयास उसकी मुद्रा आय को वास्तविक आय मे बदल कर अर्थात् अपस्फीति करके (देखे सारणी 11 1) कर रहे हो

1. युनाइटिड प्रैस "एन इडक्स आन क्राइम पोटेन्शयल", पैसिफिक स्टार्स एन्ड स्ट्रिप्स, अप्रैल 8 1966, पृष्ठ 10।

तो अपस्फीति कारक के रूप में थोक-कीमत श्रेणी का प्रयोग स्पष्ट ही त्रुटिपूर्ण होगा। और यदि हम उपभोक्ता को प्राप्त वस्तुओं के उत्पादन का माप करना चाहें तो हम औद्योगिक उत्पादन के सूचकांक का प्रयोग नहीं करें अपितु विभिन्न उपभोक्ता वस्तु उद्योगों से सूचकांक का संकलन करने का प्रयास करेंगे।

उपर्युक्त सातों समस्याएँ एक जैसी महत्त्वपूर्ण नहीं हैं और न ही वे सदा एक दूसरे से स्वतन्त्र हैं। इस प्रकार, भारित करने के साधारण ढंग में कीमत सूचकांक के लिए, सूचकांक के प्रत्येक उपसमूह में विभिन्न भार प्रयुक्त करने वाली प्रणाली की अपेक्षा एक भिन्न तथा वस्तुओं की अधिक विशाल सूची की आवश्यकता होगी। इसी प्रकार, जैसे बाद में व्याख्या की जाएगी, प्रयोग की जाने वाली भारित प्रणाली आंशिक रूप से आँकड़ों को मिलाने के ढंग पर निर्भर करती है। भारित करने के दोनों ढंग तथा प्रणाली को एक सूत्र में सम्मिलित करना तथा उसी भाग में दोनों अंशों की व्याख्या करना सुविधाजनक है। ऐसे ही ऊपर बताई गई समस्या 2 और 3 पर एक साथ विचार करना चाहिए। यदि कीमत सापेक्षों के व्यवहार को पहले विचारा जाता है तो इन बातों की अधिक पूर्ण समझ प्राप्त हो सकती है।

मूल्य-सापेक्षों के व्यवहार का एक दृष्टान्त

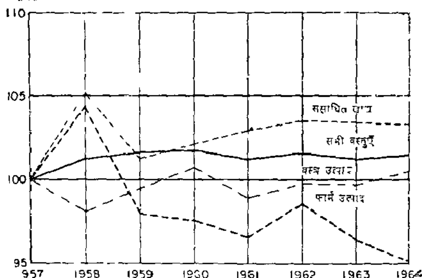
संयुक्त राज्य का श्रमिक आँकड़ों सम्बन्धी ब्यूरो वर्तमान समय में लगभग 2,200 पृथक्-पृथक् वस्तुओं या श्रेणी वाली थोक कीमतों के सूचकांक का संकलन करता है। इस सूचकांक का वर्णन आगामी अध्याय में किया गया है। यह ब्यूरो बहुत से समूहों तथा उप-समूहों के थोक कीमत सूचकांकों तथा पृथक्-पृथक् वस्तुओं के कीमत-सापेक्षों को प्रकाशित करता है।

सभी वस्तुओं को मिलाकर तथा तीन मुख्य उप समूहों के लिए सूचकांकों को चार्ट 17.1 में दिखाया गया है। तुलना को सरल बनाने के लिए चारों सूचकांकों को प्रकाशित आधार, 1957—1959=100 की अपेक्षा 1957=100 के साथ दिखाया गया है। प्रत्येक सूचकांक को उसके 1957 के मूल्य से भाग करके यह प्राप्त किया जाता है। एक अन्य प्रमुख उप-समूह "फार्म उत्पादन तथा तैयार भोजन के अतिरिक्त सभी वस्तुएँ" का चार्ट 17.2 में विश्लेषण किया गया है, जिसमें इस मुख्य वर्ग के 13 नितान्त भिन्न उपवर्गों के परिसर को दिखाया गया है।

चार्ट 17.2 में, किसी एक वर्ष में परिसर को दिखाने के लिये समूह सूचकांक से विचलनों को खींचा गया है। चिन्ह उस उप-समूह के लिए है जो समूह सूचकांक से ऊपर प्रतिशतता बिन्दुओं की उच्चतम संख्या का पंजीकरण करता है और उस उपसमूह के लिये जो समूह सूचकांक से सबसे अधिक नीचे रहता है। 1963 तथा 1964 में विविध उत्पादनों का मूल्य सूचकांक अन्य उपसमूहों से इतना अधिक बढ़ गया, कि इसे हल्की टूटी हुई रेखा से दिखाया गया है, 1963 और 1964 के ठोस वक्र पर बिन्दु, उच्चतम उपसमूह से अगले उपसमूह का प्रतिनिधित्व करते हैं।

चार्ट 17.2 में विशेष रुचि की बात यह है कि हम आधार वर्ष से जितना आगे जाएँगे उप-समूह कीमतों की समूह सूचकांक से उतना ही अधिक परे हटने की प्रवृत्ति

होगी । तथापि, यदि समूह सूचकाक कम हो जाए और 100 पर पहुँच जाए तो यह बिल्कुल सम्भव है कि उपसमूह सूचकाक पुन एक दूसरे के निकट खिच जाएँ ।

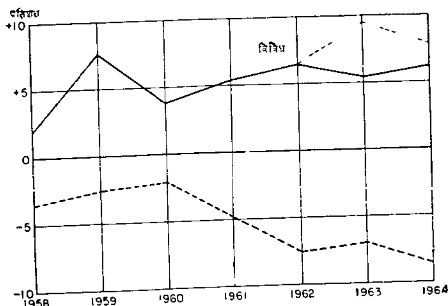


चार्ट 17 1 सयुक्त राज्य श्रम सांख्यिकी ब्यूरो के सभी वस्तुओं, फार्म उत्पाद ससाधित खाद्य, तथा वस्त्र उत्पाद एव सिले वस्त्रो के थोक कीमत सूचकाक, 1957—1964। अको को 1957—1959=100 से 1957 =100 मे बदल लिया गया है ताकि चारो श्रेणियो के व्यवहार की सरलता से तुलना की जा सके। आकडे स्टैटिस्टिकल ऐब्स्ट्रैक्ट ऑफ दि युनाइटिड स्टेट्स के विभिन्न अका तथा सयुक्त राज्य वाणिज्य विभाग, व्यापार अर्थशास्त्र कार्यालय के सर्वे ऑफ करन्ट बिजनेस, जून 1965 पृष्ठ S 8 मे।

दूसरी बात जिसका प्राय प्रसग आता है, परन्तु यहाँ अध्ययन किए गए सीमित काल को आवृत्त करने वाले आँकडे जिसकी पुष्टि नही करते, यह है कि जब कीमत उपनति ऊर्ध्वगामी है तो सूचकाक की सघटक श्रेणी के कीमत सापेक्षो का बटन भी अवश्यमेव तिरछा होगा । बहुत से व्यक्ति इस विचार के हैं कि यह कीमत सापेक्षो के बारबारता बटनो की स्वाभाविक विशेषता है, क्योंकि कीमतें अनिश्चित ऊँचाई तक चढ सकती है परन्तु केवल शून्य तक गिर सकती हैं।[2] दूसरी ओर, यह सुझाव दिया जा सकता है कि कीमतो

2 यह अक्षरश सत्य नहीं है, जैसा कि हम निम्नलिखित उदाहरणो से देख सकते हैं (1) सयुक्त राज्य अमरीका के राजकोष पत्र, प्राय 90 दिन के पत्र, प्राय बैंको या दूसरे निवेशको को मितिकाटा पर बेच दिए जाते हैं—अथ त उन्हे प्रत्यक्ष मूल्य से कम पर बेचा जाता है और प्रत्यक्ष मूल्य पर तीन मास बाद उन्हे छुडाया जाता है। अन्तर निवेशक के लाभ या राजकोष की कीमत को मापता है। एक वर्ष में हुडियों की 12 श्रेणियाँ अकित मूल्य से अधिक पर राजकोष से विक्रय की गई जिसका यह प्रभाव हुआ कि उन्होने ऋणात्मक कीमत दी। हुडी क्रेता, ऋणात्मक लाभ प्राप्त करते हुए हुडियो को पास रखने के अधिकार के लिए थोडा सा प्रीमियम देते थे। (2) एक अन्य वर्ष न्यूयार्क नगर का एक धातु-वस्तुओ का विनिर्माता व्यापारियो का मैगनेशियम छीलन तथा अन्य मैगनेशियम कतरन बेचने मे सफल हुआ। बाद मे उसी वर्ष वह इसे न बेच सका अपितु उसे ठेले भर कर फिकवाने पडे। इस प्रकार रद्दी माल की, वर्ष के प्रारम्भ मे जो उसने धनात्मक कीमत प्राप्त की थी वर्ष के अन्त मे वह कीमत ऋणात्मक या शून्य से कम हो गई।

और कीमत सापेक्षों पर, गणित शास्त्र के नियमो की अपेक्षा अर्थशास्त्र के नियमों का अधिक प्रभाव होता है। कीमत-वृद्धि तथा कीमत-सकोच की सीमाएँ निश्चित रूप से व्यक्तियो द्वारा विभिन्न कीमतों पर खरीदने और बेचने की इच्छा से प्रभावित होती हैं। तथापि कीमत परिवर्तन की दिशा सम्भवत एक सूचकाक के अवयवो की विषमता की दिशा पर कुछ प्रभाव डालती है।



चार्ट 17 2 "फार्म उत्पाद तथा ससाधित खाद्य के अतिरिक्त सभी वस्तुओ" के लिये सयुक्त राज्य श्रम सांख्यिकी ब्यूरो के थोक कीमत सूचकाक से अधिकतम विचलन, उसी सूचकाक के 13 उप-समूहो द्वारा प्रदर्शित, 1958—1964। विचलन अत्यधिक भिन्न उप समूहो तथा प्रत्येक वर्ष के "अन्य वस्तु' सूचकाक मे अन्तर को प्रस्तुत करते हैं, उदाहरणार्थ, 1962 मे अन्तर थे 107.4 – 100 8 = +6 6 तथा 93 3 – 100.8 = – 7 5। हल्की टूटी रेखा 1962 तथा 1963 के विविध उत्पादो के लिए दिखाए गए विचलनो का अनुसरण करती है जो उन्हीं वर्षों मे उससे कम उच्चतम उप समूह मे (गहरी रेखा से प्रदर्शित) विशेष रूप से अलग हो गई थी। आंकडे *स्टैटिस्टिकल ऐब्स्ट्रैक्ट ऑफ दि युनाइटिड स्टेट्स*, 1964, पृष्ठ 352—353, तथा *सर्वे ऑफ करन्ट बिजनेस* जून 1965, पृष्ठ *S* 8 से।

सूचकांको के लिये आंकड़े

यद्यपि सूचकाको की रचना करने मे चरो को जोडने की विधि पर्याप्त महत्ता रखती है तथापि यह उस समय महत्त्वहीन है जब कि आंकडो का जो कि सूचकाक का कच्चा माल है, चयन करने की समस्या की तुलना की जाती है। इस बात पर बहुत अधिक जोर नही डाला जा सकता। आंकडे अवश्यमेव सही, समान, तथा प्रतिदर्श प्रतिनिधि होने चाहिएँ। एक प्रतिदर्श के प्रतिनिधि होने की आशा तब तक नही की जा सकती जब तक कि उसमे मदो की पर्याप्त सख्या सम्मिलित न की जाए। इस विचार को अन्य शब्दो मे इस

प्रकार वर्णित किया जा सकता है विश्वस्त सूचकांकों को प्राप्त करने के लिये प्रसंगानुकूल मदों के पर्याप्त बड़े प्रतिदर्श का अवश्य चुनना चाहिये।

जैसाकि हम पहले देख चुके है, कीमत सूचकांक के लिये चुनी जाने वाली वस्तुएँ और चुनी जाने वाली दर का प्ररूप इस बात पर निर्भर करता है कि किस वस्तु को मापा जा रहा है। थोक कीमत सूचकांक के लिए थोक कीमतें चाहिएँ। उपभोक्ताओं के द्वारा दी जाने वाली कीमतों के सूचकांक के लिए केवल भोजन की परचून कीमतों की ही आवश्यकता नही होती वरन् किराया, गैस एवं विद्युत् दरें, कपड़े की कीमतें, यातायात, डाक्टरी सहायता इत्यादि की भी आवश्यकता होती है, जो उन व्यक्तियों की श्रेणी पर लागू होती है जिनके लिये रहन-सहन की लागत सुनिश्चित की जानी है। एटलान्टा, जार्जिया मे फ्रेम भवनों को बनाने की परिवर्तनशील लागत के सूचकांक में एटलान्टा मे बनाए गय फ्रेम भवनो म प्रयुक्त वस्तुओं तथा श्रम की मदों को सम्मिलित करना चाहिये। कीमतें एटलान्टा म प्रयुक्त वस्तुओं की कीमतें होनी चाहिये और मजदूरी एटलान्टा मे प्रयुक्त श्रमिक की मजदूरी होनी चाहिय। य उदाहरण एवं तर्क का संकेत करते हैं कि हर समय उस उद्देश्य को जिसके लिय सूचकांक का सकलन किया जा रहा है, मस्तिष्क मे रखना इतना महत्त्वपूर्ण क्यों है। सूचकांक का उद्देश्य तथा वह किसका माप करना चाहता है, ये बातें आधार के चयन, प्रयुक्त भारो, तथा प्रयुक्त सूत्रों को भी प्रभावित करेंगी।

सूचकांकों के लिय जब आँकड़ो के स्रोतों का चयन करें तो हम नियमित रूप से प्रकाशित की जाने वाली दरों पर निर्भर कर सकते है या व्यापारियों, उत्पादकों, निर्यातकर्ताओं या अन्यों स, जोकि आवश्यक आधारभूत जानकारी रखते हैं, सामयिक विशेष रिपोर्ट प्राप्त की जा सकती है। इन दोनों म से किसी भी परिस्थिति मे हमें यह निश्चय कर लेना चाहिय कि आँकड़े मापी जाने वाली वस्तु से सुनिश्चित सम्बन्ध रखते हैं। इस प्रकार, यदि भोजन के परचून कीमत परिवर्तनों को मापा जा रहा है तो सुपर बाजारों, श्रृंखला भण्डारों, स्वतन्त्र भण्डारों तथा अन्य महत्त्वपूर्ण निर्गमों से दरें प्राप्त की जानी चाहिएँ। इन विभिन्न स्रोतों का बिना सोचे-समझे मिश्रण नही कर देना चाहिये अपितु मिश्रण करते समय उन्हें उचित रूप से भारित कर लेना चाहिये। मास की प्रथम तारीख को दरो, मास के मध्य की दरों, तथा मासान्त दरों को सामान्य रूप से एक सूचकांक मे नहीं मिलाना चाहिये।

जो वर्णन अभी किया जाना है वह आंशिक रूप से इस पुस्तक के पूर्व अध्यायों मे, विशेष रूप से अध्याय 2 मे, वर्णित सिद्धान्तों का अनुप्रयोग है। सूचकांकों के आँकड़ो के उचित चयन का बड़ा महत्त्व इन सिद्धान्तों को आपस मे एक साथ लाने को न्यायसंगत बनाता है, यद्यपि इसमें कुछ पुनरावृत्ति निहित है।

परिशुद्धता—कुछ सांख्यिकीय आँकड़ा पर जो कि परिशुद्धत मुद्रित दृष्टिगोचर होते है, निर्भर नहीं किया जा सकता। यदि आँकड़ो की सूचना देने वाला व्यक्ति या कम्पनी आँकड़ों का प्रयोग परिचालन अथवा कर के लिये करती है तो वे परिशुद्ध हो सकते हैं, परन्तु यदि किसी बाह्य एजेन्सी को देने के लिये आँकड़ो के सांख्यिकीय विवरण मात्र हैं तो उनका सकलन मूलत लापरवाह तथा उदासीन लिपिकों द्वारा किया जा सकता है जिनकी रुचि केवल शीघ्रातिशीघ्र प्रपत्र को मसि-चिह्नों से भरने की होती है। अत सांख्यिकी-विद् के लिये यह ज्ञात कर लेना उचित है कि आँकड़े किस प्रकार एकत्रित किये गए हैं और उसे अपने स्रोत का चयन विवेक से करना चाहिए।

तुलनीयता—वास्तव म एक ही वस्तु के मानक ग्रेड विभिन्न तिथियों के बीच तुलनीय होते हैं, तथापि एक 1914 की मोटर गाडी की आधुनिक मोटर गाडी से तुलना नही की जा सकती। न ही एक मानक ' मोटर गाडी की कीमत विभिन्न वर्षों के लिए परिकलित की जा सकती है क्योंकि एक साल से अधिक में इस प्रकार की मानक मोटर गाडी सामान्यत प्राप्त नही होती। उच्च विनिर्मित वस्तुओ के सम्बन्ध मे जिनको आगामी वर्षों मे विकसित किया जाता है कीमत दरो की ऊर्ध्वगामी प्रवृत्ति अधिकतम होती है, परन्तु यह कुछ कृषि सम्बन्धी वस्तुओ मे भी पाई जाती है क्योंकि इनके उत्पादन मे पूर्ववर्ती की अपेक्षा उत्तरवर्ती वर्षों म अधिक ससाधन अपेक्षित होता है। अत यह सम्भव है कि अधिकाश की कीमत सूचकाको की ऊर्ध्वगामी प्रवृत्ति हो।

एक इसी प्रकार की समस्या उस समय उत्पन्न हो जाती है जब कोई वस्तु विस्तृत प्रयोग के बाद हट जाती है और लगभग वही हेतु पूरा करने वाली भिन्न वस्तु के द्वारा उसका स्थान ग्रहण कर लिया जाता है। उदाहरणार्थ 100 वर्ष पुराने रेल के डिब्बे को सुप्रवाही वातानुकूलित गाडिया, दवाव वाले वायुयानो, तथा डीलक्स बसो ने मात कर दिया है। यदि वाशिंगटन डी० सी० से फिलडेलफिया का किराया दोनो समयो मे वही मिलता है तो भी हमे यह परिणाम नहीं निकाल लेना चाहिये कि उसी सेवा की लागत उतनी ही रही है क्योंकि सेवा भी वदल गई है। अब यात्रा म कम समय लगता है और इसे अब बहुत अधिक सुख-सुविधा से किया जाता है।

प्रतिनिधित्व—क्योंकि सूचकाक प्राय प्रतिदर्शों से प्राप्त किये जाते हैं अत हमे अवश्यमेव इस प्रकार का प्रतिदर्श प्राप्त करने का प्रयास करना चाहिये जो कि उस जनसख्या के अनुरूप व्यवहार करे जिससे कि इसे लिया गया है। सम्भवत इसे प्राप्त करने का सबसे सन्तोषजनक ढग यह है कि मूल आकडो को समूहो और उपसमूहो मे बाँट लो और इनम से प्रत्येक मे से प्रतिनिधि प्रतिदर्श चुनो। समूहो और उपसमूहो मे स्तरीकरण का प्रयोग इसलिए किया जाता है क्योंकि विभिन्न आर्थिक कारणो से प्रभावित वस्तुओ के विभिन्न समूहो और उपसमूहो से यह आशा की जा सकती है कि वे इस प्रकार के व्यवहार के प्रतिरूपों का प्रदर्शन करें जो कि प्रत्येक समूह के लिए भिन्न हो और जो दूसरे समूहो और समस्त सूचकाक मे भी भिन्न हो। उदाहरणार्थ, यदि थोक कीमतों का एक सूचकाक बनाया जा रहा है तो हमे भवन-निर्माण के पदार्थों की गतियों मे भिन्न भोजन की कीमत (अथवा मात्रा) की गतियों की आशा करनी चाहिये। इसका एक कारण यह है कि जहां भोजन की माग लोचहीन है वहा भवन निर्माण के पदार्थों (जो दर तक चलने वाली वस्तुएँ हैं और जिनका क्रय स्थगित किया जा सकता है) की माग लोचशील है। इसके अतिरिक्त, अल्पकाल मे भोजन की पूर्ति पर्याप्त मात्रा मे मौसम के ऊपर निर्भर करती है जबकि भवन-निर्माण के पदार्थों की पूर्ति सरचना करने वालो के वेतन नियन्त्रण पर निर्भर करती है।

एक समूह से वस्तुओ का चयन करते समय यह वाछनीय है कि हम उन वस्तुओ को लें जिनकी प्रवृत्ति समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति के अधिक अनुरूप हो बशर्ते कि केन्द्रीय प्रवृत्ति का निर्धारण किया जा सके। उन वस्तुओ का चयन कर लेने के पश्चात् जो कि उस समूह की जिससे कि उनको लिया गया है, पर्याप्त प्रतिनिधि हैं, यह निश्चित करना वाछनीय है कि क्या प्रत्येक समूह के लिये आनुपातिक प्रतिनिधित्व प्राप्त कर लिया गया है। सारे मूल्य के आधार पर यदि एक समूह (या समूहो) के प्रतिदर्श का सारे समूह म बहुत कम या बहुत अधिक अनुपात हो तो समूह प्रतिदर्श मे वस्तुओ को जोडा जा सकता है या वस्तुओ

को कम किया जा सकता है। जब इस प्रकार का समजन न किया जा सकता हो (उदाहरणार्थ यदि समूह "मरचनात्मक इस्पात" है और प्रतिदर्श समूह का 100 प्रतिशत भाग है), तो विकल्पस्वरूप उचित भारों का प्रयोग किया जा सकता है।

कई बार प्रतिदर्श के प्रतिनिधित्व के एक अन्य परीक्षण का प्रयोग किया जा सकता है क्या प्रतिदर्श के मूल्य परिवर्तन जनसंख्या के परिवर्तनों से मेल खाते हैं? इस परीक्षण को केवल सम्पूर्ण प्रतिदर्श पर ही लागू नहीं करना चाहिये अपितु उन विभिन्न समूहों और उप-समूहों पर भी लागू करना चाहिये जिनमें इसे विभक्त किया गया है।[3]

पर्याप्तता—अध्याय 24 में यह दिखाया जाएगा कि यादृच्छिक प्रतिदर्श के अंकगणितीय माध्य की विश्वसनीयता प्रत्यक्ष रूप से सम्मिलित मदों की संख्या के वर्गमूल से सम्बन्धित है। तदनन्तर परिमित जनसंख्या में प्रतिदर्श में, सम्मिलित मदों का अनुपात जितना अधिक होगा (देख परिशिष्ट घ, परिच्छेद 24 2) उतना ही प्रतिदर्श का माध्य अधिक विश्वस्त होगा। प्रयुक्त मदों की पूर्ण संख्या का ठीक तथा निश्चित शब्दों में विवरण नहीं दिया जा सकता। जैसा कि अभी अभी देखा गया है, विभिन्न घटक समूहों से सामान्यतया (वस्तुओं) मदों का चयन कर लिया जाता है ताकि प्रतिदर्श स्तरित हो न कि यादृच्छिक। तदनन्तर समूहों से मदों का चयन करते समय, सर्वप्रथम साधारणतया अधिक महत्त्वपूर्ण मदों को चुना जाता है उसके पश्चात् उतनी ही उपयुक्त मदों को सम्मिलित कर लेते हैं जितनी कि साधन अनुमति देते हों। इस प्रकार प्रत्येक स्तर में से मदों को यादृच्छिक नहीं लिया जाता है। इन दो स्थितियों के परिणामस्वरूप, साधारण विश्वस्तता-सूत्र अनुप्रयुक्त नहीं होते।

इस अध्याय के शेष भाग में प्रयुक्त सूचकांक दृष्टान्तों के लिये पाँच नींबू फलादि का चयन किया गया है फ्लोरिडा अंगूरफल, कैलिफोर्निया नींबू, तथा संतरे की तीन किस्में। पाँचों फलों की कीमत प्रमुख मण्डियों में प्रति पेटी नीलामी की कीमतें हैं। इन अंकों के प्रयोग में कुछ कृत्रिमता आ जाती है, क्योंकि कुल उत्पादन का प्रयोग किया गया जिसमें न केवल "मूल्य वाले उत्पादन" को ही सम्मिलित किया गया अपितु फार्म पर उपभोग किये गए, दान में दिये गए, या न बीने गए या आर्थिक परिस्थितियों के कारण प्रयोग में न लाए गए तथा रस निकालने, रासायनिक आदि के लिये प्रयोग किये गए फल भी सम्मिलित थे। इस कारण से इस अध्याय के आगामी पृष्ठों में संकलित विभिन्न सूचकांकों को वर्णन किये गए विभिन्न सूत्रों तथा भारित प्रक्रियाओं के व्यवहार के उदाहरण मात्र समझना आवश्यक है।

प्रत्येक फल के लिये ऋतु एक वर्ष के फूल खिलने से प्रारम्भ होती है और आगामी वर्ष फसल के पूर्ण होने पर समाप्त होती है। जैसा कि सारणी 17.1 के नीचे वर्णित है, "1959" 1958—1959 फसल वर्ष का संकेत करता है, और इसी प्रकार अन्य वर्षों के लिए है। निम्न संकलनों में प्रयुक्त फल, उनकी ऋतुएँ तथा प्रति पेटिका भार इस प्रकार है:

---

3 यह परीक्षण इरविंग फिशर की "कुल मूल्य कसौटी" के समान है जो इस बात की व्याख्या करती है कि मात्रा सूचकांक के साथ गुणा करने से कीमत सूचकांक को जनसंख्या के कुल मूल्य परिवर्तन के अनुपात के बराबर होना चाहिये।

फल	ऋतु	निवल मात्रा प्रति पेटिका
अगूरफल, फ्लोरिडा	1 सितम्बर से 31 जुलाई तक	80 पाउड
नीबू, कैलिफोर्निया.	1 नवम्बर स 31 अक्तूबर तक .	76 पाउड
सतरे, फ्लोरिडा . .	1 अक्तूबर से 31 जुलाई तक	90 पाउड
सतरे, कैलिफोर्निया, दोनो किस्मे	1 अक्तूबर से आगामी वर्ष के 31 दिसम्बर तक .	75 पाउड

आधार का चयन

आँकडो को सयुक्त करने और भारित करने के लिए प्रयुक्त सूत्र का विचार किए बिना, समय की किसी अवधि को 100 प्रतिशत के रूप मे चुन लेना जिसमे कि दूसरे सूचकाको की तुलना की जा सके प्रथागत है (यद्यपि आवश्यक नही)। एक महीने का समय इतना कम है कि साधारणतया उसे आधार काल के लिय प्रयुक्त नही किया जा सकता, क्योकि आकस्मिक या ऋतुनिष्ठ प्रभावो के कारण कोई एक महीना असामान्य सा रहता है। कई बार एक वर्ष का प्रयोग किया जाता है। तथापि यह प्राय सत्य है कि कोई भी एक वर्ष पर्याप्त रूप से "असामान्य" नही है कि वह तुलना के लिय एक अच्छा आधार बन सके। व्यापार और कीमते व्यापार चक्र के साथ सदा बढती या घटती रहती है। यद्यपि इतना विशिष्ट नही तथापि कुछ वर्षो की औसत प्राय एक अच्छा आधार है। 1910 से 1914 तक के काल का कभी-कभी कीमत आधार के रूप म प्रयोग किया गया है विशेषत कृषि उत्पादनो के लिए। पिछली चार दशाब्दियो मे सयुक्त राज्य सरकार की सांख्यिकी एजेन्सियो ने लगातार एक के बाद एक कई अन्य आधारो को बदला उदाहरणार्थ 1926, 1935—1939, 1947—1949, 1957—1959, और विशिष्ट उद्देश्य वाले जैसे कि सितम्बर 1, 1939 तथा जून 1950। एक उपयोगी हल यह है कि वर्षो की उस अवधि को ग्रहण किया जाए जिसका कि अन्य सूचकाको द्वारा प्रयोग किया जाता है जिनके साथ निर्माणाधीन सूचकाक के प्रयोग किय जाने की सभावना हो।

यद्यपि कुछ वर्षो के लिये एक विशिष्ट आधार सन्तोषजनक हो सकता है तथापि जैसे-जैसे समय बीतता है वह आधार कम अर्थपूर्ण बनता जाता है और अन्ततोगत्वा किसी अधिक अभिनव काल द्वारा विस्थापन वाञ्छनीय हो जाता है। कारण ये है (1) कीमत सापेक्षो का प्रसार इतना अधिक हो जाए कि कोई औसत विश्वस्त न रह, (2) स्थायी मुद्रा मूल्य-ह्रास जनसख्या की वृद्धि तकनीकी प्रगति, तथा अन्य कारणो से, आय कीमतो, उत्पादन तथा उपभोग के द्वारा सम्भव है नए तथा ऊँचे स्तर प्राप्त कर लिय गए हो, (3) उपभोग का ढग इस सीमा तक बदल सकता है कि वस्तुओ का कोई भी ऐसा समूह प्राप्त न किया जा सकता हो जो कि दोनो अवधियो म समान मुख्य व्यया को सम्मिलित करता हो, (4) बहुत सी वस्तुओ का प्रकार जो नाम म समान रहता है समय के साथ उत्तरोत्तर बदल जाता है। शृखला सूचकाक प्रणाली का प्रयोग करके तुलना का एक अप्रत्यक्ष आधार प्राप्त किया जा सकता है जिसमे, आवश्यक रूप से, पिछले वर्ष के साथ प्रत्यक वर्ष (या उसके उपकाल) की तुलना आ जाती है। इस विधि का, जो कि पूर्णरूपेण सन्तोषजनक नही है, आगामी अध्याय म वर्णन किया गया है।

समाहृत कीमत सूचकांक

सूचकांकों की रचना करने के दो ढग है (1) कुल मूल्य के परिकलन द्वारा, (2) सापेक्षों की औसत निकाल कर। प्रथम विधि के द्वारा, जैसी कि इस परिच्छेद मे व्याख्या की जाएगी, कीमतो और मात्राओं को तुलनीय बना लिया जाता है, और वे स्वचालित रूप मे भारित होकर डालर मूल्य मे आ जाती हैं और तब उनको समाहार मूल्यों मे जोड दिया जाता है। आगामी परिच्छेद म सापेक्षों की औसत निकालने की विधि का वर्णन किया जाएगा। वहा पर यह दिखाया जाएगा कि दोनो विधिया, कुछ विशेष परिस्थितियों मे, समान परिणाम प्राप्त करने की केवल वैकल्पिक विधिया मात्र है। समाहृत विधि परिणाम को सीधे प्राप्त करती है और ऐसा परिणाम उपस्थित करती है जिसका साधारण और स्पष्ट अर्थ हो, सापेक्षो का प्रयोग करने वाली विधि अधिक गोलमोल है और इसका अर्थ भी अधिक तकनीकी है। तथापि कई ऐसी परिस्थितिया है जिनमे समाहृत विधि लागू नही होती और तब सापेक्षों की औसत का ही चारा रह जाता है।

साधारण समाहार—सारणी 17 1 साधारण समाहृत कीमत सूचकांक की रचना का वर्णन करती है। प्रत्येक वस्तु की कीमतो को किसी प्रदत्त वर्ष मे केवल आपस मे जोड लिया जाता है ताकि उस वर्ष के लिए सूचकांक प्राप्त हो। तब प्राय सुगमतापूर्वक किसी वर्ष को आधार बना लिया जाता है, जिसे 100 के बराबर निश्चित कर लेते हैं। इस दृष्टान्त म सभी सूचकांकों को 1959 की संख्या की प्रतिशतता के रूप म अन्तिम पंक्ति मे अभिव्यक्त किया गया है, तथा उनको अकों मे से प्रत्येक को आधार अवधि के मूल्य (डालर 32 85) से विभक्त करके और 100 मे गुणा करके प्राप्त किया गया है।

यह बिलकुल स्पष्ट हो जाना चाहिये कि जो प्रभाव कोई वस्तु साधारण समाहृत सूचकांक पर डालती है वह दर की प्रति इकाई कीमत पर निर्भर करता है। इस उदाहरण म प्रमुख मद वर्षानुवर्ष बदलती है, परन्तु अगूरफल किसी भी वर्ष प्रमुख नही है। प्रस्तुत की गई प्रत्यक वस्तु की वाणिज्यिक इकाई द्वारा एक समाहृत सूचकांक का भारित किया जाना तर्कसगत नही है क्योंकि यह विभिन्न वस्तुओ की वास्तविक महत्ता के विचार को दृष्टिहीन कर देता है, यह इस प्रकार से यादृच्छ है कि विभिन्न वस्तुओ के सापेक्षिक प्रभाव का निर्धारण उन कारकों द्वारा किया जाता है जो कीमत सूचकांक के उद्देश्य के लिये बिलकुल असगत है। यदि सब वस्तुएँ प्रति पाउड कीमत मे कर दी जाएँ तो किसी भी प्रकार से समस्या का समाधान नही होगा, क्योकि कुछ वस्तुएँ, जैसे हीरे, प्रति पाउड बहुत अधिक मूल्यवान हैं जबकि वे हमारे आर्थिक जीवन मे बहुत अधिक महत्त्वपूर्ण नहीं, जबकि कोयला जोकि अत्यधिक महत्त्वपूर्ण है प्रति पाउड अपेक्षतया सस्ता है। साथ ही कुछ वस्तुएं, जैसे विद्युत् शक्ति या मानव श्रम, को पाउड आधार पर नहीं बदला जा सकता। एक दूसरा समाधान है आधार वर्ष मे एक डालर से जितनी मात्रा खरीदी जा सकती है उसे दर की इकाई के रूप मे ले लो। परन्तु यह भी अधिक तर्कसगत नही है, क्योंकि प्रति वर्ष यदि प्रत्येक वस्तु पर वही मुद्रा-मात्रा व्यय की जाए तो यह बहुत असाधारण होगा।

भारित समाहृत सूचकांको की रचना का विचार करने से पूर्व यह सहायक हो सकता है कि जिस ढग का हमने अभी प्रयोग किया है उसका चिह्न रूप मे वर्णन करें। सूत्र है

$$P=\frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o},$$

जबकि P का अर्थ है कीमत सूचकाक p पृथक्-पृथक् वस्तु की कीमत का सकेत करता है, पदाक o आधार काल का, जिसस कीमत परिवर्तनो को मापा जाता है, सकेत करता है, और पदाक n प्रदत्त काल का सकेत करता है जिसकी तुलना आधार से की जा रही है। अब यदि एक विशेष वर्ष के लिय (जसे 1964 1959 आधार के साथ) सूत्र की व्याख्या करनी हो तो इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$P_{59\ 64} = \frac{\Sigma p_{64}}{\Sigma p_{59}}$$

भारित समाहार—प्रत्येक वस्तु का सूचकाक पर उचित प्रभाव हो इसके लिये यह शिक्षाप्रद है कि कीमतो के साधरण समाहार की अपक्षा जानबूझ कर भीतर समाहार का प्रयोग किया जाए जैसा कि हम देख चुके है जिसमे गुप्त भार करना आ जाता है। भारित समाहृत सूचकाक की रचना के लिय विशिष्ट वस्तुओ की निश्चित मात्राओ की एक सूची ले ली जाती है और यह निर्धारण करने के लिय कि प्रत्यक वप वतमान कीमतो पर वस्तुओ के इस समाहार की क्या कीमत है गणना की जाती है। स्पष्ट ही प्रत्येक विधि इकाई कीमत को इकाइयो की सख्या से गुणा करने और परिणामत मूल्यो का प्रत्येक वर्ष के लिये जोडना मात्र है। 1959 मे उत्पादित मात्राओ को गुणाको के रूप म प्रयुक्त करने की प्रविधि का दिग्दर्शन सारणी 17 2 मे किया गया है। यहाँ तक के तक को समझ लेने के पश्चात पाठक अब यह अनुभव करने लगेगा कि कीमत के समाहृत सूचकाक वस्तुओं के स्थिर समाहार के बदलते हुए मूल्य को मापते हैं। क्याकि कुल लागत या मूल्य बदलता रहता है जबकि समाहार के सघटक नही वदलते अन य परिवतन, अवश्यमेव कीमत परिवर्तनो के कारण है। यह प्रतीत होता है कि इस प्रकार का सूचकाक खोजी गई उसी वस्तु को

सारणी 17 1

नीबू फलादि कीमतो के साधारण समाहृत सूचकाको की रचना 1959—1964*

(कीमत प्रति पेटिका की दर मे)

फल	1959	1960	1961	1962	1963	1964
अगूरफल, फ्लोरिडा	$ 4 41	$ 4 32	$ 4 49	$ 5 88	$ 6 09	$ 5 94
नीबू कैलिफोर्निया	7 10	7 22	7 18	8 56	7 28	8 38
सतरे, कैलिफोर्निया, नेवल	7 66	9 24	10 26	9 22	7 72	7 20
सतरे, कैलिफोर्निया, वैलेन्सिया	8 36	7 48	7 94	7 62	9 34	6 68
सतरे, फ्लोरिडा	5 32	6 48	5 09	7 73	7 78	6 18
समाहार	$32 85	$34 74	$34 96	$39 01	$38 21	$34 38
सूचकाक (1959 का प्रतिशत)	100 0	105 8	106 4	118 8	116 3	104 7

फसल वप 1958—59 को 1959 का नाम दिया गया है और इसी प्रकार से दूसरे वर्षो को भी क्याकि अधिकतर बिनाई और परिणामत विपणन बाद क वप मे होता है।

आँकडे सयुक्त राज्य कृषि विभाग क एग्रीकल्चरल स्टैटिस्टिक्स, *1964*, पृष्ठ 171, तथा *1965* पृष्ठ 172, तथा सयुक्त राज्य कृषि विभाग से पत्र व्यवहार द्वारा।

सारणी 17 2

नीबू फलादि कीमतो के समाहृत सूचकाको की रचना 1959—1964 1959* मे उत्पादन द्वारा भारित

(मात्राए सहस्र पेटिकाओ मे मूल्य सहस्र डालरो मे)

फल	1959 उत्पादन	निर्दिष्ट वर्ष की कीमत पर 1959 की मात्रा का मूल्य					
		1959	1960	1961	1962	1963	1964
अगूरफल फ्लोरिडा	30 500	134 505	131 760	136 945	179 340	185 745	181 170
नीबू कलिफोर्निया	17 100	121 410	123 462	122 778	146 376	124 488	143 298
सतरे कलिफोर्निया नेवल	13 500	103 410	124 740	138 510	124 470	104 220	97 200
सतर कैलिफोर्निया वलेंसिया	17 300	144 628	129 404	137 362	131 826	161,582	115 564
सतर फ्लोरिडा	91 500	486 780	592 920	465 735	707 295	711 870	565 170
समाहार मूल्य		990 733	1 102 286	1 001 330	1 289 307	1 287 905	1 102 720
सूचकाक (1959 का प्रतिशत)		100 0	111 3	101 1	130 1	130 0	111 3

*फसल वर्षो के सम्बध मे सारणी 17 1 की टिप्पणी देख।

सारणी 17 1 के कीमत आकडो और एग्रीकल्चरल स्टटिस्टिक्स के विभिन्न अकों से उत्पादन आँकडो तथा सयुक्त रा य कृषि विभाग फसल की रिपोट देने वाला बोड एन्युल क्राप समरी दिसम्बर 1965 पष्ठ 97 पर आधारित।

मापता है यदि हम निर्वाह व्यय में परिवर्तनों का निर्धारण करना चाहते है, अर्थात् वस्तुओ और सेवाओ की स्थिर "बाजार टोकरी" की लागत का निर्धारण करना चाहते हैं। समाहृत कीमत सूचकाक के लिये सामान्य सूत्र निम्नलिखित है

$$P = \frac{\Sigma p_n q}{\Sigma p_o q}$$

सकेत-चिह्न वही है जिनका पहले प्रयोग हो चुका है, परन्तु एक नया सकेत-चिह्न जोड दिया गया है q वस्तु की उत्पादित क्रय-विक्रय की गई, या उपभोग की गई मात्रा का सकेत करता है (अर्थात् मात्रा भार या गुणक)। क्योंकि सारणी 17 2 मे रचित सूचकाक आधार वर्ष मात्राओं से भारित किये गए थ, अत हम सूत्र को अधिक निश्चित रूप से इस प्रकार लिख सकते है

$$P = \frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o}$$

सारणी 17 1 तथा 17 2 की तुलना करके यह दिखाई देगा कि सरल समाहृत सूचकाक मे विशिष्ट मदो का महत्त्व वर्षानुवर्ष बदला क्योंकि उनकी कीमतें वर्षानुवर्ष बदली, परन्तु जब आधार-वर्ष मात्रा भारो का प्रयोग किया गया तो फ्लोरिडा सतरे सबसे अधिक महत्त्वपूर्ण बन गए।

भारो का चयन—यद्यपि पिछले दृष्टान्त मे 1959 की मात्राओ को भार के रूप मे प्रयुक्त किया गया तथापि यह सरल प्रविधि कई सम्भव प्रणालियो मे से एक है। जैसे 1964 की मात्राओ को भारो के रूप मे लेना इतना ही सरल रहता। यदि विपणन की गई प्रत्येक वस्तु की मात्रा वर्षानुवर्ष एक ही अनुपात मे बदले तो भार किस अवधि का सकेत करते है, इसका कोई अन्तर नही पडेगा क्योकि परिणाम एक जैसे होगे। वास्तव मे, तो भी, विभिन्न वस्तुओ की सापेक्षिक महत्ता निरन्तर परिवर्तित हो रही है, और यह अशत विभिन्न वस्तुओ की सापेक्षिक कीमतो मे परिवर्तन के कारण है जोकि स्वय पूर्ति और माँग मे परिवर्तनो का परिणाम है। इसमे एक बहुत बडी कठिनाई निहित है जिसके लिये कोई पूर्णरूपेण सन्तोषजनक हल नही है। उत्तर आशिक रूप मे इस बात पर निर्भर करता है कि विश्लेषणकर्ता इस विषय मे क्या सोचता है कि कीमत सूचकाक का क्या कार्य है।

एक विचार यह है कि इस प्रकार का सूचकाक वस्तुओ के सतत समाहार की परिवर्तनशील लागत को मापता है। एक दूसरा विचार विश्लेषण के वस्तु-स्तर मे नही अपितु सन्तुष्टि स्तर से सम्बद्ध है, यह है कि सूचकाक को दो अवधियों से या दो स्थानो पर समान सन्तुष्टि या उपयोगिता प्रदान करने वाली वस्तुओ के समुदाय की बदलती हुई लागत को मापना चाहिये। इस प्रकार, कल्पना कीजिए कि हम दो अवधियो मे (या स्थानो पर) एक ही प्रकार के दो मनुष्य समूहो के निर्वाह व्यय की तुलना करते हैं, और इन समूहो मे दोनो अवधियों (या स्थानो) मे एक-सी रुचि तथा आनन्द की क्षमता है तथा आय भी जो सन्तुष्टि की समान मात्रा का क्रय करेगी और करती है। वस्तुएँ वास्तव मे भिन्न होगी, परन्तु यदि व्यय पहले वर्ष 6,000 डालर तथा दूसरे वर्ष 6,600 डालर है

तो हम इस परिणाम पर पहुँच सकते है कि निर्वाह व्यय म 10 प्रतिशत वृद्धि हुई है। इसमे कोई सदेह नही कि किसी न भी इस प्रकार का सही माप नही किया है। यद्यपि वस्तुओं के स्थिर समाहार के केवल परिवर्तनशील मूल्य को मापना सम्भव दिखाई देता है, तथापि विश्लेषणकर्ता को ऐसी वस्तुओं की सूची चुननी चाहिए जो विभिन्न समयों में समान सन्तुष्टि प्राप्त करने की लागत के सम्बन्ध में परिचित दिशा के झुकाव को निश्चितता को दूर कर दे। इस कठिन समस्या का समाधान करने के लिए निम्नलिखित सुझाव दिये गए है

1 *आधार अवधि मात्राओं का भारों के रूप में प्रयोग करो*—यही विधि है जिसका प्रयोग हमने व्याख्यात्मक उद्देश्यों के लिये सारणी 17 2 म किया है। तथापि, यदि दो अवधियों के बीच क्रय करने वालो के वातावरण तथा रुचियों म कोई परिवर्तन नही भी है तो उन वस्तुओं का क्रय अपेक्षतया कम हो जाएगा जिनकी कीमतें अपेक्षतया बढी है और उन वस्तुओं का क्रय अपेक्षतया बढ जाएगा जिनकी कीमते अपेक्षतया गिर गई हैं। यह पूर्णरूपेण सम्भव है कि इस प्रकार का सूचकांक कीमत स्तर में वृद्धि दिखाए, जबकि जिन वस्तुओं की कीमत गिरती है उनकी क्रय की गई सापेक्ष मात्राएँ बढ़ाकर एक अमुक व्यक्ति अल्पतर कुल लागत पर वस्तुत सतुष्टि की वही मात्रा खरीदे। तब, इस प्रकार के सूचकांक म एक अर्थ म ऊर्ध्वगामी झुकाव है। यह कहा जा सकता है कि यह सूचकांक कीमत परिवर्तन की उच्च सीमा को अंकित करता है। यह विधि कभी कभी *लसपयर की विधि* के नाम से जानी जाती है, और जैसा कि पहले वर्णन किया जा चुका है इसे सकेत चिन्ह मे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$P=\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o}.$$

2 *प्रदत्त अवधि मात्राओं का प्रयोग करो*—अर्थात ऐसे भारो का प्रयोग करो जो उस वर्ष से सम्बन्धित है जिसकी आधार वर्ष म तुलना की जानी है। इस विधि मे प्रत्येक वर्ष या प्राय और अधिक बार, भारो के एक नये समुच्चय का चयन करना पडता है। परन्तु प्राय प्रचलित मात्रा भारों को प्राप्त करना असम्भव है, और यदि वे प्राप्य भी हैं तो सकलन का श्रम लगभग दुगना हो जाता है। तत्पश्चात यद्यपि प्रत्येक अवधि प्रत्यक्ष रूप से आधार वर्ष से तुलना योग्य है तो भी विभिन्न वर्षों की आपस मे तुलना करना मान्य नही क्योकि वस्तुओं का समाहार प्रत्येक वर्ष बदलता रहता है।

यदि हम उपभोक्ताओं की कीमतो के एक सूचकांक के लिये 1966 को आधार वर्ष मान लें तो आधार-वर्ष भार विधि प्रश्न का उत्तर देती है यदि 1966 मे एक महीने का मेरा निर्वाह-व्यय 500 डालर हो तो मुझे इस वर्ष उसी प्रकार से रहने के लिये कितना व्यय करना पडेगा? प्रदत्त वर्ष विधि एक भिन्न प्रश्न का उत्तर देती है यदि मैं वर्तमान जीवन स्तर 1966 मे 500 डालर प्रति मास मे चला सकता था तो मुझे इस वर्ष कितना व्यय करना पडेगा? इस प्रकार का प्रश्न पूछने म एक सैद्धान्तिक आपत्ति यह है कि जिन वस्तुओं की कीमतें गिर गई ह उनको अनुचित भार प्रदान किया गया है। कीमत मे सापेक्ष कमी उनके बढ हुए क्रय के लिए जिम्मेवार हो सकती है और यद्यपि हम कीमत-परिवर्तन को मापने का प्रयास कर रहे हैं, तथापि हमारे भारो का आंशिक रूप से सापेक्ष कीमत परिवर्तनों द्वारा निर्धारण किया जाता है। इस प्रकार इस विधि के विषय म कहा जा सकता है कि इसकी निम्नगामी नति है और यह कीमत परिवर्तन के निम्न स्तर को

अंकित करती है। इसे कई बार पाशे की विधि के नाम से जाना जाता है और इसका निम्नलिखित सूत्र है .

$$P \quad \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}.$$

3. *आधार तथा प्रदत्त वर्षों की औसत (या कुल) मात्राओं का प्रयोग करो*—यह एक मध्यम मार्ग है यद्यपि यह एक ऐसा हल है जिसकी किसी भी ज्ञान दिशा में कोई सामान्य नति नहीं है। परन्तु पुनश्च, विधि 2 के समान, हमारे पास विवर्तनशील भार हैं और उसका परिणाम यह है कि विभिन्न वर्षों में आपस में तुलनीयता की कमी है। इस विधि का सुझाव अंग्रेज अर्थशास्त्री मार्शल और ऐजवर्थ ने स्वतन्त्र रूप से दिया था और सूत्र

$$P = \frac{\Sigma p_n (q_o + q_n)}{\Sigma p_o (q_o + q_n)}$$

को कभी-कभी मार्शल-ऐजवर्थ सूत्र के नाम से जाना जाता है।

4 *उन मात्राओं की सब वर्षों के लिए इकट्ठी औसत निकालो जो सूचकांकों में सम्मिलित है*—यद्यपि यह ऐतिहासिक अध्ययन के लिए सभवत एक उत्तम समाधान है तथापि यदि सूचकांक को अद्यतन रखा जाना है तो यह योजना अव्यावहारिक है, क्योंकि इसका अर्थ है भारों का प्रचलित परिशोधन और सूचकांकों के पूर्ण समुच्चय का सतत पुन परिकलन।

5 *उन अनेक वर्षों की, जिनको प्ररूपी समझा जाता है, मात्राओं की इकट्ठी औसत निकालो*—यह भी एक बीच का समाधान है, परन्तु यह व्यावहारिक है और बहुधा प्रयोग में लाया जाता है। तथापि प्रयुक्त मात्राओं की सूची अन्तोगत्वा अप्रचलित बन जाएगी। जब इस प्रकार की बात हो तब एक नया सूचकांक बनाया जा सकता है और उसे पुराने से जोड़ा जा सकता है। ऐसा करने वाली विधियों के विषय में अगामी अध्याय में विचार किया जाएगा। 1959, 1960, और 1961 की औसत मात्राओं का भारों के रूप में प्रयोग करके, 1964 की नीबू फलादि कीमतों के सूचकांक की रचना का वर्णन सारणी 17 3 में किया गया है। आधार वर्ष भारों का प्रयोग करने वाले सूचकांक से यह सूचकांक केवल 1.2 प्रतिशतता बिन्दु भिन्न है। इस विशेष सूचकांक के लिए सूत्र निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$P \quad \frac{\Sigma p_{64} q_{59-61}}{\Sigma p_{59} q_{59-61}}.$$

वास्तव में, परिणाम वही है चाहे औसत मात्रा या कुल मात्रा भारों का प्रयोग किया जाय।

6 *महत्तम समापवर्तक का निर्धारण करो*—भार प्रत्येक वर्ष के लिए समान प्रत्येक वस्तु की मात्राएँ, आधार तथा प्रदत्त वर्ष के लिए या तुलना किये जाने वाले सब वर्षों के लिए, हैं। दूसरी स्थिति में इसका अर्थ होगा कि किसी वस्तु के लिए किसी भी तुलना किये जाने वाले वर्ष में विक्रय की न्यूनतम मात्रा ली जाएगी। तब, सामान्यतया ली गई विभिन्न वस्तुओं की मात्राओं में से प्रत्येक उसी वर्ष के लिए नहीं होगी। पूर्वः वर्णित विधि 1 और

सारणी 17 3

1959 1960 तथा 1961 मे उत्पादन* द्वारा भारित नीबू फलादि कीमतो के 1964 के समाहृत सूचकांक की रचना

(उत्पादन सहस्र पेटिया और मूल्य सहस्र डालरो मे)

फल	उत्पादन			कुल उत्पादन 1959 1961	औसत उत्पादन 1959 1961	कीमत प्रति पेटिका		निम्न वर्षों की कीमत पर 1959 1961 के औसत उत्पादन का मूल्य	
	1959	1960	19(1			195)	1)(4	1959	19(4
अंगूरफल फ्लोरिडा	30 500	31 (00	35 000	97 100	32 370	4 41	5)4	142 752	192 278
नीबू कलिफोर्निया	17 100	13 600	15 200	45 900	15 300	7 10	8 38	108 630	128 214
सतरे कलिफोर्निया नेवल	13 500	9 000	7 (00	30 100	10 030	7 (6	7 20	7(830	72 216
सतरे कलिफोर्निया वलेंसिया	17 300	16 000	13 100	4(400	15 470	8 36	6 (8	129 329	103 340
सतरे फ्लोरिडा ..	91 500	86 700	113 400	291 600	97 200	5 32	(18	517 104	600 (9(
समाहार मूल्य								974 645	1 096 744
सूचकांक (1959 का प्रतिशत)								100 0	112 53

* सूचकांक यहाँ है तीन वर्षों के लिए प्रयुक्त भार वाले फल या औसत उत्पादन है। फसल वर्षों से सम्बद्ध सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें। आँकड़े सारणी 17 1 तथा सारणी 17 2 के नीचे दिये गए स्रोतों से

2 मे निहित प्रकार की अभिनति मे बचने के लिए इस उत्तम युक्ति का सुझाव जे० एम० केन्स द्वारा दिया गया है। इसकी शालीनता इसका गुण है। यह युक्ति उस प्रयास से बचती है जिसे पूर्ण रूप से नहीं किया जा सकता। तथापि, यदि उन मात्राओं का मूल्य जो कि विभिन्न अवधियों में समान है कुल वर्चो की तुलना में कम है, या यदि वे विभिन्न अवधियों में योग का एक परिवर्तनशील अनुपात रखती है, या यदि वस्तुओं के इस समाहार से प्राप्त सन्तुष्टि बदलती है, तो विधि परिशुद्ध नहीं है और वह विधि 5 से भी कम सही हो सकती है।

7 दो सूचकाक बनाओ, प्रत्येक भारो के भिन्न समुच्चय के साथ, और साधारणतया ज्यामितीय विधि से दोनों की इकट्ठी औसत निकालो—भारित करने के लिये चुने हुए दोनो ढग साधारणतया आधार तथा प्रदत्त वर्ष भार है। तब सूत्र निम्नलिखित बनता है

$$P=\sqrt{\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o}\times\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}}.$$

इसे प्राय फिशर का "आदर्श" सूचकाक कहा जाता है, क्योकि यह सगत व्यवहार के निश्चित परीक्षणो के अनुसार है जिसे इर्विंग फिशर उचित समझते थे।[4] दूसरी ओर, यह निश्चित रूप से कहना कठिन है कि इस प्रकार का सूचकाक क्या मापता है।

किसी एक भार करने वाली विधि के लिये, जिसमे प्रत्येक सूचकाक के लिये भारों का विभिन्न समूह प्रयुक्त होता है, यह सामान्य आलोचना की जाती है कि यद्यपि एक सूचकाक की विधिपूर्वक आधार वर्ष के सूचकाक के साथ तुलना की जा सकती है तथापि तार्किक आधार पर अन्य दो वर्षो के सूचकाको की (जैसे कि 1963 और 1964) एक दूसरे के साथ तुलना नही की जा सकती। यह आलोचना, प्रदत्त-वर्ष भारो पर, आधार तथा प्रदत्त-वर्ष भारा की औसत पर, *जब तुलना किये गए केवल दो वर्षो मे चुनी गई मात्राएँ समान* हो तो महत्तम समापवर्तक विधि पर, और "आदर्श" सूचकाक पर लागू होती है। यह आधार-वर्ष भारो पर, सभी वर्षों के औसत भारो पर, प्रतुनी भारो पर, या *जब सभी वर्षों मे समान मात्राओं का प्रयोग किया जाता है तो महत्तम समापवर्तक विधि पर लागू नहीं* होती।

यद्यपि भार-चुनाव का सिद्धात रोचक है तथा इसमे उच्चकोटि का तार्किक विश्लेषण निहित है, तथापि इसकी व्यावहारिक महत्ता का अत्यधिक अनुमान लगाना सरल है। नीबू फलादि आंकडो से प्राप्त निम्नलिखित परिणामो पर विचार करो :

भार करने का ढग	*1964* सूचकाक
सरल समाहृत	104 7
1959 मात्रा भार (आधार वर्ष भार)	111.3
1959—1961 औसत मात्रा भार	112 5
1964 मात्रा भार (प्रदत्त-वर्ष भार)........... ..	111.2
"आदर्श" सूचकाक..........................	111.2

---

4 देखें इर्विंग फिशर, दि मेकिंग ऑफ इन्डेक्स नम्बर्स, हाउटन मिफ्लिन कम्पनी, बोस्टन 1927, पृष्ठ 220

इस स्थिति मे साधारण तथा भारित सूचकाको मे बहुत ही अधिक भिन्नता है, परन्तु भार करने की विधियो मे बहुत कम अन्तर है। भारित करने की विभिन्न विधियाँ काफी मिलती-जुलती है क्योंकि परस्पर सापेक्ष भारो की महत्ता चारो प्रणालियो मे लगभग एक-सी है। तथापि यदि दोनो कीमतें और मात्राएँ अपने सापेक्ष विस्तार मे बहुत अधिक भिन्न होती तो विभिन्न भारो ने सुस्पष्ट विभिन्न परिणाम दिये होते। यदि सभी कीमतें एक ही दिशा मे गतिमान हो और एक ही अनुपात मे बदलें तो इससे कोई अन्तर नही पडेगा कि भार करने की कौनसी विधि चुनी गयी है। परन्तु यदि ऐसा होता है कि वे वस्तुएँ जिनकी अवधि के मध्य सापेक्ष महत्ता बहुत अधिक बदल रही है और जिनमे औसत से काफी भिन्न कीमत परिवर्तन हो रहे है तो भार करने का मामला महत्त्वपूर्ण बन जाता है। यह प्राय कम महत्त्वपूर्ण है कि बिल्कुल ठीक भारो का प्रयोग किया जाता है या केवल अनुमानित भारो का। इस प्रकार सारणी 17 4 बिल्कुल सारणी 17.3 जैसी है सिवाय इसके कि मात्रा भारो का एक अक तक पूर्णांकन किया गया है परन्तु परिणामो मे केवल 1 17 का अन्तर है। इसका कारण यह है कि पूर्णांकन ने भारो की साक्षेप महत्ता को अधिक नही बदला। सभी व्यावहारिक उद्देश्यो के लिये, साधारणतया पर्याप्त सही परिणाम प्राप्त होगे यदि कुछ अधिक महत्त्वपूर्ण वस्तुओ को यथार्थ रूप से भारित किया जाता है और अनेक महत्त्वहीन वस्तुओं को पूर्णांकित भार दिये जाते हैं।[5]

यद्यपि भारो का चयन करने मे केवल सन्निकट परिशुद्धता आवश्यक है तथापि व्यवहार मे कीमत दरो की परिशुद्धता बहुत अधिक महत्व की है। वास्तव मे यह इस बात का परिणाम है कि कुछ कीमते वर्षानुवर्ष काफी परिवर्तन दिखा सकती है जबकि अन्यो मे परिवर्तन बहुत कम होता है। यह वैसा ही है जैसे कि हम कहे कि एक दूसरे के प्रति कीमतो का अनुपात वर्षानुवर्ष मे बदलता है।

कई वर्षो मे अनेक परिवर्तन आते है वस्तुओ की सापेक्ष महत्ता बहुत अधिक बदल जाती है, पुरानी वस्तुएँ प्रयोग से हट जाती हैं और उनका स्थान नई वस्तुएँ ले लेती है, वस्तु के मॉडल, स्टाइल, अथवा ग्रेड अप्रचलित हो जाते है और उनका विनिर्माण बन्द हो जाता है. इनका स्थान नए मॉडल, स्टाइल अथवा ग्रेड ले लेते है; विपणन केन्द्र बदल जाते है और नए केन्द्र की कीमत दरो के लिए पुराने केन्द्र की कीमत दरो का स्थान ले। आवश्यक है, समुद्रतट तक परिवहन शुल्क युक्त कीमत दरो की बजाय सुपुर्दगी कीमतें आ सकती है या इसके विपरीत हो सकता है। इन परिस्थितियो मे से किसी एक मे प्रत्येक सूचकाक को मूल आधार के प्रतिशत के रूप मे नही अपितु पूर्ववर्ती अवधि के प्रतिशत के रूप मे वर्णित करना वाञ्छनीय हो सकता है। इस प्रकार के सूचकाक मे तुलना किये जाने वाले किसी एक या दोनो वर्षो या मासो से सम्बन्धित भारो का उपयोग करते हुए, ऊपर दिये गए सूत्रों मे से किसी एक का प्रयोग किया जा सकता है।

---

5. इरविंग फिशर प्रस्तुत करते है कि मात्राओं का पूर्णांकन 1, 10, 100 या 1,000 तक करना चाहिये। यह वास्तव मे काम को बहुत सुगम कर देता है। किसी मात्रा का 1 और 10 (उदाहरणार्थ) के बीच पूर्णांकन करते हुए विभक्त करने वाला बिन्दु इन दो अको का अकगणितीय माध्य नही है अपितु ज्यामितीय माध्य 3 1623 है, क्योंकि इसमे लघुतम सापेक्ष त्रुटि है।

सारणी 17.4

1959, 1960 तथा 1961 में एक ग्रेक तक पूर्णांकित औसत उत्पादन* द्वारा भारित नीबू फलादि कीमतों के 1964 के समाहृत सूचकांक की रचना

(उत्पादन सहस्र पेटिकाओं में मूल्य सहस्र डालरों में)

फल	औसत उत्पादन 1959—61 पूर्णांक	कीमत प्रति पेटिका 1959	कीमत प्रति पेटिका 1964	निम्न वर्षों की कीमतों पर 1959—1961 के औसत उत्पादन का मूल्य 1959	निम्न वर्षों की कीमतों पर 1959—1961 के औसत उत्पादन का मूल्य 1964
अंगूरफल फ्लोरिडा	30 000	$4 41	$5 94	132,300	178,200
नीबू, कैलिफोर्निया	20 000	7 10	8 38	142 000	167 600
सतरे, कैलिफोर्निया, नेवल	10 000	7 66	7 20	76 600	72,000
सतरे कैलिफोर्निया वैलेन्सिया	20 000	8 36	6 68	167 200	133 600
सतरे, फ्लोरिडा	100 000	5 32	6 18	532 000	618 000
समाहार मूल्य				1 050 100	1 169,40
सूचकांक (1959 का प्रतिशत)				100 0	111 36

* फसल वर्षों के सम्बन्ध में सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें।
आंकड़े सारणी 17 1 और 17 2 के नीचे दिए गए स्रोतों से।

प्रायः उत्तरोत्तर गुणा के क्रम द्वारा इन अलग अलग प्रतिशतताओं को मूल आधार के साथ शृंखलाबद्ध कर दिया जाता है। ऐसे सूचकांक को जिसे शृंखला सूचकांक कहा जाता है, आगामी अध्याय में व्याख्या की जाएगी। *जब एक वस्तु का दूसरी वस्तु से प्रतिस्थापन* करते है, या जब भारों का बदलना है तो केवल एक अवधि के लिये परस्पर व्यापी आंकड़ों की आवश्यकता पडती है जब कि प्रत्यक्ष तुलना केवल वर्तमान अवधि और पिछली अवधि की कीमतों (या मात्राओं) के बीच में की जाती है।

कीमत सापेक्षों की औसतें

कीमत सापेक्षों की औसत निकाल कर सूचकांकों की रचना में दो आधारभूत पग उठाने पड़ते हैं।

1 *प्रत्येक श्रेणी के लिए वास्तविक कीमतों को आधार अवधि की प्रतिशतताओं में बदलो—इन प्रतिशतताओं को कीमत सापेक्षों के नाम से पुकारा जाता है, क्योंकि इन्हें डालरों और सेन्ट में नहीं अपितु आधार अवधि में कीमत से सम्बद्ध प्रतिशतताओं के रूप में व्यक्त किया जाता है।* सारणी 17 5 के ऊपरी भाग में 1959 से 1964 तक के पांच नीबू फलादि के कीमत सापेक्षों को दिखाया गया है। सापेक्षों की इन श्रेणियों में

प्रत्येक का प्रदत्त वर्ष की कीमत को आधार वर्ष की कीमत से विभक्त करके परिकलन किया गया था।

सारणी 17 5

कीमत सापेक्षों के साधारण अ कगणितीय माध्य के प्रयोग द्वारा नीबू फलादि कीमतों के सूचकांकों की रचना, 1959—1964*

फल	1959	1960	1961	1962	1963	1964
अंगूरफल फ्लोरिडा	100 0	98 0	101 8	133 3	138 1	134 7
नीबू, कैलिफोर्निया	100 0	101 7	101 1	120 6	107 5	118 0
संतरे कैलिफोर्निया नवल	100 0	120 6	133 9	120 4	100 8	94 0
संतरे कैलिफोर्निया वैलेन्सिया	100 0	89 5	95 0	91 1	111 7	79 9
संतरे फ्लोरिडा	100 0	121 8	95 7	145 3	146 2	116 2
योग	500 0	531 6	527 5	610 7	599 3	542 8
औसत (1959 का प्रतिशत)	100 0	106 3	105 5	122 1	119 9	108.6

*फसल वर्षो के सम्बन्ध में सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें।

सारणी 17 1 के आंकड़ों पर आधारित।

2 प्रत्येक वर्ष के लिये अलग अलग कीमत सापेक्षों की औसत निकालो, इस प्रकार सूचकांकों की श्रेणी प्राप्त करो। सारणी 17 5 के निम्न भाग में सापेक्षों का साधारण अंकगणितीय माध्य प्रयोग में लाया गया है। इस विधि की त्रुटि यह है कि प्रत्यक सापेक्ष (जिस वस्तु को वह प्रस्तुत करता है उसकी महत्ता की उपेक्षा करते हुए) आधार अवधि में इसकी प्रतिशतता में वृद्धि या कमी के अनुसार प्रदत्त वर्ष के सूचकांक को प्रभावित करता है। चार्ट 17 3 में कीमत सापेक्षों की पाँच श्रेणियों तथा सूचकांक को दिखाया गया है। इस चार्ट से यह देखा जा सकता है कि 1961 और 1963 में दो सापेक्षों में कमी हुई, जबकि तीन में वृद्धि हुई परन्तु सूचकांक में कमी हुई क्योंकि दो सापेक्षों में उन तीन की अपेक्षा जिनमें कि वृद्धि हुई प्रतिसतुलन की अपेक्षा अधिक कमी आई। जिन दो सापेक्षों में कमी आई हो सकता है उन्होंने सूचकांक के लघु अवयवों का प्रस्तुत किया हो तथा परिणाम वही प्राप्त हुआ हो। यह संकेत करना उचित हो सकता है कि कीमत सापेक्षों का साधारण अंकगणितीय माध्य भारित समाहृत सूचकांक के समान है, जहाँ भार, आधार वर्ष में 1 00 डालर (या किसी विशिष्ट रकम) द्वारा खरीदी जा सकने वाली प्रत्येक वस्तु की मात्राएँ हैं। यह आधार वर्ष कीमतों से व्युत्क्रमों द्वारा भारित करने के समान है।

वास्तव में अंकगणितीय माध्य से भिन्न औसतों का प्रयोग सम्भव है, उदाहरणार्थ, रेखागणितीय माध्य माध्यिका, अथवा हरात्मक माध्य, और इस विषय पर बाद में कुछ ध्यान दिया जाएगा। तथापि सापेक्षों के भारों का प्रयोग अधिक महत्त्वपूर्ण है। ये भार समाहृत विधि के साथ प्रयुक्त मात्रा भारों के विपरीत मूल्य भार होने चाहियें। शीघ्र ही इसका कारण स्पष्ट हो जाएगा। आधार वर्ष 1959 में प्रत्येक फल के मूल्य से भारित सारणी 17 5 के सापेक्षों के साथ नीबू फलादि कीमतों के सूचकांक का परिकलन सारणी 17 6 में दिखाया गया है। जैसा कि उस सारणी से स्पष्ट है, प्रविधि में निम्नलिखित आते हैं (1) सापेक्षों को उनके भारों से गुणा करना, (2) इन गुणनफलों को वर्षानुवर्ष जोड़ना, तथा

सारणी 17 6

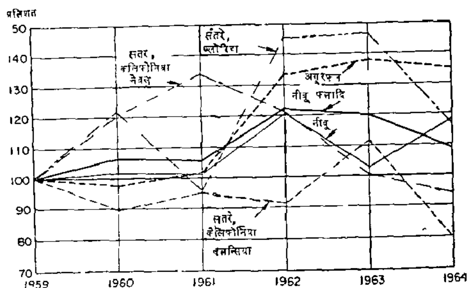
आधार वर्ष (1959) मूल्यों द्वारा भारित कीमत सापेक्षों के अंकगणितीय माध्यों के प्रयोग द्वारा नीबू फलादि कीमतों के सूचकांकों की रचना 1959 1964*

(मूल्य सहस्र डालरों में)

फल	1959 मूल्य	निर्दिष्ट वर्ष के मूल्य सापेक्ष का 1959 के मूल्य से गुणा					
		1959	1960	1961	1962	1963	1964
अंगूरफल फ्लोरिडा	134 505	134 505	131 815	136 926	179 295	185 751	181 178
नीबू कैलिफोर्निया	121 410	121 410	123 474	122 746	146 420	124 445	143 264
संतरे कैलिफोर्निया नवल	103 410	103 410	124 712	138 466	124 506	104 237	97 205
संतरे कैलिफोर्निया वेलेंसिया	144 628	144 628	129 442	137 397	131 756	161 549	115 558
संतरे फ्लोरिडा	486 780	486 780	592 898	465 848	707 291	711 672	565 638
योग		990 733	1 102 341	1 001 383	1 289 268	1 287 654	1 102 843
सूचकांक (1959 का प्रतिशत)		100 0	111 3	101 1	130 1	130 0	111 3

*फल वर्षों के सम्बन्ध में सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें।

सारणी 17 5 में कीमत सापेक्षों और सारणी 17 2 में 1959 के कीमत आँकड़ों पर आधारित।



चार्ट 17 3 नीवू फलादि कीमतो के साधारण अकगणितीय औसत सूचकाक तथा पाँच फलो मे से प्रत्यक के कोमत सापेक्ष, 1959—1964 । 1959=100 आंकडे सारणी 17 5 मे ।

(3) प्रत्यक वर्ष के इन योगो को भारो के जोड मे विभक्त करना । परिणाम वही है जैसे कि आधार-वर्ष-मात्रा भारा के साथ समाहृत सूचकाक के लिय प्राप्त हुए थे (सारणी 17.2), यद्यपि सख्याओ का पूर्णाकन किया गया था । यह इसी प्रकार होना चाहिए यह साधारण रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है । आइय पहले हम एक अकेली वस्तु फ्लोरिडा सतरे लें और दिखाये कि (क) आधार वर्ष (1959) मूल्य भार को जब प्रदत्त वर्ष (1964) सापक्ष पर लागू प्रयुक्त किया गया है तो यह वही परिणाम उत्पन्न करता है जैसाकि (ख) आधार वर्ष (1959) की मात्रा को प्रदत्त वर्ष (1964) की कीमत से गुणा करके आता है । अर्थात्

(क). . 1964 का कीमत सापेक्ष है डालर 6 18 — डालर 5.32

=1 1617, या 116 17 प्रतिशत,

आधार वर्ष मूल्य गुणा 1964 कीमत सापेक्ष है . ...

डालर 486,780,000 × 1.1617 = डालर 565,492,326 ।

(ख)......आधार-वर्ष मात्रा गुणा प्रदत्त वर्ष कीमत है.....

91,500,000 × डालर 6 18 = डालर 565,470,000 ।

(सारणी *17 6 मे 1964 के फ्लोरिडा सतरो के लिये* डालर *565,638,000* दिखाया गया है क्योंकि 1964 सापेक्ष 116 2 लिया गया था ।)

यह सम्बन्ध सच्चा है, न केवल प्रत्येक अलग वस्तु के लिये अपितु वस्तुओं[6] के समूहों के लिये भी। संकेत चिह्नों में

$$\frac{\Sigma\frac{p_n}{p_o}p_oq_o}{\Sigma p_oq_o}=\frac{\Sigma p_nq_o}{\Sigma p_oq_o}$$

स्पष्टत जो कुछ अधिक सुगमतापूर्वक आधार-वर्ष-मात्रा भारो के साथ समाहारो का प्रयोग करके सीधे ढग से प्राप्त किया जा सकता है उसे आधार-वर्ष मूल्य भारो के साथ सापेक्षो की भारित औसत की विधि से प्राप्त करना प्राय एक गोलमोल विधि है। तत्पश्चात् अधिकतर व्यक्तियों को एक समाहृत सूचकाक का अर्थ, सापेक्षो की एक औसत से अधिक स्पष्ट दिखाई देता है। तो फिर सर्वदा समाहृत विधि का प्रयोग क्यों नहीं किया जाना चाहिये? एक कारण यह है कि कीमत सापेक्ष स्वत कभी-कभी अध्ययन करने के योग्य होते हैं, केवल इस कारण से नहीं कि पाठक के लिये एक श्रेणी विशिष्ट महत्ता रखती हो परन्तु

---

6. अधिक सामान्यतया, औसत सूचकाको के सम्बन्ध मे निम्नलिखित सम्बन्धो का वर्णन किया जा सकता है

(1) आधार वर्ष मूल्यो $(p_o\,p_o)$ द्वारा भारित सापेक्षों की अंकगणितीय औसत आधार वर्ष मात्राओ के साथ भारित समाहृत सूचकाक के बराबर है।

(2) इसी प्रकार आधार वर्ष कीमतो तथा प्रदत्त वर्ष मात्राओं $(p_o\,p_n)$ के गुणा द्वारा भारित सापेक्षो की अंकगणितीय औसत प्रदत्त वर्ष मात्राओ के साथ भारित समाहृत सूचकाक के बराबर है।

(3) प्रदत्त वर्ष मूल्यो $(p_n\,p_n)$ द्वारा भारित सापेक्षो की हरात्मक औसत प्रदत्त वर्ष मात्राओ के साथ भारित समाहृत सूचकाक के बराबर है। इस प्रकार,

$$1-\frac{\Sigma\left(\frac{1}{p_n-p_o}p_nq_n\right)}{\Sigma p_nq_n}=1-\frac{\Sigma\left(\frac{p_o}{p_n}p_nq_n\right)}{\Sigma p_nq_n},$$

$$=\frac{\Sigma p_nq_n}{\Sigma\left(\frac{p_o}{p_n}p_nq_n\right)}=\frac{\Sigma p_nq_n}{\Sigma p_oq_n}$$

(4) इसी प्रकार, यह दिखाया जा सकता है कि आधार वर्ष मात्राओ और प्रदत्त वर्ष कीमतो (p_nq_o) के गुणा द्वारा भारित सापेक्षो की हरात्मक औसत आधार वर्ष मात्राओ के साथ भारित समाहृत सूचकाक के बराबर है।

इन सामान्य बातों का वर्णन सूचकाको की रचना मे पथप्रदर्शकों के रूप में किया जा सकता है, जब सूचकांको की रचना सापेक्षो से की जाती है

(क) यदि सापेक्षो की अकगणितीय औसत का प्रयोग करना वाछनीय है तो मूल्य-भार आधार कीमतो तथा वाछित मात्राओ के गुणनफल होने चाहिएँ।

(ख) यदि मूल्य भारों के प्रयोग वाले सापेक्षो की औसत का प्रयोग करना वांछनीय है जो कि प्रदत्त-वर्ष कीमतो तथा किसी अवधि की मात्राओ का गुणनफल है, तो हरात्मक औसत का प्रयोग किया जाना चाहिये।

किसी भी परिस्थिति में प्रदत्त वर्ष कीमतो वाले मूल्यो के साथ सापेक्षो की अकगणितीय औसत का प्रयोग नहीं करना चाहिये, क्योंकि यह वस्तु को अतिरिक्त भार केवल इसलिये प्रदान करती है क्योंकि इसकी कीमत बढ़ गई है। ऐसी प्रविधि का परिणाम ऊर्ध्वगामी अभिनति है।

इसलिए कि सापेक्षों के समूहों का अध्ययन प्रतिदर्श के चुनाव में अथवा समूह सूचकांकों के निर्माण के निर्धारण में सहायता कर सकता है। बारम्बारता वक्रों के सम्बन्ध में यह दृष्टिगोचर हुआ कि एक औसत किसी स्थिति का पूर्ण चित्र प्रदान नहीं करती। दूसरे तरीके भी प्रयोग किए जाने योग्य हो सकते हैं। अन्य कारण यह है कि जोडी जाने वाली श्रेणी को कई बार केवल सापेक्षों के रूप में ही प्राप्त किया जा सकता है, अथवा उनका अर्थ केवल सापेक्षों के रूप में ही हो क्योंकि जैसाकि मात्रा सूचकांकों की अवस्था में है एक श्रेणी विभिन्न भौतिक इकाइयों में अभिव्यक्त कई उपश्रेणियों से बनी हो सकती है। सापेक्षों का प्रयोग कीमत सूचकांकों का बनाने की अपेक्षा मात्रा सूचकांकों (आगे वर्णन किया जाएगा) की रचना में अधिक सामान्य है क्योंकि मात्रा सूचकांकों के संघटक स्वयं बहुधा सूचकांक या सापेक्ष होते हैं।

वस्तु भार बनाम समूह भार—मूल्य भारों से सम्बन्धित वही व्यावहारिक शिक्षा दी जा सकती है जोकि मात्रा भारों के सम्बन्ध में दी गई थी—केवल सन्निकट परिशुद्धता आवश्यक है। तथापि जब वस्तुओं की सीमित संख्या चुनी जाती है तो निम्नलिखित विचार महत्त्वपूर्ण बन जाता है क्या किसी प्रदत्त वस्तु के लिए चुने गए मूल्य भार का बाजार से सम्बन्धित उस वस्तु का मूल्य होना चाहिये या उसे वस्तुओं के उस कुल समूह का संकेत करना चाहिये जिसे कि वस्तु प्रस्तुत करती है? इस प्रश्न का उत्तर यह है कि जब तक विभिन्न समूहों के लिये आनुपातिक मूल्य प्रतिनिधित्व प्राप्त करने के लिये कुछ समूहों में मदों की संख्या में पर्याप्त वृद्धि व्यावहारिक न हो (और कदाचित् दूसरों की संख्या में कमी), तब तक विभिन्न मदों के भारों का समजन करना निश्चित रूप से अच्छा है ताकि इस प्रकार का समूह प्रतिनिधित्व प्राप्त कर लिया जाए। अत्यधिक सन्तोषजनक परिणाम तब प्राप्त होंगे यदि हम जितना अधिक सम्भव हो उतनी वस्तुओं को प्रत्येक समूह से चुन तथा साथ ही उचित से कम प्रतिनिधित्व प्राप्त तत्त्वों को अतिरिक्त भार दे दें।

वही परिणाम प्राप्त करने के लिये दूसरी विधि यह है कि प्रत्येक समूह के लिये उतनी अधिक वस्तुएँ चुन ली जाएँ जितनी सुविधाजनक हो ताकि पृथक समूह सूचकांकों का परिकलन किया जाए और तब उचित भारों का प्रयोग करते हुए समूह सूचकांकों को एक सामान्य सूचकांक में जोड़ दिया जाए। क्योंकि समूह सूचकांक सापेक्ष हैं अत उनका जोड कोई नई समस्या प्रस्तुत नहीं करता। आगे इस बात का ध्यान रखें कि विभिन्न समूहों से उन समूहों के मूल्य अनुपात में वस्तुओं की संख्या का चुनाव करने के लिये वस्तुओं को भारित करने को एक प्रकार से एक विकल्प के रूप में समझा जाना चाहिये।

औसतों के प्रकार—*ज्यामितीय माध्य*—कई बार यह तर्क प्रस्तुत किया जाता है कि ज्यामितीय माध्य का प्रयोग कीमत सापेक्षों की औसत निकालने के लिए किया जाना चाहिये। आइये हम केवल दो वस्तुओं का प्रयोग करने वाला साधारण उदाहरण लें जिसमें दो देशों के बीच कीमत स्तर का माप आता है। क देश को आधार के रूप में प्रयुक्त करते हुए और यह प्रदर्शित करते हुए कि समान्तर माध्य के अनुसार ख देश में कीमत स्तर क देश से 25 प्रतिशत ऊँचा है, हम निम्नलिखित परिणाम प्राप्त करते हैं।

वस्तु	क देश		ख देश	
	इकाई कीमत	कीमत सापेक्ष (प्रतिशत)	इकाई कीमत	कीमत सापेक्ष (प्रतिशत)
गेहूँ (बुशल)	$0 80	100	$1 60	200
कपास (पाउंड)	12	100	06	50
समान्तर माध्य	..	100		125
गुणोत्तर माध्य	.	100	.	200

आइए, अब यह देखें कि उस समय क्या होता है जब देश ख को आधार के रूप में लिया जाता है और देश क में कीमत स्तर को देश ख के कीमत स्तर के सापेक्ष के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।

वस्तु	क देश		ख देश	
	इकाई कीमत	कीमत सापेक्ष (प्रतिशत)	इकाई कीमत	कीमत सापेक्ष (प्रतिशत)
गेहूँ (बुशल)	$0 80	50	$1 60	100
कपास (पाउंड)	12	200	06	100
समान्तर माध्य		125		100
गुणोत्तर माध्य	..	100	.	100

इन सकलनों से, समान्तर माध्य इस बात का संकेत करता है कि क देश में कीमत स्तर ख देश के कीमत स्तर से 25 प्रतिशत ऊँचा है।

दोनों सारणियों में परिकलनों के परिणाम असंगत प्रतीत होते हैं। तथापि, वे समान्तर माध्य की त्रुटि के कारण असंगत नहीं हैं, अपितु उन छिपे हुए भारों के कारण जो कि दोनों स्थितियों में बराबर नहीं हैं। जब क देश आधार था, तो यह पूर्वकल्पना कर ली गई थी कि क देश में क्रीत कपास और गेहूँ की मात्राएँ 1 डालर (या मुद्रा की अन्य विशिष्ट मात्रा) के द्वारा क्रीत कपास की इकाइयों की संख्या ($8\frac{1}{3}$ पाउंड) तथा गेहूँ की इकाइयों की संख्या ($1\frac{1}{4}$ बुशल) होगी तथा वही भार ख देश के लिये लागू होंगे।

अर्थात्, क देश के लिये

गेहूँ के $1\frac{1}{4}$ बुशल 0 80 डालर की दर से $= \$1\ 00$, सापेक्ष $= 100$,
कपास के $8\frac{1}{3}$ पाउड 12 की दर से $= 1\ 00$; सापेक्ष $= 100$,

और ख देश के लिए

गेहूँ के $1\frac{1}{4}$ बुशल 1 60 डालर की दर से $= \$2\ 00$, सापेक्ष 200,
कपास के $8\frac{1}{3}$ पाउड 06 की दर से $= 50$, सापेक्ष $= 50$।

इस आधार पर, ख देश म कीमत स्तर क देश से 25 प्रतिशत ऊँचा है।

जब ख देश आधार था तो यह पूर्व-कल्पना कर ली गई थी कि ख देश मे क्रय की गई गेहूँ और कपास की मात्राएँ 1 00 डालर (या मुद्रा की अन्य निदिष्ट मात्रा) द्वारा क्रय की गई कपास की इकाइयो की सख्या ($16\frac{2}{3}$ पाउड) और गेहूँ की इकाइयो की सख्या ($\frac{5}{8}$ बुशल) होगी, और क देश के लिये वही भार लागू होंग।

ख दश क लिए, इससे प्राप्त होता है

गहूँ क $_8$ बुशल 1 60 डालर की दर से $= \$1\ 00$ सापेक्ष $= 100$,
कपास के $16\frac{2}{3}$ पाउड 60 की दर से $= \$1.00$, सापेक्ष $- 100$,

और क देश के लिये

गेहूँ के $\frac{5}{8}$ बुशल 0 80 डालर की दर से $= \$0\ 50$, सापेक्ष $= 50$,
कपास के $16\frac{2}{3}$ पाउड 12 की दर से $= 2\ 00$, सापेक्ष $= 200$।

भारो के इस समूह का प्रयोग संकेत करता है कि क देश मे कीमत स्तर ख देश से 25 प्रतिशत ऊँचा है।

अब, कई बार ज्यामितीय माध्य का पक्ष लिया जाता है क्योकि यह उस प्रकार की स्थितियो मे जैसी कि ऊपर की दो सारणियो मे दिखाई गई है सगत परिणाम प्रदान करता है। परिणाम इसलिये सगत है क्योकि दोनो मे से किसी एक देश के आधार के साथ दूसरे देश का सूचकाक 100 है, जैसा कि सारणियो मे देखा जा सकता है। परन्तु गुणोत्तर माध्य केवल उसमे अन्तर्निहित पूर्व-धारणा के कारण सगत परिणाम प्रस्तुत करता है। अर्थात् क्रय की गई दो वस्तुओ का मूल्य दोनो देशों मे एक ही अनुपात मे है। इसका यह अर्थ है कि क देश मे ख देश की अपेक्षा गेहूँ की मात्रा अधिक क्रय की जाएगी, और ख देश मे क देश की अपेक्षा कपास की मात्रा अधिक क्रय की जाएगी।

पूर्वगामी अनुच्छेदो मे जो सूचकाक बनाये गये थे, उनके लिये भारो का कोई विशिष्टीकरण नही किया गया था। हम पहले ही देख चुके है कि सापेक्षो को उचित प्रकार से चुने हुए मूल्यो से भारित करना चाहिये, और अभी दिये गए दृष्टान्तो के लिय उन भारो का, दो देशो मे विक्रय की गई वस्तुओ के वास्तविक मूल्य के आधार पर, निर्धारण किया जाना चाहिये।

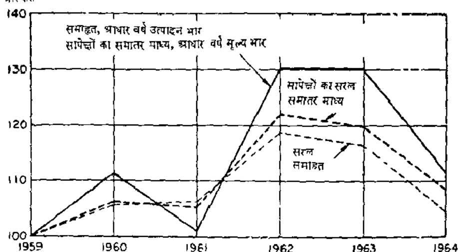
गुणोत्तर माध्य के लिये दूसरा तर्क इस दृढ़ कथन पर आधारित है कि सापेक्षों के बारबारता बटनों की प्रवृत्ति एक सामान्य बटन बनाने की होती है जब उन्हें लघुगणकीय X पैमाने वाले कागज पर लेखाचित्रित किया जाता है। इस प्रकार का बारम्बारता बटन, किन्तु कीमत सापेक्षों का नहीं, चार्ट 23.13 और 23.14 में दिखाया गया है। तर्क इस प्रकार चलता है कीमत का दुगनापन उतने ही महत्त्वपूर्ण अपसरण को प्रस्तुत करता है (और उतना ही घटित हो सकता है), जितना कि उसके पहले स्तर के आधे तक गिरावट, यह आधार वर्ष में उसी प्रकार 3 गुणा बढ़ सकता है जिस प्रकार कि आधार वर्ष में ⅓ गुणा गिर सकता है, यह उसी प्रकार अनन्त तक बढ़ सकता है जिस प्रकार कि शून्य तक गिर सकता है। अतः परिणामी बारम्बारता बटन ज्यामितीय ढंग से सामान्य होने लगता है, और गुणोत्तर माध्य, जो बहुलक इस प्रकार के बटन के साथ एक रूप हो जाता है, उचित औसत है। यह दलील तर्कसंगत है परन्तु उन धारणाओं पर आधारित है जो पूर्णतया सिद्ध नहीं है। हमें विश्वास नहीं कि कीमत उसी प्रकार से दुगुनी हो सकती है जिस प्रकार से आधी रह सकती है, या उसी प्रकार से 50 प्रतिशत बढ़ सकती है जिस प्रकार एक-तिहाई गिर सकती है, और जब तक इस प्रकार का सन्तुलन स्थापित नहीं होता तब तक गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करने का उचित आधार हमारे पास नहीं है।

यह नहीं सोचना चाहिये कि गुणोत्तर माध्य का कभी भी प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए, केवल मात्र यह सन्देह किया जाता है कि क्या इसमें समान्तर माध्य से अधिक कोई अन्तर्निहित सामान्य अच्छाई है। लेखकों का यह विश्वास है कि औसत का प्रयोग, बहुत अधिक मात्रा में सूचकांकों के वाञ्छित प्रयोग द्वारा निर्धारित किया जाता है। जैसाकि प्रायः होता है यदि हम दो विभिन्न समयों में या दो विभिन्न स्थानों पर उन्हीं वस्तुओं के क्रय के लिये आवश्यक मुद्रा की मात्रा की तुलना करना चाहें (या कदाचित् उन्हीं रुचियों और वातावरण के साथ एक जैसे व्यक्तियों के लिये सन्तुष्टि की बराबर मात्रा की), तो भारित समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाना चाहिये। जैसा कि दिखाया जा चुका है, ऐसा इसलिए है कि इस प्रकार के सूचकांक को भारित समाहृत सूचकांक भी माना जा सकता है। दूसरी ओर यदि प्राथमिक उद्देश्य कीमत सापेक्षों का अध्ययन है, जिसमें उनका औसत व्यवहार भी सम्मिलित है, तो गुणोत्तर माध्य उपयोगी हो सकता है।

बहुलक, माध्यिका, तथा हरात्मक माध्य बहुलक के प्रयोग का समर्थन प्रायः कभी भी नहीं किया जाता, इसका प्राथमिक कारण यह है कि कीमत सापेक्षों के समूह में साधारणतया कोई स्पष्टतः परिभाषित बहुलक विद्यमान नहीं होगा। माध्यिका का शायद ही कभी प्रयोग किया जाता है परन्तु यदि कुछ आँकड़ों के प्रतिनिधि-चरित्र या परिशुद्धता के सम्बन्ध में सन्देह है तो माध्यिका उचित हो सकता है। वास्तव में इस प्रकार

के सन्देह के उत्पन्न होने का वास्तविक अर्थ यह हो सकता है कि आधारभूत आंकड़े ठीक प्रकार से एकत्रित नहीं किये गये थे। हरात्मक माध्य के प्रयोग का सुझाव उस समय दिया गया है (अध्याय 18 देखें), यदि इस प्रकार की इच्छा है कि कीमत सूचकांक के व्युत्क्रम का मुद्रा की क्रय शक्ति के सूचकांक के रूप में प्रयोग किया जाए।

चार प्रकार के कीमत सूचकांकों की तुलना—मात्रा सूचकांकों पर प्रारम्भ में विचार करने से पूर्व यह उचित है कि हम एक क्षण के लिये रुकें और उन चार प्रकार के कीमत सूचकांकों के परिणामों की तुलना करें जिनका वर्णन किया जा चुका है। चार्ट 17.4 में ये



चार्ट 17.4 नीबू फलादि कीमतों के विभिन्न विधियों से प्राप्त। 1959—1964 के सूचकांक, आंकड़े सारणी 17.1, 17.2, 17.5, तथा 17.6 से।

चारों सूचकांक दिखाए गये हैं, परन्तु इनमें चार की अपेक्षा तीन वक्र हैं क्योंकि दो सूचकांक परस्पर मिल जाते हैं। जैसा कि हम पहले से जानते हैं, वे दो वक्र जो समान हैं आधार-वर्ष मात्रा भारों के साथ समाहृत और आधार-वर्ष मूल्यों द्वारा भारित सापेक्षों की अंकगणितीय औसत हैं। सभी तीनों वक्रों की सामान्य सहमति की ओर ध्यान दें, यद्यपि इनकी मात्रा में (उदाहरणार्थ 1962 और 1963 में) कुछ महत्त्वपूर्ण अन्तर है और दिशा में एक अन्तर है। सापेक्षों की सरल समाहृत और सरल अंकगणितीय औसत, जिन दोनों में तर्क सम्बन्धी त्रुटियाँ हैं, चार वर्षों में पर्याप्त ऊँची उठने में असफल रही हैं और सरल समाहृत तो 1961 में गलत दिशा में चली।

मात्रा सूचकांक

समाहृत प्रकार—मात्रा (भौतिक परिमाण) का समाहृत सूचकांक कीमत सूचकांक का प्रतिरूप है। इस प्रकार सरल समाहृत मात्रा सूचकांक की रचना में सूत्र

$$Q = \frac{\Sigma q_n}{\Sigma q_0}$$

निहित है और सारणी 17.7 इस प्रकार के नीबू फलादि के मात्रा सूचकांक के परिकलन को दर्शाती है। सामान्यतया इस प्रकार से परिकलित सूचकांक स्पष्टतः तर्कहीन होता है,

क्योंकि इसमें विभिन्न इकाइयों में अभिव्यक्त मात्राओं का जोड़ निहित है, जैसे टन, हजारों बोर्ड फुट, किलोवाट घंटे, इत्यादि । नीबू फलादि के लिये सारे उत्पादन को पाउंडो में अभिव्यक्त करना सम्भव हो सकता था परन्तु इसमें भी सन्तोषजनक सूचकांक प्राप्त नहीं होगा क्योंकि अर्थव्यवस्था में प्रत्येक फल की सापेक्ष महत्ता की उपेक्षा हो जाएगी ।

आधार वर्ष कीमतों को भारों के रूप में प्रयोग करने से, सूत्र बनता है

$$Q = \frac{\Sigma q_n p_o}{\Sigma q_o p_o}.$$

इस भारित समाहृत मात्रा सूचकांक की रचना को सारणी 17.8 में दिखाया गया है जिसमें 1959=100 ।

जिस प्रकार कीमत का समाहृत सूचकांक बदलती हुई कीमतों पर वस्तुओं के निश्चित समाहार के बदलते हुए मूल्य को मापता है ठीक उसी प्रकार से भौतिक परिमाण का समाहृत सूचकांक स्थिर कीमतों पर वस्तुओं के बदलते हुए समाहार के बदलते हुए मूल्य को मापता है । कीमत सूचकांक इस प्रश्न का उत्तर देता है यदि हम वस्तुओं के उसी चयन को प्रत्येक वर्ष खरीदें, परन्तु *विभिन्न कीमतों* पर, तो हम प्रतिवर्ष कितना व्यय करेंगे ? भौतिक परिमाण सूचकांक इस प्रश्न का उत्तर देता है : यदि हम उसी कीमत पर प्रतिवर्ष विशिष्ट वस्तुओं की *विभिन्न मात्राएँ* खरीदें तो हम प्रतिवर्ष कितना खर्च करेंगे ? जबकि पहली अवस्था में खर्च की गई राशि में अन्तर कीमत परिवर्तन के कारण था, वहां दूसरी अवस्था में अन्तर अवश्यमेव क्रय और विक्रय की गई मात्राओं में परिवर्तन के कारण था क्योंकि कीमतें स्थिर रखी गई थीं । इस प्रकार पूर्व दिए गए सूत्र के प्रयोग से परिकलित सूचकांक प्रत्येक आवृत अवधि के लिए तुलनात्मक मात्राओं (उत्पादित, बेची गई, उपभोग की गई आदि) को दर्शाता है ।

सारणी 17.7

नीबू फलादि उत्पादन के सरल साधारण समाहृत सूचकांकों की रचना, 1959—1964*

(मात्राएँ सहस्र पेटिकाओं में)

फल	1959	1960	1961	1962	1963	1964
अंगूरफल फ्लोरिडा	30,500	31,600	35,000	30,000	26,800	31,900
नीबू कैलिफोर्निया	17,100	13,600	15,200	12,400	15,800	13,500
संतरे, कैलिफोर्निया नेवल ..	13,500	9,000	7,600	12,600	15,500	15,600
संतरे कैलिफोर्निया वैलेन्सिया ..	17,300	16,000	13,100	16,200	15,500	16,000
संतरे, फ्लोरिडा .	91,500	80,700	113,400	74,500	58,300	86,200
समाहार	169,900	156,900	184,300	145,700	131,900	163,200
सूचकांक (1959 का प्रतिशत) ...	100 0	92 3	108 5	85.8	77.6	96 1

* कमल वर्षों के सम्बन्ध में सारणी 17.1 की टिप्पणी देखें ।
आंकड़े सारणी 17.2 के नीचे दिए गए स्रोतों से ।

सारणी 17 8

नीबू फलादि उत्पादन के समाहृत सूचकांकों की रचना, 1959—1964, 1959* की कीमतो द्वारा भारित

(मूल्य सहस्र डालरो में)

फल	1959 कीमत प्रति पेटी	1959 की कीमतो पर निर्दिष्ट वर्ष मे उत्पादित मात्रा का मूल्य					
		1959	1960	1961	1962	1963	1964
अगरफल फ्लोरिडा	$4 41	134,505	139,356	154,350	132,300	118,188	140,679
नीबू कैलिफोर्निया	7 10	121,410	96,560	107,920	88,040	112,180	95,850
सतरे, कैलिफोर्निया नेवल	7 66	103,410	68,940	58,216	96,516	118,730	119,496
सतरे कैलिफोर्निया वैलेन्सिया	8 36	144,628	133 760	109,516	135,432	129,580	133,760
सतरे फ्लोरिडा	5 32	*486,780*	*461,244*	*603,288*	*396,340*	*310,156*	*458,584*
समाहार मूल्य		990,733	899 860	1,033,290	848,628	788,834	948,369
सूचकाक (1959 का प्रतिशत)		*100 0*	*90 8*	*104 3*	*85 7*	*79 6*	*95 7*

*फसल वर्षों के सम्बन्ध में सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें।
सारणी 17 1 में 1959 के कीमत आँकडों तथा सारणी 17 7 के मात्रा आँकडो पर आधारित।

सारणी 17 9

नीबू फलादि उत्पादन के सूचकाको की रचना, 1959—1964,* मात्रा सापेक्षो के सरल समान्तर माध्य के प्रयोग द्वारा

फल	1959	1960	1961	1962	1963	1964
अगूरफल, फ्लोरिडा .	100.0	103 6	114 8	98 4	87 9	104 6
नीबू, कैलिफोर्निया	100 0	79 5	88 9	72 5	92 4	78 9
सतरे, कैलिफोर्निया, नेवल	100 0	66 7	56 3	93 3	114 8	115 6
सतरे, कैलिफोर्निया, वैलेन्सिया	100 0	92 5	75,7	93 6	89 6	92 5
सतरे, फ्लोरिडा ...	100 0	94 8	123 9	81 4	63 7	94 2
योग ..	500 0	437 1	459 6	439 2	448 4	485 8
औसत (1959 का प्रतिशत)	100 0	87 4	91 9	87 8	89 7	97 2

*फसल वर्षों के सम्बन्ध मे सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें।
सारणी 17 7 के आँकडो पर आधारित।

सारणी 17 10

आधारवर्ष (1959) के मूल्यों से भारित मात्रा सापेक्षों के समान्तर माध्य के प्रयोग द्वारा नीबू फलादि उत्पादन के सूचकांकों की रचना, 1959—1964*

(मूल्य सहस्र डालरों में)

फल	1959 का मूल्य	1959 के मूल्य से गुणा करके निर्दिष्ट वर्ष के मात्रा सापेक्ष					
		1959	1960	1961	1962	1963	1964
अंगूरफल, फ्लोरिडा	134 505	134 505	139 347	154 412	132 353	118 230	140 692
नीबू, कैलिफोर्निया	121 410	121 410	99 521	107 933	88 022	112 183	95 792
संतरे, कैलिफोर्निया नेवल	103 410	103 410	68 974	58 220	96 482	118 715	119 542
संतरे कैलिफोर्निया वलेंसिया	144 628	144 628	133 781	109 483	135 772	129 587	133 781
संतरे, फ्लोरिडा	486 780	486 780	461 467	603 120	396 239	310 079	458 547
योग		990 733	900 090	1 033 168	848 468	788 794	948 354
सूचकांक (1959 का प्रतिशत)		100 0	90 9	104 3	85 6	79 6	95 7

* फसल वर्षों के सम्बन्ध में सारणी 17 1 की टिप्पणी देखें।
सारणी 17 9 के मात्रा सापेक्षों तथा सारणी 17 8 में 1959 के मूल्य आँकड़ों पर आधारित।

मात्रा सूचकांकों की रचना के लिये भारित करने की विभिन्न विधियाँ प्राप्त हैं और सामान्य रूप से वे ही विचार लागू होते हैं जिनका कीमत सूचकांकों के सम्बन्ध में वर्णन किया गया था। कीमत भारों को प्राप्त करने के लिये जोकि दो या अधिक वर्षों की औसतें हैं, *औसत कीमतें भारित औसत कीमतें होनी चाहिएँ जिनको इन वर्षों में कुल बेचे गए मूल्य को उन्हीं वर्षों में इकाइयों की कुल संख्या से विभक्त करके प्राप्त किया जाता है।* इस प्रकार यदि आधार और प्रदत्त वर्षों की औसत मात्राओं का प्रयोग किया जाए तो हम कठिन दिखाई देने वाला यह सूत्र प्राप्त होता है

$$Q = \frac{\Sigma q_n\left(\dfrac{p_0q_0+p_nq_n}{q_0+q_n}\right)}{\Sigma q_0\left(\dfrac{p_0q_0+p_nq_n}{q_0+q_n}\right)}$$

इसी प्रकार, यदि समापवर्तक विधि का प्रयोग किया जाए तो कीमत भार को दीर्घतम मूल्य से प्राप्त करना चाहिये जो कि विचाराधीन सभी वर्षों में समान है।

सापेक्षों की औसतें—*मात्रा सूचकांकों की रचना की यह* विधि कीमत परिवर्तनों को मापने में प्रयुक्त विधि से एकदम मिलती-जुलती है। इस विधि का सारणी 17.9 और 17.10 में निरूपण किया गया है। जिस प्रकार कीमत सूचकांकों के सम्बन्ध में सत्य मालूम हुआ था आधार-वर्ष मूल्य भारों के प्रयोग से वही परिणाम निकलता है जैसाकि आधार-वर्ष भारों मात्रा का प्रयोग करने वाली समाहृत विधि से प्राप्त होता है, केवल पूर्णांक के कारण होने वाले अन्तर ही अपवाद है।

परिकलन की सुगमता तथा अर्थ की सरलता के कारण समाहृत विधि को, जहाँ भी लागू होती हो, सापेक्षों की औसत विधि पर प्राथमिकता दी जानी चाहिए। जैसाकि पहले देखा गया है, कई परिस्थितियों में समाहृत विधि का प्रयोग नहीं किया जा सकता। जब जिन सापेक्षों की औसत निकाली जाती है वे प्रतिशतताएँ हैं, जिनका आधार स्थिर नहीं *अपितु परिवर्तनशील सामान्य है, तो पूर्व-वर्णित स्थिति लागू नहीं होती। यहाँ सचमुच ही सापेक्षों की औसत विधि आवश्यक है। दूसरे शब्दों में, यदि व्यापार चक्रों का सूचकांक* बनाया जाना है तो *समाहृत विधि का प्रयोग नहीं किया जा सकता,* क्योंकि औसत किये जाने वाले आँकड़े उपनति और ऋतुनिष्ठ की प्रतिशतताएँ हैं।

मात्रा सापेक्षों की औसत के लिये चुने गए भार प्रायः विभिन्न श्रेणियों के विनिमय मूल्यों के अनुपात में होते हैं। कभी-कभी विभिन्न श्रेणियों के सापेक्षिक कोणांक पर भी कुछ विचार किया जाता है यदि वे चक्रीय सापेक्ष हों। यदि सूचकांक परिवर्तन मापने के उद्देश्य से नहीं बल्कि परिवर्तनों की पूर्व-सूचना देने के उद्देश्य से बनाया जाता है तो इसके चुनने का आधार प्रस्तुत की गई विभिन्न श्रेणियों की आर्थिक महत्ता नहीं अपितु *पूर्व सूचना देने के उद्देश्यों की महत्ता होगी।*

अध्याय 18 में बहुत से महत्त्वपूर्ण सूचकांकों की रचना करने की विधियों का वर्णन किया जाएगा और तकनीक की कुछ बातों तथा सिद्धान्त, जिन पर इस अध्याय में विचार नहीं हुआ वर्णन किया जाएगा।

18

सूचकाक सिद्धान्त एव व्यवहार

इस अध्याय का उद्देश्य दोहरा है। प्रथम सूचकाको के सिद्धान्त एव तकनीक के कुछ परिष्कारो का और आगे वर्णन किया जाएगा। दूसरे कई एक सूचकाको का विवरण दिया जाएगा। आशिक रूप मे उनकी विस्तृत उपयोगिता के कारण और आशिक रूप से इस कारण कि उनमे एक रोचक तकनीक का प्रयोग किया जाता है सूचकाको को चुना गया है। सामान्य रूप से यह देखा जाएगा कि अध्याय 17 मे सार पदत्त विधियो का वास्तविक व्यवहार म पूर्ण रूप से अनुसरण नही किया जाएगा परन्तु प्रत्येक अवस्था म कुछ परिस्थितियाँ होगी जो विधि के विशेष सशोधनो को उचित प्रमाणित करती है।

सूचकाक धारणाए

गणितीय परीक्षण—सूचकाको पर विचारको का एक सम्प्रदाय यह विश्वस करता है कि पूर्ण सूचकाक सूत्र जैसी कोई वस्तु हो सकती है और सगति के कुछ गणितीय परीक्षणो को पूरा करने की अपनी योग्यता के कारण ऐसे सूत्र को पहचाना जा सकता है। ऐसे परीक्षण तार्किक आधार पर उचित है अथवा नही यह एक खुला प्रश्न है। इस सिद्धान्त के अनुसार यदि कोई सूचकाक इन परीक्षणो को पूरा करता है तो उसे न केवल 'आदर्श' समझा जा सकता है परन्तु दूसरे सूचकाक जो इन परीक्षणो को पूरा नही करते उनको इस स्तर पर रखा जा सकता है कि वे वास्तविक व्यवहार मे कितने अधिक उनके निकट होते है।

समता के तर्क द्वारा परीक्षण किये जाते है। कोई बात जो एक वस्तु के विषय मे सत्य है जब उस वस्तु के समस्त समूह के विषय म सोचते है तो भी वह सत्य होनी चाहिये। यदि सतरो की पटी 1965 के मुकाबले 1967 म 125 प्रतिशत के मूल्य की थी तब 1965 की कीमत 1967 की कीमत का 80 प्रतिशत थी। समता के तर्क द्वारा यदि 1965 के आधार के साथ 1967 म सूचकाक 125 था तब 1967 के आधार के साथ 1965 के लिये सूचकाक 80 होना चाहिये। दूसरे शब्दो म सूचकाक को पश्चगामी तथा अग्रगामी होना चाहिये।

पुन कल्पना कीजिये कि एक वस्तु की कीमत बढकर 40 सेन्ट से 60 सेन्ट हो जाती है और विक्रय दो इकाइयो से बढकर चार इकाइया हो जाता है। कीमत आधार वर्ष का 150 प्रतिशत है विक्रय मात्रा 200 प्रतिशत है, जब कि मूल्य आधार वर्ष का $1\ 50 \times 2\ 00 = 3\ 00$ गुणा है अथवा आधार वर्ष का 300 प्रतिशत। इसे ध्यान से देखने स सत्यापित हो जाता है कि $\frac{0\ 60 \times 4}{0\ 40 \times 2} = 3$। एक बार फिर समता के आधार पर तर्क करते हुए, यह दलील दी जा सकती है कि उन्ही आँकडों स परिकलित मात्रा सूचकाक कीमत सूचकाक

द्वारा गुणा आधार वर्ष के सम्बन्ध मे वष मे लेनदेन के सापेक्ष मूल्य के बराबर होना चाहिये। दूसरे शब्दो मे यदि

$$\frac{p_n}{p_o} \times \frac{q_n}{q_o} = \frac{p_n q_n}{p_o q_o},$$

तब यह सत्य होना चाहिये कि

$$P \times Q = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_o}$$

जैसा कि पिछले अनुच्छेद मे सकेत किया गया है, दो परीक्षण हैं जिन्हे "गणितीय परीक्षण" सम्प्रदाय द्वारा विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण समझा जाता है। उन्हे कहा जा सकता है (1) समय परावर्तन परीक्षण (2) कारक परावर्तन परीक्षण।

समय परावर्तन परीक्षण को अधिक असदिग्धता के साथ निम्नलिखित रूप मे वर्णित किया जा सकता है यदि कीमत (या मात्रा) सूचकाक सूत्र के समय पादाको को परस्पर परिवर्तित कर दिया जाता है तो परिणामत कीमत (या मात्रा) सूत्र मौलिक सूत्र का व्युत्क्रम होना चाहिये। यदि हम

$$\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o}$$

सूत्र को ल और समय पादाको को परस्पर बदल दें तो परिणामत सूत्र है

$$\frac{\Sigma p_o q_n}{\Sigma p_n q_n}$$

परन्तु

$$\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_o q_n}{\Sigma p_n q_n} \neq 1,$$

इसलिये परीक्षण पूरा नही उतरता। दूसरी ओर सूत्र

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}}$$

बन जाता है

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_o q_n}{\Sigma p_n q_n} \times \frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma p_n q_o}}$$

दोनो व्यजको का गुणनफल एक है, और इर्विन्ग फिशर का "आदर्श" सूचकाक समय परावर्तन परीक्षण पर खरा उतरता है।

कारक परावर्तन परीक्षण को इस प्रकार से वर्णित किया जा सकता है यदि कीमत (या मात्रा) सूचकाक सूत्र मे p तथा q कारकों का परस्पर परिवर्तन कर दिया जाता

है, ताकि मात्रा (या कीमत) सूचकांक सूत्र प्राप्त किया जाए, तो दोनों सूचकांकों के गुणनफल को सही मूल्य अनुपात

$$\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_o}$$

प्रदान करना चाहिए। पुन सूत्र

$$\frac{\Sigma p_n q}{\Sigma p_o q_o},$$

को लेकर हम इसे

$$\frac{\Sigma q_n p_o}{\Sigma q_o p_o}$$

मे रूपान्तरित कर देते हैं। यह एक मात्रा सूचकांक है, परन्तु क्योंकि

$$\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma q_n p_o}{\Sigma q_o p_o} \neq \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_o},$$

परीक्षण पूरा नही उतरता है। तथापि, हम देखते हैं कि

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}}$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma q_n p_o}{\Sigma q_o p_o} \times \frac{\Sigma q_n p_n}{\Sigma q_o p_n}}$$

मे रूपान्तरित हो जाता है। इन दो "आदर्श" सूचकांकों का गुणनफल

$$\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_o}$$

है, अत परीक्षण पूरा हो जाता है।

फिशर के "आदर्श" सूचकांक को ऐसा इसलिये कहा जाता है क्योंकि यह उन सूचकांकों की अत्यन्त सीमित संख्या में से एक है जो इन दोनों परीक्षणों को पूर्ण करते है।

सूत्र का प्रयोग से सम्बन्ध—अन्य विचारधारा के सम्प्रदाय से सम्बद्ध सूचकांक के विद्यार्थियों द्वारा "आदर्श" सूचकांक की धारणा का विरोध इस आधार पर किया जाता है कि विश्लेषक पूर्णतया यह नही कह सकता कि "आदर्श" सूचकांक किसका माप करता है, वह केवल अस्पष्ट रूप से यह कह सकता है कि यह कीमत स्तर में परिवर्तन का माप करता है, या इसी प्रकार के किसी व्यंजक का प्रयोग कर सकता है। एक उपागम के अनुसार तर्क-सगत प्रविधि विशिष्ट प्रश्न पूछना और फिर ऐसा सूत्र बनाना है जो उस विशिष्ट प्रश्न का उत्तर दे। उदाहरणार्थ, परचून कीमतों मे प्रयुक्त $\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o}$ सूत्र वर्तमान वर्ष मे लागत की

जीवन के भौतिक स्तर को सहायता करने वाले आधार वर्ष में लागत के साथ, तुलना करता है, जिसे आधार वर्ष में प्राप्त किया गया था। जबकि यह एक विशिष्ट प्रश्न है तो भी यह सभव है कि पूछने योग्य सबसे अधिक उपयोगी प्रश्न न हो। पूछने योग्य समुचित प्रश्न क्या है यह खोज करने वाले व्यक्ति के सम्मुख उपस्थित महत्वपूर्ण समस्या है। अध्याय 17 में केन्स का यह विश्वास उचित माना गया था कि मुद्रा के मूल्य में परिवर्तनों को मापने के लिये प्रथम एक ऐसा सूचकांक खोजना चाहिये जो दो अवधियों में व्यक्तियों के समान समूहों को समान उपयोगिता प्रदान करते हुए वस्तुओं के समाहारों की बदलती हुई लागत को मापे। अब सूत्र $\frac{\Sigma p_n q_0}{\Sigma p_0 q_0}$ में यह कल्पना की गई है कि यदि उनकी रुचियों में परिवर्तन नहीं होता तो लोग वस्तुओं की उतनी ही मात्राएँ खरीदते जाएँगे, चाहे कीमतें कितनी ही चढ़ या गिर जाएँ, जबकि वास्तव में अधिक महँगी हो रही मदों से सस्ती हो रही मदों की ओर विवर्तन हो रहा है। तब इस सूत्र का ऊर्ध्वगामी 'झुकाव' होगा, क्योंकि वस्तुओं की वही मात्रा प्राप्त करने की लागत, उपयोगिता की उसी मात्रा को प्राप्त करने की लागत से अधिक होगी। इसके विपरीत सूत्र $\frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_n}$ एक व्यक्ति के जीवन के वर्तमान भौतिक स्तर की लागत की तुलना आधार वर्ष में उसकी लागत के साथ करता है। इसी विचार से, इस सूत्र का अधोगामी "झुकाव" है, क्योंकि कोई भी समझदार व्यक्ति आधार वर्ष में उतनी ही वस्तुएँ न खरीदता जितनी कि वह अब खरीदता है (यद्यपि रुचियाँ तथा वातावरण वही रहे), क्योंकि वस्तुओं की सापेक्ष कीमतें विभिन्न होतीं। आधार वर्ष में वस्तुओं के वर्तमान वर्ष का बिल प्राप्त करने की लागत वर्तमान वर्ष की आर्थिक सन्तुष्टियों को प्राप्त करने की लागत से अधिक हुई होती।

फिशर का "आदर्श" सूचकांक सूत्र विपरीत दिशाओं में झुके (या अनुचित) दो सूचकांकों का गुणोत्तर माध्य है; और बहुत से व्यक्तियों का विचार है कि दो अशुद्ध उत्तरों की औसत के तौर पर एक शुद्ध उत्तर प्रदान नहीं करती, चाहे दो अशुद्धियाँ विभिन्न दिशाओं में हों और चाहे सूत्र आन्तरिक रूप से सगत हो। इसके विपरीत, यह सन्देहास्पद है कि केन्स की समापवर्तक विधि वास्तविक व्यवहार में केन्स के प्रश्न का "आदर्श" सूचकांक की अपेक्षा अधिक अच्छा (या वैसा ही) उत्तर देगी। सापेक्ष कीमतों में परिवर्तन क्रय की गई सापेक्ष मात्राओं में परिणामत. परिवर्तनों के साथ समापवर्तक का मूल्य घटा कर क्रय की गई कुल वस्तुओं के छोटे से अनुपात के बराबर कर सकता है। तथापि, यह इस तर्कसंगत निर्णय पर पहुँचने का एक और प्रयास है कि यथार्थत. क्या मापने का प्रयास किया जा रहा है।

मुद्रा के मूल्य (डालर की क्रय शक्ति) में परिवर्तनों को मापने के उद्देश्य के लिये कीमत सूचकांक के व्युत्क्रम का प्रयोग परम्परागत है। तथापि एक अन्य उपागम में यह दलील दी जाती है कि यह तर्कहीन है। जिस प्रकार विशिष्ट वस्तुओं के कीमत परिवर्तनों की कीमत सूचकांक औसत निकालना है उसी प्रकार विशिष्ट वस्तुओं के लिये डालर की क्रय शक्ति में परिवर्तनों की क्रय शक्ति सूचकांक को औसत होना चाहिये। यदि अन्न की कीमत प्रति बुशल .50 डालर है, तो अन्न के लिये डालर की क्रय शक्ति 2 बुशल है।

प्रति डालर क्रय शक्ति की इकाइयों को सकेत चिह्न u के द्वारा दिखाते हुए, यह सम्प्रदाय इस क्रय शक्ति सूचकांक सूत्र का सुझाव देता है

$$\text{क्रय शक्ति} = \frac{\Sigma\left(\frac{u_n}{u_o} p_o q_o\right)}{\Sigma p_o q_o}.$$

परन्तु क्योंकि $u = \frac{1}{p}$, अतः हम लिख सकते हैं

$$\text{क्रय शक्ति} = \frac{\Sigma\left(\frac{p_o}{p_n} p_o q_o\right)}{\Sigma p_o q_o}.$$

यह व्यजक आधार वर्ष मूल्यों से भारित कीमत सापेक्षों के हरात्मक माध्य का व्युत्क्रम है, क्योंकि द्वितीय निम्नलिखित है

$$1 \div \frac{\Sigma\left(\frac{1}{p_n \div p_o} p_o q_o\right)}{\Sigma p_o q_o} = 1 \div \frac{\Sigma\left(\frac{p_o}{p_n} p_o q_o\right)}{\Sigma p_o q_o} = \frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma\left(\frac{p_o}{p_n} p_o q_o\right)}$$

ऊपर का सूत्र कीमत सूचकांक का अभी भी वास्तव में व्युत्क्रम है (यद्यपि धारणा में नहीं), यद्यपि अंकगणितीय माध्य पर आधारित सामान्य सूचकांक नहीं है। सम्भवतः भारित करने की विधि में, इसकी धारणा पर आघात न करते हुए कुछ परिवर्तन करना सम्भव होगा।

यदि हम इस विचार को स्वीकार कर लेते हैं कि सूचकांक का उद्देश्य सूत्र का निर्धारण करना है तो हम 'आदर्श' सूत्र को त्यागने की आवश्यकता नहीं। उसे बनाए रखना सम्भव होगा यद्यपि सूत्र प्रत्येक सूचकांक समस्या का पूर्ण हल नहीं है, तथापि बहुत से ऐसे उद्देश्य है जिनके लिए यह विशेष रूप से अनुकूल है। उदाहरणार्थ, मूल्य का विश्लेषण सघटक कीमत परिवर्तनों तथा मात्रा परिवर्तनों में परिवर्तित हो जाता है। तो भी यदि हम यह स्थिति लेते है कि प्रत्येक सूचकांक को साधारण व्यक्ति के अंग्रेजी मे व्यक्त विशिष्ट प्रश्न का उत्तर अवश्य देना चाहिये तो सिद्धान्ततः सही सूचकांक के रूप मे इसका त्याग करना पडेगा।

शृंखला सूचकांक

अपनी सरलतम अवस्था में, शृंखला सूचकांक वह है जिसमे प्रत्येक वर्ष (या उसके भाग के लिए) अंकों को प्रथम पहले वर्ष की प्रतिशतताओं के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। तब एक शृंखला सूचकांक बनाने के लिए इन प्रतिशतताओं को उत्तरोत्तर गुणा द्वारा शृंखलाबद्ध कर लिया जाता है। सारणी 18.1 नीबू फल कीमतों के भारित समाहृत शृंखला सूचकांक का परिकलन प्रदर्शित करती है। जैसाकि सारणी के ऊपर देखा गया, वर्षों के प्रत्येक जोड़े के प्रथम वर्ष में उत्पादन द्वारा कीमतों को भारित किया जाता है। इन उत्पादों को प्रत्येक वर्ष के लिए जोड़ा जाता है और प्रत्येक जोड को पहले वर्ष के जोड की प्रतिशतता

सारणी 18 1

नीबू फलादि कीमतो के भारित समाहृत शृखला सूचकाक की रचना * 1959—1964

(वर्षों के प्र येक जोड के लिये भार प्रथम वष के उ पादन है । मत्य सहस्र डालरो मे)

वष	कीमत X वर्षो के प्रत्येक ज ड मे से प्रथम वष का उत्पादन: अगूरफन	नीबू कनिफोर्निया	सतरे कनि फोनिया नेवन	सतरे कनिफो निया वनेसिया	सतरे फ्लोरिडा	उपज का योग	प्र येक जोड के पहले वष का प्रतिशत	शृगना सूचकाक
1959	134 505	121 410	103 410	144 628	486 780	990 733	100 0	100 0
1960	131 760	123 462	124 740	129 404	592 920	1 102 286	111 3	111 3
1960	136 512	98 192	68 940	133 760	461 244	898 648	100 0	
1961	141 884	97 648	92 340	127 040	441 303	900 215	100 2	111 5
1961	157 150	109 136	77 976	104 014	577 206	1 025 482	100 0	
1962	205 800	130 112	70 072	99 822	876 582	1 382 388	134 8	150 3
1962	176 400	106 144	116 172	123 444	575 885	1 098 045	100 0	
1963	182,700	90 272	97 272	151 308	579 610	1 101 162	100 3	150 8
1963	163 212	115 024	119 660	144 770	453 574	996 240	100 0	
1964	159 192	132 404	111 600	103,540	360 294	867 030	87 0	131 2

* फसल वर्षो से सम्बन्धित सारणी 17 1 की टिप्पणी देखिये ।
सारणी 17 1 के कीमत आँकड़ो तथा सारणी 17 7 के उत्पादन आँकडो पर आधारित ।

के रूप में व्यक्त किया जाता है जैसाकि सारणी मे अन्तिम से पहले स्तम्भ मे दिखाया गया है। "शृ खलित करने की प्रक्रिया के परिणामो को सारणी के अतिम स्तम्भ म दिखाया गया है । उनको निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त किया जाता है (1) 1960 प्रतिशतता, 111 3 1960 का शृ खला सूचकाक है, (2) क्योकि 1961 प्रतिशतता अक 1960 से 0 2 प्रतिशत अधिक है, अत 1961 का शृखला सूचकाक 1 113 × 1 002=1 115 या 111 5 प्रतिशत है, (3) 1962 प्रतिशतता अक 1961 के अक का 1 348 है अत 1962 के लिय शृ खला सूचकाक 1 115 × 1 348=1 503 या 150 3 प्रतिशत है, और इसी प्रकार अन्य वर्षो के लिए ।

शृखला सूचकाक के लाभ हैं (1) यदि वस्तुएँ अब उचित नही हैं तो उन्हे शीघ्रता से त्यागा जा सकता है, (2) नई वस्तुओ को लाया जा सकता है, तथा (3) भारो को बदला जा सकता है। इस प्रकार उत्पादन वितरण, उपभोग आदतो और मौलिक परिवतनो गुण परिवतनो किन्ही आकडा मे किसी क्रम भग का, और अन्य वैसे ही परिवतनो का जिन्ह एक निश्चित आधार सूचकाक मे शीघ्रता से काबू नही किया जा सकता, ध्यान रखा जा सकता है। शृ खला सूचकाक के सिद्धान्त का इस अध्याय म आग बहुत से उदाहरणो म प्रयोग किया गया है ।

शृखला सूचकाक की हानि यह है कि जब पिछले वष के प्रतिशतता अक वर्षानुवष परिवतनो की परिशुद्ध तुलनाएँ प्रदान करते हैं, शृ खलित प्रतिशतताओ की दीघ परिसर तुलनाएँ पूणत मान्य नही है । तथापि जब सूचकाक प्रयोग करने वाला वर्षानुवर्ष तुलनाएँ करना चाहता है जैसा कि प्राय व्यापारी के द्वारा किया जाता है तो पिछले वर्ष की प्रतिशतताएँ एक लचीला तथा उपयोगी साधन प्रदान करती हैं ।

नई वस्तुओ का प्रतिस्थापन तथा भारो का परिवर्तन

कभी कभी यह आवश्यक अथवा वाछित होना है कि सूचकाक मे एक वस्तु को निकाला जाए एक नई वस्तु को जोडा जाए एक वस्तु का दूसरी से प्रतिस्थापन किया जाए, या एक वस्तु के भार म परिवतन किया जाए । एक वस्तु के दूसरी वस्तु म प्रतिस्थापन के अन्तगत प्राय भार का परिवतन भी होगा । इन समजना के अतर्गत शृ खला सूचकाक का प्रयोग आता है। प्रतिस्थापन के उदाहरणस्वरूप हम 1959 (आधार वर्ष) 1962, 1963 तथा 1964 क वर्षो के लिए नीबू फलादि कीमतो का सूचकाक बनाएग । विवरण के उद्देश्यो के लिए हम 1962 म कैलिफोर्निया वैलेंसिया सतरो का कैलिफोर्निया नेवल सतरो के लिए प्रतिस्थापन करेंगे ।

सारणी 18 2 आधार वर्ष माना भारो का प्रयोग करत हुए, 1959 तथा 1962 के लिय भारित समाहृत सूचकाक का परिकलन प्रदर्शित करती है और यह देखा जा सकता है कि कैलिफोर्निया नेवल सतरे कैलिफर्निया नीबू तथा फ्लोरिडा अगूरफल का प्रयोग करते हुए 'पुरानी श्रेणी' के लिये 1962 का सूचकाक 125 29 है । 1962 म वैलेंसिया सतरे की कीमत को नवल के भार से गुणा करके जिसम सारणी म प्रदर्शित उपज 1028 70 लाख डालर, प्राप्त होती है, कैलिफोर्निया वैलेंसिया का कैलिफोर्निया नवल सतरा के लिय प्रतिस्थापन किया जाता है । 1962 की 'नवीन श्रेणी' के लिय उत्पादन का योग 4285 86 लाख डालर है, और इस योग का पूव निर्धारित 1962 के सूचकाक, 125 29 के बराबर रखा जाता है। 1963 तथा 1964 के लिए कैलिफोर्निया वैलेंसिया सतरो का उत्पादन

सारणी 18 2

भारों मे किसी परिवर्तन के बिना कैलिफोर्निया वैलेसिया संतरो का कैलिफोर्निया नेवल सतरों के लिए प्रतिस्थान प्रदर्शित करते हुए, नीबू फलादि कीमतों के भारित समाहृत सूचकाक की रचना,* 1959, 1962, 1963, तथा 1964

फल	मात्रा भार (मिलियन पेटियाँ) q_{59}	1959 कीमत (डालर प्रति पेटी) p_{59}	1959 उत्पादन (मिलियन डालर) $p_{59}q_{59}$	1962 कीमत (डालर प्रति पेटी) p_{62}	1962 उत्पादन पुरानी श्रेणी (मिलियन डालर) $p_{62}q_{59}$	1962 उत्पादन नई श्रेणी (मिलियन डालर) $p_{62}q_{59}$	1963 कीमत (डालर प्रति पेटी) p_{63}	1963 उत्पादन नई श्रेणी (मिलियन डालर) $p_{63}q_{59}$	1964 कीमत (डालर प्रति पेटी) p_{64}	1964 उत्पादन नई श्रेणी (मिलियन डालर) $p_{64}q_{59}$
अंगूरफल, फ्लोरिडा	30.5	4 41	134 505	5 88	179.340	179.340	6 09	185.745	5.94	181.170
नीबू, कैलिफोर्निया.........	17 1	7.10	121 410	8 56	146.376	146 376	7.28	124.488	8 38	143.298
सतरे, कैलिफोर्निया, नेवल..	13.5	7 66	103 410	9 22	...	...	...	...	...	...
सतरे, कैलिफोर्निया, वैलेसिया	...	...	...	7,62	124 470	102.870	9.34	126.0901	6.68	90.1801
योग........................	...	...	359 325	...	428.586	428.586	...	436 323	...	414.648
सूचकाक, पुरानी श्रेणी ...	...	...	100 00	. .	125.29	...	...	...	...	...
सूचकाक, नई श्रेणी. ..	...	..	...	...	...	125.79	...	127.55	...	121.22

* फसल वर्षों के सम्बन्ध मे सारणी 17.1 की टिप्पणी देखें। प्रमुख नीलाम कीमतें मण्डियो मे ऋतु औसत कीमत प्रति पेटी हैं।

≠ कैलिफोर्निया वैलेसिया सतरा कीमत, × कैलिफोर्निया नेवल संतरा मात्रा 1959 मे।

आंकड़े एग्रिकल्चरल स्टेटिस्टिक्स के विभिन्न अंकों, सयुक्त राज्य कृषि विभाग के साथ पत्रव्यवहार, तथा ऐन्वल क्राप समरी, दिसम्बर 1965, पृष्ठ 97 से।

उसी प्रकार निर्धारित किया जाता है जैसेकि 1962 का अंक, और 1963 तथा 1964 के लिए उत्पादनों का योग प्राप्त किया जाता है तब इन सम्बन्धों द्वारा 1963 तथा 1964 के सूचकांक प्राप्त किये जाते हैं

1963 के लिये—

$$\frac{428,586}{125.29} = \frac{436\ 323}{1963 \text{ का सूचकांक}},$$

1963 का सूचकांक = 127 55 ।

1964 के लिये—

$$\frac{428\ 586}{125\ 29} = \frac{414\ 648}{1964 \text{ का सूचकांक}};$$

1964 का सूचकांक = 121 22 ।

सारणी 18 2 में प्रयुक्त प्रविधि कैलिफोर्निया वैलेसिया सतरों को कम भारित करती है क्योंकि 1962 में इसकी इकाई कीमत कैलिफोर्निया नेवल सतरों की कीमत से कम थी ।[1] 1962 में वैलेसिया सतरों को दिया गया भार भी बहुत कम था क्योंकि नेवल सतरों की केवल 126 लाख पेटियों और वैलेसिया सतरों की 162 लाख पेटियों का उत्पादन हुआ था । 1963 में ली गई मात्राओं के कारण कोई अतिशयोक्ति नहीं है जब दोनों का उत्पादन लगभग 155 लाख पेटियाँ हुआ । 1964 में वैलेसिया सतरों को थोड़ा सा कम भार दिया गया क्योंकि वैलेसिया तथा नेवल सतरों का उत्पादन क्रमश 160 तथा 156 लाख पेटियाँ था । स्पष्टत जब वैलेसिया सतरों को नेवल सतरों के लिये प्रतिस्थापित किया गया तब भारों का परिशोधन कर देना चाहिये था ।

भारों का इस प्रकार का परिशोधन सारणी 18 3 में किया गया है । यहाँ पर "पुरानी श्रेणी" के लिये 1962 का सूचकांक पुन 125 29 है । 1962 की भारित समाहृतों की 'नई श्रेणी' 1926 के मात्रा भारों का प्रयोग करती है और 1962 के लिये "नई श्रेणी" के उत्पादनों का योग 4059 88 लाख डालर है, जिसे 125 29 के सूचकांक के बराबर कर लिया गया है । तब पहले के समान निम्न सम्बन्ध से, 1963 तथा 1964 के सूचकांक प्राप्त किये जाते हैं

1963 के लिये—

$$\frac{405\ 988}{125\ 29} = \frac{424\ 280}{1963 \text{ का सूचकांक}},$$

1963 का सूचकांक = 130 93 ।

1964 के लिये—

$$\frac{405\ 988}{125\ 29} = \frac{390\ 328}{1964 \text{ का सूचकांक}};$$

1964 का सूचकांक = 120 46 ।

---

1 जब एक प्रतिस्थापन वस्तु के लिये आधार वर्ष भार का प्रयोग निरंतर रखना तर्कसंगत है, तो निम्नलिखित का परिकलन करके पुरानी तथा नई वस्तु की विभिन्न इकाई कीमतों के लिए समंजन किया जा सकता है

$$\text{नया भार} = \frac{\text{पुरानी इकाई कीमत}}{\text{नई इकाई कीमत}} \text{ पुराना भार ।}$$

यह प्रविधि सारणी 18 3 में दी हुई विधि के समान है, देखिए मूल अंग्रेजी पुस्तक का प्रथम संस्करण, पृष्ठ 623—626 ।

सारणी 18 3

कैलिफोर्निया वलेसिया सतरो का कैलिफोर्निया नेवल सतरो के लिए प्रतिस्थापन प्रदर्शित करते हुए नीबू फलादि कीमतो के भारित समाहृत सूचकाक की रचना तथा आधार वष भारो से 1962 के भारो* मे विवतन 1959 1962 1963 1964

फल		1959		1962			1962		1963		1964	
	1959 मात्रा भार (मिलियन पेटियाँ) q_{59}	कीमत (प्रति पेटी डालर) p_{59}	उ पादन (मिलियन डालर) $p_{59}q_{59}$	कीमत (प्रति पेटी डालर) p_{62}	उ पादन (मिलियन डालर) $p_{62}q_{59}$	1962 मात्रा भार (मिलियन पेटिया) q_{62}	कीमत (प्रति पेटी डालर) p_{62}	उ पादन नई श्रणी (मिलियन डालर) $p_{62}q_{62}$	कीमत (प्रति पेटी डालर) p_{63}	उ पादन नई श्रणी (मिलियन डालर) $p_{63}q_{62}$	कीमत (प्रति पेटी डालर p_{64}	उत्पादन नई श्रणी (मिलियन डालर) $p_{64}q_{62}$
अगूरफल फ्लोरिडा	30 5	4 41	134 505	5 88	179 340	30 0	5 88	176 400	6 09	182 700	5 94	178 200
नीबू कलिफोर्निया	17 1	7 10	121 410	8 56	146 376	12 4	8 56	106 144	7 28	90 272	8 38	103 912
स तरे, कैलिफोर्निया नेवल	13 5	7 66	103 410	9 22	124 470							
स तरे कैलिफोर्निया वैलसिया						16 2	7 62	123 444	9 34	151 308	6 68	108 216
योग			359 325		450 186			405 988		424 280		390 328
सूचकाक, पुरानी श्रणी			100 0		125 29							
सूचकाक नई श्रेणी								125 29		130 93		120 46

*फसल वर्षों के सम्ब ध मे सारणी 17 1 की टिप्पणी देखे। कीमत प्रमुख नीलाम मण्डियो मे ऋतु औसत कीमत प्रति पेटी हैं।
आँकड़े सारणी 18 2 के नीचे दिये स्रोतो से।

नई वस्तु को जोड़े बिना पुरानी वस्तु को छोडने या एक ऐसी नई वस्तु को जोडने मे जो पुरानी वस्तु की स्थानापन्न नही है, वास्तव मे भारो का परिवर्तन निहित है। प्रविधि वैसी ही होगी जैसी कि सारणी 18 3 मे है। उसी प्रकार से कोई वस्तु जोड़े या छोड़े बिना भारो का परिवर्तन भी किया जा सकता था।

सूचकाको के विवरण

इस अध्याय का शेष भाग ऐसे अनेक सूचकाको के सक्षिप्त विवरणो में लगाया जायेगा जिन्हे *कीमत परिवर्तनो, भौतिक मात्रा मे परिवर्तनो, सामान्य तथा विशिष्ट व्यापार* गतियो, तथा अन्य परिवर्तनो एव अन्तरो को मापने के लिये बनाया जाता है। कोई भी सूचकाक पूर्ण विस्तार मे वर्णित नही है, और पाठक को यह बात ध्यान मे रखनी चाहिये कि एक सूचकाक का दो या तीन पृष्ठो का विवरण उस सूचकाक की कुछ अधिक महत्त्वपूर्ण विशेषताओ के उल्लेख से अधिक कुछ नही कर सकता।

कीमत सूचकाक

उपभोक्ता कीमत सूचकाक—*1957-1959 आधार पर सयुक्त राज्य श्रम विभाग* द्वारा सकलित इस सूचकाक² का शीर्षक है "शहरी मज़दूरो तथा लिपिक कर्मचारियों के लिये उपभोक्ता कीमत सूचकाक।" इसका प्राय "उपभोक्ता कीमत सूचकाक' के रूप मे उल्लेख *किया जाता है*, और जैसाकि इसका *नाम सकेत करता है, यह परचून* कीमत परिवर्तन का सांख्यिकीय माप है। *यथार्थत यह निर्वाह* सूचकाक नही है क्योकि यह उन वस्तुओ और सेवाओं की मात्राओ और प्रकारो मे परिवर्तनो को नही मापता है। जो लोग खरीदते हैं या उस समस्त धन को जो वे निर्वाह पर व्यय करते है। न ही यह विभिन्न *स्थानो के निर्वाह व्ययो मे अन्तरो को मापता है।*

परचून मूल्य जो सूचकाक को पूरा करते हैं, आठ प्रमुख भागों में बँटे हुए हैं खाद्य, आवास, परिधान परिवहन, चिकित्सा, वैयक्तिक देखभाल, पढाई तथा मनोरजन, तथा अन्य वस्तुएँ और सेवाएँ। खाद्य तथा आवास को फिर उपसमूहो मे विभक्त किया *गया है। जिन लगभग 400 वस्तुओ तथा सेवाओ को सम्मिलित किया गया है* उनको सम्बद्ध मदो के उपसमूहो की कीमत उपनतियो के प्रतिनिधि के रूप मे चुना गया था तथा उनमे इस प्रकार की तरह-तरह की वस्तुओ तथा सेवाओ की लागत सम्मिलित है, जैसे चावल, मांस के समोसे, डिब्बाबन्द मछली, आलू मनुष्यो के लम्बे कोट, मनुष्य के *काम करने के दस्ताने, स्त्रियों के ऊनी सूट, किराया, बन्धक ब्याज, बिजली, चादरें*, मेजपोश, मोटर गाडियाँ, गैसोलिन, चिकित्सको के पास जाना (तथा उनका घर आना), आंख के शीशे तथा हजामत। 400 वस्तुएँ उन वस्तुओ और सेवाओ की "मण्डी टोकरी" की प्रतिनिधि है *जिनके अन्तर्गत नागरिक श्रमिको के परिवारो (2 या अधिक व्यक्तियो वाले) तथा अकेले व्यक्तियो के जीवन स्तर का प्रतिरूप आता है। उन्ह 50 शहरी क्षेत्रो मे मजदूरो* और लिपिक श्रमिको में मे 4,300 परिवारो तथा 500 अकेले व्यक्तियो के "खर्च सर्वेक्षण" के परिणामस्वरूप चुना गया था।

---

2. यह वर्णन सयुक्त राज्य के श्रम सम्बन्धी आँकडो के ब्यूरो के *दि कज्यूमर प्राइस इडेक्स ए शार्ट डिस्क्रिप्शन ऑफ दि इन्डेक्स ऐज रिवाइज्ड, 1964* पर आधारित है।

400 वस्तुओं और सेवाओं के कीमत आँकड़े 50 शहरी क्षेत्रों से इकट्ठे किये गए है जो उन नगर-विशेषताओं के प्रतिनिधि के तौर पर चुने गए हे जो परिवारों द्वारा अपने धन को व्यय करने के ढग को प्रभावित करते है। इस प्रकार ऐसे कारक जैसे आकार, जनसख्या घनत्व जलवायु, और आय स्तर, ध्यान मे रखे जाते हैं। प्रत्येक नगर मे कीमत दरें उन्हीं स्रोतो से प्राप्त की जाती है जिन स्रोतो से मजदूरी तथा वेतन लेने वाले श्रमिकों के परिवार वस्तुएं तथा सेवाएं प्राप्त करते है। उदाहरण के लिये, भण्डारों से क्रय की गई मदो की दरें प्रतिनिधि श्रृंखला भण्डारों, स्वतन्त्र भण्डारों, विभाग भण्डारों और विशिष्ट भण्डारों से प्राप्त की जाती हैं। नगर के लिये औसत कीमत परिवर्तनो को निश्चित करने के लिये, प्रत्येक मद के लिये, उचित भारों के साथ, विभिन्न स्रोतों द्वारा प्रकाशित कीमतो की औसत ली जाती है।

सयुक्त राज्य अमरीका के लिये तथा पाँच विशाल नगरो मे से प्रत्येक के लिए, सूचकांक मासिक बनाए जाते है और अन्य नगरो के लिए त्रैमासिक। प्रत्येक नगर मे कीमत परिवर्तनों की उस विधि मे औसत निकाली जाती है तथा उसे जोडा जाता है जो वास्तव मे भारित समाहन है, भार ऊपर उल्लिखित परिवारों और अकेले व्यक्तियों के सर्वेक्षण मे उपसमूह (जिसका प्रत्येक मद प्रतिनिधित्व करती है) के लिये "मण्डी टोकरी" मे आनुपातिक व्यय हे। जब विभिन्न नगरों के लिये कीमत परिवर्तनों को सयुक्त राज्य अमरीका के लिए आकड़े प्राप्त करने के लिये जोडा जाता है, तो प्रत्येक नगर को "श्रमिक तथा लिपिक जनसख्या के अनुपात मे, जिसका सूचकांक मे प्रतिनिधित्व है" भार दिया जाता है। जैसे ही नई जनगणना के आकड़े प्राप्त होते है नगर भारो का समजन किया जाता है। जैसाकि पिछले अध्याय मे बताया गया था, इस सूचकांक को श्रम समझौतों में चल-सोपान धाराओं के लिये प्रसग के आधार के रूप मे प्राय प्रयुक्त किया जाता है।

सयुक्त राज्य अमरीका के श्रम सम्बधी आँकडो के ब्यूरो का थोक पण्य कीमतों का सूचकांक —1957—1959 आधार पर इस सूचकांक को वार्षिक, मासिक, साप्ताहिक, तथा तुरन्त कीमतों के लिए, दैनिक आधार पर तैयार रखा जाता है। यह प्राथमिक मण्डियों मे मिश्रित कीमत गतियों की सामान्य दर एवं दिशा को और अलग-अलग वस्तुओं और वस्तुओं के समूहों के लिये कीमत गतियों की विशिष्ट दरों एवं दिशाओं को मापता है। इस सूचकांक मे प्रयुक्त अधिकतर दरें थोक विक्रेताओं की कीमतो की अपेक्षा उत्पादकों की कीमतें हैं। इस सूचकांक को गुण, मात्रा, विक्रय की शर्तों आदि मे विवर्तनों के कारण उत्पन्न हुए परिवर्तनों को मापने के लिये नहीं अपितु कालावधियो मे कीमत परिवर्तनों को मापने के लिये बनाया गया है।

इस सूचकांक मे कच्चे माल से लेकर तैयार सामान तक लगभग 2,200 वस्तुएँ सम्मिलित है जिसमे 'सयुक्त राज्य अमरीका मे प्राथमिक मण्डी स्तर पर प्रत्यक्ष अथवा परोक्ष रूप मे सभी वस्तुओं के सभी विक्रयों (जिसमे आयात और निर्यात दोनों सम्मिलित हैं) की गिनती करना अभिप्रेत है।" "प्राथमिक मण्डी स्तर" प्रत्येक वस्तु के लिये प्रथम महत्त्वपूर्ण आदान-प्रदान का संकेत करता है।

सूचकाँक मे सम्मिलित वस्तुओं को 15 मुख्य समूहों और 93 उपसमूहों मे वर्गीकृत किया गया है। तत्पश्चात् प्रत्येक उपसमूह को उत्पादन श्रेणियों मे बाँटा गया है जो "एक या अनेक सम्बन्धित उद्योगों द्वारा उत्पादित वस्तुओं के समूह हैं, और जिनका कीमत

गति, कच्चे माल, अथवा उत्पादन प्रक्रिया की समानता में भी विशेषीकरण किया जाता है।" मुख्य समूह है

1 कृषि उत्पाद
2 ससाधित खाद्य
3 बुना हुआ सामान तथा वस्त्र
4 चमड़ा, खालें, तथा चर्म उत्पाद
5 ईंधन तथा सम्बद्ध-उत्पाद और
6 रासायनिक पदार्थ एवं सह उत्पाद
7 रबड़ तथा रबड़ का सामान
8 काठ तथा लकड़ी का सामान
9. लुगदी, कागज, तथा सह उत्पाद
10 धातु तथा धातु उत्पाद
11 मशीनें तथा चालक उत्पाद
12 फर्नीचर तथा अन्य घरेलू चिरस्थायी वस्तुएँ
13. अधात्विक खनिज पदार्थ
14 तम्बाकू उत्पाद तथा बोतलो मे बन्द पेय
15 विविध उत्पाद

समूह 3 से 15 तक को "कृषि उत्पाद तथा ससाधित खाद्य को छोड कर सभी वस्तुएँ" अर्थात् औद्योगिक उत्पाद के एक और अधिक विस्तृत वर्ग मे जोडा गया है। परिणामतः, तीन प्रभाग (1) कृषि उत्पाद, (2) ससाधित खाद्य, तथा (3) कृषि उत्पाद एव ससाधित खाद्य को छोडकर सभी वस्तुएँ प्राप्य है।

2,200 वस्तुएँ यादृच्छिक प्रतिदर्श नही बनाती। वे प्राय प्रत्येक क्षेत्र मे सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण है अथवा यदि विक्रय मात्रा के रूप मे महत्त्वपूर्ण नही, परतु कुछ स्थितियो मे "किसी उद्योग या व्यापार विशेषताओं के कारण कीमत गतियो का अच्छा प्रतिनिधित्व प्रस्तुत करती हुई दृष्टिगोचर होती है।" वस्तुओ का वरण 'प्रत्येक उद्योग तथा उसके महत्त्वपूर्ण उत्पादों के ज्ञान' पर और सामान्यत "प्रत्येक क्षेत्र मे उच्च कोटि की व्यापार परिषदों और विनिर्माताओं से पूर्व विचार-विमर्श" पर आधारित था।

1958 की मात्राओ को प्राय, यद्यपि सदैव नहीं, भारो के रूप मे प्रयोग करने के साथ सूचकाक मूल रूप से भारित समाहत है। पृथक्-पृथक् वस्तुओ के बदलते हुए गुणो के लिये अवसर प्रदान करने की आवश्यकता को पूरा करने के वास्ते 'भौतिक मात्राओ द्वारा भारित निरपक्ष कीमतो को जोडने की अपेक्षा, मास प्रतिमास कीमत सापक्षों को आपस मे जोडकर तथा इन्हे विक्रयो के मूल्य से भार करके' ब्यूरो वस्तु सूचकाको का परिकलन करता है। यह प्रविधि एक वस्तु से दूसरी वस्तु के प्रतिस्थापन तथा भारो के तरीके मे परिवर्तन को भी सुगम कर देती है।

कृषकों द्वारा प्रदत्त एव प्राप्त कीमतों के सूचकाक, समता अनुपात—कृषि कीमतो को औद्योगिक कीमतो के साथ अधिकृत "समता" तक बढाने के प्रयत्नों मे सहायता करने के लिए, विधिवत् निर्धारित आधार 1910—1914 के साथ कृषि विपणन सेवा दो सूचकाको

का परिकलन करती है। एक को 'कृपको द्वारा दी गई कीमतो का सूचकाक" कहा जाता है और जब खेत बन्धक ऋण पर ब्याज, कृषि की वास्तविक सम्पत्ति पर कर, तथा मजदूरी पर रखे हुए मजदूरों को द्रव्य के रूप म दी गई मजदूरी सम्मिलित हो, तब उसे समता सूचकाक की पदसज्ञा दी जाती है। दूसरे सूचकाक को "कृपको द्वारा प्राप्त कीमतो का सूचकाक" कहा जाता है। किसी दिये गए समय के लिये समता सूचकाक के मुकाबले प्राप्त कीमतो के सूचकाक का अनुपात 'समता अनुपात" है।

किसानो द्वारा दी गई कीमतो के सूचकाक मे लगभग 350 मदें सम्मिलित हैं। 18 उपसमूहो के लिय सूचकाक प्रतिमास प्रकाशित किये जाते हैं। इन उपसमूहो मे से छ को परिवार निर्वाह क व्यय का सूचकाक बनाने के लिये जोडा जाता है, उनमे से नौ को कृपि उपज के उत्पादन के लिय व्यय का सूचकाक बनाने के लिये साथ-साथ लाया जाता है। इन दो प्रमुख सूचकाको को कृपको द्वारा दी गई कीमतों का सूचकाक बनाने के लिये प्रदत्त सूद, करो, तथा मजदूरी दरो के साथ मिलाया जाता है। जब अलग-अलग वस्तुओं की कीमतो को जोड रह हों तो मात्रा भारो का प्रयोग किया जाता है। अधिकतर, प्रत्येक वस्तु के लिये व्यय को विशिष्ट वर्षो, जैसे कि 1937—1941, 1953—1957 तथा अन्यो, मे उस वस्तु की औसत कीमत से भाग करके, भारो को व्ययो के सर्वेक्षण से प्राप्त किया गया था। जब उपसमूह तथा समूह मिश्रित सूचकाको को जोड दिया जाता है तब कृपको द्वारा उन्ही वर्षों मे व्यय की गई राशियो द्वारा प्राय उन्हे भारित किया जाता है। सूचकाक केवल मात्र कीमत परिवतनो को ही नही मापता, क्योंकि यह व्यापारियो द्वारा साधारणतया भण्डार की गई वस्तुओ के गुण मे परिवर्तनो द्वारा तथा, जैसे कृपक ऊँची या नीची आय स्तरो से समजन करते हैं उनके द्वारा क्रय की गई वस्तुओं के गुण मे परिवर्तनो द्वारा प्रभावित होता है।

प्राप्त की गई कीमतो का सूचकाक उन लगभग 60 वस्तुओ पर आधारित है जो सभी कृपि वस्तुओ, जिनमे फसल तथा पशुधन दोनो सम्मिलित है, परन्तु जिनमे इमारती लकडी तथा वन उत्पाद तथा कुछ अन्य लघु वर्ग सम्मिलित नही हैं, के क्रय विक्रय से प्राप्त कुल धन राशि का लगभग 95 प्रतिशत हैं। सूचकाक को बनाने मे प्रयुक्त वे कीमतें हैं जो "प्रथम विक्रय के बिन्दु पर सभी स्तरो तथा गुणो की महत्वपूर्ण कृपि वस्तुओ, जिन्हे प्राय स्थानीय मण्डी कहा जाता है, की कीमते हैं। सूचकाक आवश्यक तौर पर एक भारित समाहृत है। पृथक् पृथक् वस्तुओं के लिये सयुक्त राज्य अमरीका की औसत कीमतो को उपसमूह सूचकाको मे जोड दिया जाता है, विशिष्ट वर्षों मे कृषको द्वारा विक्रय की गई मात्राएँ उनमे भार होती है जैसा कि ऊपर देखा गया। जब उपसमूह सूचकाको को समूह तथा सर्व-वस्तु सूचकाक बनाने के लिय जोडा जाता है तो भार "वह प्रतिशत है जो विशेष वस्तु उपसमूहो के लिये क्रय विक्रय मे प्राप्त नकद रकम उसी काल के योग के सम्बध मे है।" दी गई कीमतो के सूचकाक की तरह यह सूचकाक केवल कीमत परिवर्तनो को नही मापता, क्योंकि इसके अन्तर्गत विभिन्न वस्तुओ के सभी स्तरों तथा गुणो की औसत कीमतें आ जाती है।

प्रारम्भ म उल्लिखित "समता अनुपात" उस सीमा को मापने का काम करता है जिससे कृपको द्वारा प्राप्त की गई कीमतें उन कीमतो की तुलना मे जो वे उस समय देते हैं जबकि वे आधार काल, 1910—1914 मे थे, कितनी ऊँची या नीची हैं। इस समता अनुपात को प्रथम 1933 के एग्रिकल्चरल एडजस्टमेन्ट एक्ट मे रखा गया जिसने "किसान की कीमतो को उसी स्तर पर पुनर्स्थापित करने का कार्य किया जो उन वस्तुओ

के सम्बन्ध में जो कि किसान क्रय करते हैं कृषिगत वस्तुओं के आधार वर्ष की जिसे 1910—1914 निश्चित किया गया था, 'कृषिगत वस्तुओं की क्रय शक्ति के बराबर क्रय शक्ति प्रदान करेगा।

सामान्य स्टाक कीमतें—न्यूयार्क स्टाक एक्सचेंज सामान्य स्टाक सूचकांक[3] में एक्सचेंज में सूचीबद्ध 1 250 से अधिक सामान्य स्टाक में से सभी की कीमत सम्मिलित हैं। आधुनिक परिकलन उपकरण का प्रयोग करके सूचकांक का प्रत्येक व्यापार दिवस के दौरान सकंड तक का हिसाब लगाया जाता है और इसे एक्सचेंज के टिकर पर प्रति घण्टा तथा आध घण्टा पर दर्शाया जाता है। यह प्रथम बार 14 जुलाई 1966 को प्रदर्शित किया गया था। प्रत्येक स्टाक कीमत को उस स्टाक के सूचीबद्ध शेयरों की संख्या से भारित किया जाता है। इस समाहृत सूचकांक में 31 दिसम्बर 1965 के दिन मण्डी के बन्द होने को आधार के रूप में प्रयोग किया गया है जिस समय इसका 50 00 पर रखा गया। यह सब सूचीबद्ध सामान्य स्टाक की डालरों में उस समय प्रचलित प्रति शेयर लगभग औसत मूल्य है।

सूचकांक को सुगमता से NYSE सामान्य स्टाक सूचकांक कहा जाता है। इसका दैनिक बन्द होने के आधार पर पीछे 28 मई 1964 तक परिकलन किया गया है। यह अन्तिम तिथि थी जब सिक्योरिटीज तथा एक्सचेंज आयोग का साप्ताहिक सूचकांक दर्शाया गया। ऐतिहासिक सातत्य के लिए NYSE सामान्य स्टाक सूचकांक का सामान्य स्टाक कीमतों के SEC साप्ताहिक सूचकांक से सम्बंध जोड दिया गया है ताकि NYSE सामान्य स्टाक सूचकांक को साप्ताहिक आधार पर 7 जनवरी 1939 से 28 मई 1964 तक प्राप्त किया जा सके।

पूंजीकरण, नए सूची अन्तर्वेशों तथा सूची अपवर्जनों में परिवर्तनों के लिए दैनिक समजन किए जाते हैं। किसी कम्पनी के शेयर खरीदने के अधिकारों (निगम के प्रलाभ होने के उपरान्त) उसी या नियन्त्रित कम्पनी के अन्य निगमों में राशि लगाने के अधिकारों और सूचीबद्ध कम्पनियों के सम्बंध में विलयों अथवा अर्जनों के लिए भी समजन किए जाते हैं। ये समजन आधार (31 दिसम्बर 1965) बाजार मूल्य को समुचित बढ़ा या घटा कर सम्पन्न किए जाते हैं उद्देश्य यह होता है कि सूचकांक के स्तर को उसी मूल्य पर बनाए रखा जाए जिस पर यह सूची परिवर्तन से पूर्व था। उदाहरणार्थ विचार कीजिए कि अधिकारों की वित्त व्यवस्था द्वारा सब सूचीबद्ध सामान्य स्टाक के बाजार मूल्य में 2 बिलियन डालर जोड़े गए आधार मूल्य 600 बिलियन डालर था तथा अधिकारों की वित्त व्यवस्था से पूर्व बाजार मूल्य 660 बिलियन डालर था। अधिकारों की वित्त व्यवस्था से पूर्व सूचकांक था

(डालर 660 बिलियन – डालर 600 बिलियन) × 50 00 = 55 00।

अधिकार वित्तव्यवस्था के उपरान्त बाजार मूल्य 662 बिलियन डालर था। समजित आधार बाजार मूल्य बनता है

$$\frac{\text{डालर } 662 \text{ बिलियन}}{\text{डालर } 660 \text{ बिलियन}} \times \text{डालर } 600 \text{ बिलियन} = \text{डालर } 601\ 82 \text{ बिलियन}$$

---

3 इस परिच्छेद की जानकारी न्यूयार्क स्टाक एक्सचेंज द्वारा निर्गमित पुस्तिका मैंजर थार दि मार्केट तथा एक्सचेंज के अनुसंधान विभाग से, जिसने कृपा करके यहाँ दिए विवरण की पड़ताल की, ली गई थी।

तथा चालू सूचकांक है

$$\frac{\text{डालर 662 बिलियन}}{\text{डालर 601.82 बिलियन}} \times 50\ 00 = 55.00,$$

वही मूल्य जो अधिकार विन्यव्यवस्था से पूर्व था । स्टाक विभाजनो, प्रतिवर्ती विभाजनों, तथा स्टाक लाभाशो के कारण कीमतो के परिवर्तनो की, विभाजन या लाभाश अनुपातो के अनुसार प्रभावित निर्गमो के शेयरो की संख्या को केवल परिवर्तित करके क्षतिपूर्ति की जाती है ।

सामान्य स्टाक सूचकाक के अतिरिक्त, एक्सचेंज द्वारा, प्रति घण्टा, एक वित्त सूचकाक, एक परिवहन सूचकाक, एक उपयोगिता सूचकाक, तथा एक औद्योगिक सूचकाक निर्गमित किए जाते हैं । 14 जुलाई 1966 को वित्त सूचकाक मे 75 निर्गम थे, परिवहन सूचकाक मे 76 निर्गम आते थे, उपयोगिता सूचकाक 136 निर्गमो का बना था, तथा औद्योगिक सूचकाक मे लगभग 1,000 निर्गम आते थे । प्रत्येक सूचकाक मे निर्गमो की सख्या समय-समय पर बदलती है परन्तु अधिक नही । वित्त सूचकाक मे बन्द-सिरा निवेश कम्पनियो बचत एव ऋण नियत्रक कम्पनियो, जायदाद नियत्रक एव निवेश कम्पनियो के निर्गम तथा वाणिज्यिक एव किश्त वित्त, बैंक, बीमा, तथा सम्बधित क्षेत्रो के अन्य निर्गम आते है । परिवहन सूचकाक रेल मार्गो, हवाई मार्गो, नौ-परिवहन, मोटर परिवहन के प्रतिनिधि निर्गमो तथा परिवहन क्षेत्र मे कार्य करने वाली, पट्टे पर देने वाली तथा नियत्रक अन्य कम्पनियो के निर्गमो से बनता है । उपयोगिता सूचकाक का निर्माण गैस, विद्युत् शक्ति तथा सचार मे कार्य करने वाली, नियत्रक तथा सचारण कम्पनियो के निर्गमो से होता है । औद्योगिक सूचकाक तीन पूर्ववर्ती सूचकाको मे असम्मिलित NYSE सूचीबद्ध स्टाक से बनता है । ये निर्गम निर्माण विपणन एव सेवा के अनेक क्षेत्रो मे विस्तृत प्रकार के औद्योगिक निर्गमो का प्रतिनिधित्व करते हैं । चारो सूचकाको का, दैनिक बन्द होने के आधार पर, पीछे 14 जुलाई 1966 से 31 दिसम्बर 1965 तक परिकलन किया गया है, जिस समय प्रत्येक को 50 00 पर रखा गया था ।

भौतिक परिमाण तथा व्यापार क्रिया के सूचकांक

औद्योगिक उत्पादन का फैडरल रिजर्व सूचकाक—यह सूचकाक, जिसे फैडरल रिजर्व सिस्टम के बोर्ड आफ गवर्नर्स द्वारा प्रति मास प्रकाशित किया जाता है, 1957—1959 को आधार काल के रूप मे प्रयुक्त करता है तथा विनिर्माण एव खानो के उत्पादन के भौतिक परिमाण मे परिवर्तनो को मापता है । उत्पादो तथा उद्योगो के लिये तथा बजट के ब्यूरो द्वारा विकसित मानक औद्योगिक वर्गीकरण पुस्तिका के पुष्टिकरण के साथ उद्योगो के समूहो के लिये सूचकाक बनाने के हेतु अलग अलग श्रेणियो को जोड दिया जाता है । समग्र सूचकाक, औद्योगिक उत्पादन, को विनिर्माणो, खानो, तथा उपयोगिताओ मे बाँट दिया जाता है । इन तीनो को उपसमूहो मे बाँट दिया जाता है जिनमे विनिर्माणो के दो मुख्य उपसमूह होते हैं चिरस्थायी विनिर्माण तथा अचिरस्थायी विनिर्माण ।

वे उद्योग जो औद्योगिक उत्पादन के सूचकाक के अन्तर्गत आ गए है राष्ट्रीय आय के एक-तिहाई से अधिक को व्यक्त करते है । अर्थव्यवस्था के महत्त्वपूर्ण क्षेत्रो मे जिनको नही लिया गया वे है निर्माण, परिवहन, व्यापार, सेवाएँ, तथा कृषि ।

सूचकांक का उद्देश्य भौतिक उत्पादन को मापना है परन्तु बहुत से उद्योग भौतिक उत्पादन के आंकड़ों को प्रदान नहीं करते, या नहीं कर सकते। परिणामतः बोर्ड को कभी-कभी ऐसी, सम्बद्ध श्रेणियों को अवश्यमेव चुनना चाहिये जिनमें उत्पादन के साथ न्यूनाधिक निकटता से उतार-चढ़ाव हो। इनसे काम करने के घण्टे, पोत लदान, तथा उपभोग किये गए पदार्थ आते हैं। कुछ उदाहरणों में जब भौतिक उत्पादन के वार्षिक आंकड़े प्राप्त हो जाएँ तत्पश्चात् मासिक श्रेणी को जोड़ा जा सकता है। मूल आंकड़ों को प्रति कार्यदिवस के उत्पादन के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।

पृथक्-पृथक् श्रेणी के लिये आंकड़ों को जोड़ने की विधि के अन्तर्गत आते हैं (1) प्रत्येक श्रेणी को आधार काल 1957—1959 में औसत मासिक उत्पादन की प्रतिशतताओं में परिवर्तित करना, (2) सापेक्षों की प्रत्येक श्रेणी को, सभी श्रेणियों को प्रदत्त भार की प्रतिशतता के रूप में अभिव्यक्त आधार वर्ष भार कारक से गुणा करना, तथा (3) पग (2) से उत्पन्न उत्पादनों को जोड़ना। प्रयुक्त भार 1957—1959 में जुड़े मूल्य पर आधारित हैं, जोड़ा गया मूल्य उत्पादों के मूल्य तथा उपभोग किये गये माल या सामान की लागत में अन्तर है। कुछ उदाहरणों में जोड़े गये मूल्य के आंकड़े प्राप्य नहीं हैं, पर उनका अवश्यमेव आकलन कर लेना चाहिये। मुख्य उद्योग समूहों तथा अपेक्षाकृत बड़े वर्गों (चिरस्थायी तथा अचिरस्थायी विनिर्माणों, विनिर्माणों, खनिज पदार्थों तथा उपयोगिताओं) के लिये सूचकांक ऋतुनिष्ठ समंजित तथा असमंजित आधार पर दिये जाते हैं।

भौतिक परिमाण तथा व्यापार क्रिया के अन्य सूचकांक—अनेक संगठन 'औद्योगिक क्रिया'' आर्थिक क्रिया, तथा ''व्यापार क्रिया'' के सूचकांकों को संकलित और प्रकाशित करते हैं। उनमें अमरीकन टेलीफोन एवं तार कम्पनी, न्यूयार्क टाइम्स, पिट्सबर्ग विश्व-*विद्यालय का व्यापार अनुसंधान ब्यूरो, तथा रुटगर्स राज्य विश्वविद्यालय का आर्थिक अनुसंधान ब्यूरो है।*[4]

गुणात्मक परिवर्तनों अथवा अन्तरों के सूचकांक

अध्याय 17 के प्रारम्भ में यह देखा गया था कि मानवीय क्रिया के विभिन्न क्षेत्रों में ऐतिहासिक, भौगोलिक, या वर्गानुसार तुलनाएँ करने के लिये सूचकांकों का प्रयोग किया जा सकता है। क्योंकि सूचकांकों की विशाल मात्रा को कीमत विचरणों का वर्णन करना पड़ता है और अनेक अन्य सूचकांक उत्पादन में उतार-चढ़ावों का वर्णन करते हैं अतः विभिन्न क्षेत्रों में से कुछ पर, जिनमें सूचकांक तकनीक का प्रयोग किया गया है ध्यान दिलाने के लिये पूर्वगामी अनुच्छेदों में उदाहरणों का निदर्शन किया गया था। पाठक *अन्य सामाजिक या शिक्षा-सम्बन्धी आंकड़ों पर, मनोविज्ञान पर, औषधि-विज्ञान पर, तथा अन्य* क्षेत्रों पर जो अर्थशास्त्र तथा व्यापार की द्रव्य-सम्बन्धी तथा भौतिक-परिमाण धारणाओं से बहुत दूर हैं शीघ्रता से इसके अनुप्रयोग को समझ सकता है।

गुणात्मक मामलों के सम्बन्ध में सूचकांकों के प्रयोग के लचीलेपन के उदाहरण के रूप में हम एक अन्वेषक का दृष्टान्त दे सकते हैं जिसने एक निश्चित समय पर निश्चित

4 उदाहरणार्थ, देखिए जो० आई, सी० बोमन, तथा आर० क्रिनयोर, *ए मंथली इन्डेक्स ऑफ मैनुफैक्चरिंग प्राडक्शन इन न्यू जरसी*, आर्थिक अनुसंधान ब्यूरो, रुटगर्स राज्य विश्वविद्यालय, 1963, 133 पृष्ठ। धना और ऋतुनिष्ठ तथा बहुत भिन्न प्रकार के संगठनों द्वारा प्रयुक्त उत्पत्ति समंजना के विवरण के लिए मूल अंग्रेजी पुस्तक के द्वितीय संस्करण में पृष्ठ 444—446 देखिए।

कसौटियो के अनुसार घरो के सम्बन्ध मे ओकलाहोमा की काउन्टियो की तुलना करने के लिए उनका प्रयोग किया। अत इन सूचकांको मे एक काल से अगले काल तक परिवर्तन नही परन्तु वस्तुत. भौगोलिक अन्तर आते थे।

ओकलाहोमा की 77 काउन्टियो मे से प्रत्येक के लिये ग्रामीण फार्म आवास के चार विभिन्न सूचकांक बनाने के लिये सोलह आवास मापो का प्रयोग किया गया था। प्रत्येक सूचकांक ने प्रत्येक काउन्टी के लिये एक सूचकांक प्रदान किया। इनमे से एक मे, 16 मापो मे मे प्रत्येक के सम्बन्ध मे काउन्टियो का केवल दर्जा बनाया गया; फिर दर्जों को जोड़ा गया और 16 से भाग किया गया। दूसरे सूचकांक मे, 16 श्रेणियो मे से प्रत्येक के लिये प्रत्येक काउन्टी को एक मापक्ष प्राप्त हुआ, सापेक्ष (1) श्रेणी मे काउन्टी मूल्य और (2) राज्य के लिये सगत आकडो के बीच अनुपात पर आधारित था। तीसरे सूचकांक मे मानक अको (देखें पृष्ठ 204—205) का प्रयोग किया गया जब कि चौथे मे कारक विश्लेषण[5] का प्रयोग हुआ। अन्वेषक ने जिसकी प्रथमत इन चार विधियो की तुलना करने मे रुचि थी, निष्कर्ष निकाला कि उनसे समान रूप से सन्तोषजनक आवास के सूचकांक प्राप्त हुए।

कालक्रमरहित सूचकांक, जो भौगोलिक अन्तरो या वर्गों के बीच अन्तरो को मापने का काय करते है प्राय दिखाई नही पडते और आजकल अपेक्षाकृत बहुत कम प्रयोग मे आते है। मानसिक रोगियों की राजकीय देखभाल की पर्याप्तता को मापने के लिये सूचकांको का प्रयोग करने के प्रयत्न किये गए है, और साथ-साथ राज्यो के बीच तथा दो भिन्न वर्षो के बीच तुलनाएँ की गई है, तथा धर्म प्रदेशो[6] के धार्मिक काम की तुलना करने, मिट्टियो के कृषि सम्बन्धी मूल्य के श्रेणी निर्धारण करने,[7] और परस्पर एक दूसरे के साथ राज्य पद्धतियो की तुलना करने, के प्रयत्न किये गए है।

---

5 कारक-विश्लेषण इस पुस्तक के क्षेत्र से परे है।

6 देखिए जे० ई० रौम द्वारा लिखित एन इंडेक्स नम्बर फॉर अमेरिकन डायोसेसिस, शील्ड प्रैस, रैसिन विसकन्सिन, तथा नेशनल कैथोलिक वैल्फेयर, कान्फ्रेंस वाशिंगटन, डी० सी०, तिथि रहित पुस्तिका।

7 देखिये आर० अर्ल स्टोरी द्वारा लिखित एन इंडेक्स फॉररेटिंग दि एग्रीकल्चरल वेल्यू ऑफ सायल्ज, कैलिफोर्निया कृषि प्रयोग केन्द्र, बर्कले, कैलिफोर्निया का बुलेटिन 556।

19

सहसंबन्ध I : द्वि-चर रेखिक सहसंबन्ध

विज्ञान के मुख्य उद्देश्यो मे से एक सहकारक के मूल्यो के प्रसग द्वारा एक कारक के मूल्य का आकलन करना है। "वैज्ञानिक विधि ..तथ्यो के विचारपूर्ण तथा परिश्रमपूर्ण वर्गीकरण, उनके सम्बन्धो तथा क्रमो की तुलना मे, और अन्तत अनुशासित विचार की सहायता द्वारा सक्षिप्त वक्तव्य या सूत्र की खोज मे निहित है जो थोड़े शब्दो मे तथ्यो के विस्तृत परिसर को बनाए रखती है। इस प्रकार के सूत्र को...वैज्ञानिक नियम की सज्ञा दी जाती है।"[1] जब सम्बन्ध की प्रकृति मात्रात्मक है, तो सम्बन्धो की खोज और माप करने के लिए तथा उसे सक्षिप्त सूत्र मे व्यक्त करने के लिए समुचित सांख्यिकीय साधन को सहसम्बन्ध कहा जाता है।

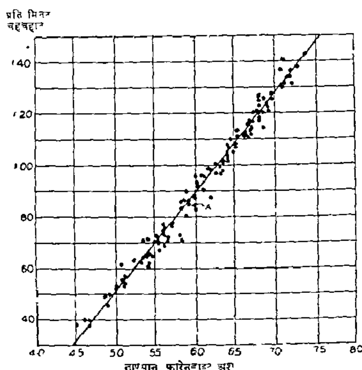
एक सरल व्याख्या

हम मे से कुछ को यह जान कर विस्मय हो सकता है कि तापमान मे और झींगुरो के बोलने की बारबारता मे एक बहुत निकट सम्बन्ध है। उदाहरणार्थ यदि हम 15 सेकण्ड मे झींगुर की चहचहाहट की सख्या की गिनती करें और उसमे 37 जोड दे, तो हम बडी निकटता से, उस समय के फारनहाइट तापमान का अनुमान लगा सकते हैं। अथवा, यदि हम फारनहाइट तापमान के अशो को 3.78 से गुणा करें और परिणाम मे से 137 घटा दे तो एक मिनट मे झींगुर की चहचहाहट की प्रत्याशित सख्या का अनुमान लगा सकते हैं। जब तक तापमान 45° से नीचे नहीं हो जाता, यह सम्बन्ध विशिष्ट रूप से परिशुद्ध मिलेगा। जब मौसम 45° से अधिक ठडा हो तो उस समय झींगुर नहीं बोलते। इसी प्रकार 75° से ऊपर के तापमान मे भी सम्भवत यह विशेष ठीक न बैठे क्योकि उस तापमान से ऊपर प्रेक्षण नहीं किए गए हैं और इसलिए हम नहीं जानते कि उच्चतर तापमान पर भी यह सम्बन्ध रहता है या नहीं।

इन दो चरो—*तापमान तथा झींगुर की चहचहाहट—के बीच सम्बन्ध का प्रदर्शन* चार्ट 19 1 मे किया गया है, जिसे प्रकीर्ण-आरेख के नाम से जाना जाता है। प्रत्येक बिन्दु एक झींगुर के प्रेक्षण को प्रस्तुत करता है। इस प्रकार A 59 0° तापमान पर प्रेक्षण एक झींगुर को प्रस्तुत करता है जो एक मिनट मे 85 बार बोला। पाठक ध्यान दें कि तापमान X-अक्षाश पर आलेखित किया गया है और प्रति मिनट झींगुर की चहचहाहट को Y-अक्षाश पर। यह इसलिए किया गया है क्योकि एक मिनट मे झींगुर की चहचहाहट तापमान का प्रत्यक्ष परिणाम प्रतीत होती है। इस सम्बन्ध मे यह भी सत्य है कि एक प्रदत्त

1. कार्ल पियर्सन, दि ग्रामर ऑफ साइंस, एडम एन्ड चार्लस ब्लैक, लन्दन, 1900, पृष्ठ 77।

तापमान पर हम झींगुर की चहचहाहट की अपेक्षित सख्या का आकलन करना चाहते हैं, अत तापमान एक स्वतन्त्र चर है और एक मिनट मे झींगुर का बोलना आश्रित चर है।



चार्ट 19 1 तापमान तथा 115 झींगुरो की प्रति मिनट चहचहाहट।
आँकड़ मिस्टर बर्ट ई० हाम्स से प्राप्त हुए है।

यद्यपि हम तापमान का आकलन करना चाहते हैं तो भी X-प्रक्षाश पर कारणात्मक कारक का दिखाना सर्वोत्तम होगा। जब कारणात्मक सम्बन्ध स्पष्ट न हों, या जब किसी भी कारक को दूसरे का कारण न बताया जा सके, तब आकलित किए जाने वाले चर को Y-प्रक्षाश पर आलेखित करना चाहिए।

चार्ट 19 1 मे निर्णय करते हुए, हम यह देखते हैं कि दो चरो के बीच सम्बन्ध रैखिक है, क्योकि सरल रेखा का उपयुक्त होना उतना ही अच्छा दिखाई देता है जितना कि एक अधिक क्लिष्ट वक्र का। इस रेखा[2] का समीकरण

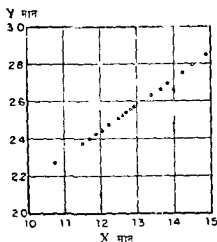
$$Y_c = -137\ 22 + 3\ 777X$$

है। इस समीकरण से, चार्ट पर दिखाए गए प्रेक्षणो की सीमाओ के अन्तर्गत किसी वाछित तापमान पर चहचहाहट के अनुमान लगाए जा सकते हैं। इस प्रकार, यदि हम उस समय चहचहाहट की सख्या का आकलन करना चाहे, जब तापमान 59 0° (प्रेक्षण A) है तो हम समीकरणों मे X के लिए 59 0 का प्रतिस्थापन करके सख्या प्राप्त करते हैं। इस प्रकार

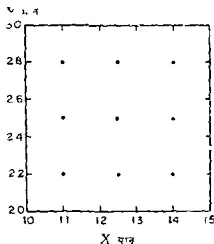
$$Y_c = -137\ 22 + (3\ 777)(59\ 0) = 86 \text{ चहचहाहट।}$$

2 लेखक ने इस समीकरण को बर्ट ई० होम्स के द्वारा दिए गए आँकडो मे आसजित कर दिया था।

कम परिशुद्धता से ही सही, आकलन चार्ट पर आलेखित आकलन रेखा से सीधे पढ़ा जा सकता है। यद्यपि आकलन (86) यथार्थतः प्रेक्षित 85 चहचहाहटों से पूर्णरूपेण नहीं मिलता, तथापि अन्तर अधिक नहीं है।



चार्ट 19.2 पूर्ण रेखिक सहसम्बन्ध को चित्रित करने वाला एक प्रकीर्ण आरेख। सहसम्बन्ध उस समय भी पूर्ण होगा यदि उस रेखा पर जिस पर कि बिन्दु पड़ते हैं, धनात्मक की अपेक्षा ऋणात्मक ढाल होता। एफ० ई० क्रॉक्सटन के *एलिमेन्टरी स्टैटिस्टिक्स विद एप्लिकेशन्स इन मेडिसिन एन्ड दि बायलाजिकल साइंसिस*, डावर प्रकाशन, इन्क, न्यूयार्क, 1959, पृष्ठ 112 से।



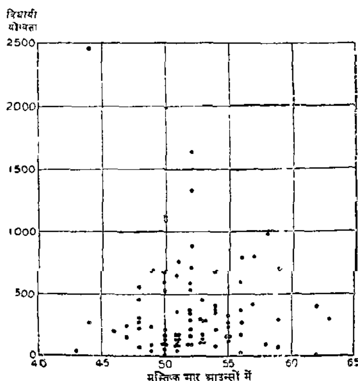
चार्ट 19.3 किसी सहसम्बन्ध को चित्रित न करने वाला प्रकीर्ण आरेख। बिन्दुओं की विभिन्न अन्य व्यवस्थाएँ सम्भव हैं जो किसी प्रकार का भी सहसम्बन्ध नहीं दिखाएँगी। चार्ट 19.2 के स्रोत से।

हम समीकरण $Y_c = -137.22 + 3.777X$ में वर्णित सामान्यीकरण के औचित्य से प्रभावित हुए बिना नहीं रह सकते। क्योंकि अधिकतर बिन्दु रेखा के बहुत निकट हैं, अतः यह प्रतीत होता है कि तापमान के प्रकरण द्वारा चहचहाहट की बारंबारता का ठीक से वर्णन किया गया है। *आकलन रेखा से तनिक से विचरणों का वर्णन नहीं किया गया है* और वे पृथक्-पृथक् झींगुरों में अन्तर होने से, जिस वर्ष में या दिन के समय में प्रेक्षण किए गए उससे सम्बन्धित अन्तरों से, आर्द्रता से, और तापमान के प्रेक्षण की अशुद्धता से या चहचहाहट की संख्या से हो सकते हैं। साथ ही, जहाँ पर झींगुर बोल रहा है तथा जहाँ पर प्रेक्षक खड़ा है उन दोनों स्थानों के तापमान में भी अन्तर हो सकता है। यह उस अवस्था में हो सकता है जब झींगुर किसी पत्थर के नीचे हो। तापमान के अतिरिक्त, विचरण के अन्य कारणों की परीक्षा में तीन या अधिक चरों पर विचार करना निहित है, जिसके लिए एक प्रविधि पर अध्याय 21 में "अनेकधा सहसम्बन्ध" शीर्षक के अन्तर्गत विचार किया जाएगा।

यह बता कर कि सहसम्बन्ध का गुणांक, r, $+0.9919$ है, सम्बन्ध की निकटता का सामान्य शब्दों में वर्णन किया जा सकता है। क्योंकि ± 1.0 पूर्ण सहसम्बन्ध (देखें चार्ट

19 2) है और 0 कोई सहसम्बन्ध नही (देखें चार्ट 19.3) है, तो यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि + 0 9919 से ऊँचा गुणाक किसी को प्राय: कभी नहीं मिलता। धनात्मक चिह्न यह प्रदर्शित करता है कि सहसम्बन्ध धनात्मक है—अर्थात् जैसे-जैसे तापमान बढता है चहचहाहट भी बढती जाती है। यदि बढने हुए तापमान के साथ चहचहाहट की सख्या कम हुई होती तो सहसम्बन्ध ऋणात्मक या विपरीत हुआ होता; चिह्न *r* ऋणात्मक हुआ होता, जैसाकि आकलन समीकरण में भी हुआ होता, *b* का चिह्न, और आकलन रेखा का ढाल दाएँ को नीचे की ओर हुआ होता।

तनिक निम्न सहसम्बन्ध (−0 11) का एक उदाहरण चार्ट 19.4 मे दिया गया है। इस अवस्था मे, मस्तिष्क भार का आकलन कपाल-दक्षता से लगाया गया है और विधान योग्यता का अकोके कुछ क्लिष्ट ढग से। परन्तु यदि हम यह पूर्वधारणा कर भी लें कि सभी माप परिशुद्ध है तो भी प्रमाण निश्चित रूप से यह सुझाव नही देता कि विधायको को केवल मस्तिष्क मापो के आधार पर ही चुना जाना चाहिए। सम्भवत. कुछ और भी कारण है जिन पर विधायक की योग्यता निर्भर करती है, जैसे बुद्धिमत्ता, शिक्षा, प्रेरणा, ईमानदारी, सामाजिक प्रबुद्धता, तथा अन्य गुण निस्संदेह महत्त्वपूर्ण हैं।



चार्ट 19 4 कांग्रेस के 89 सदस्यों की विधायी योग्यता मस्तिष्क भार तथा के आकलन। आंकडे कांग्रेशनल रिकार्ड, 12 अप्रैल, 1932 मे आर्थर मैकडानल द्वारा लिखित "ब्रेन वेट एन्ड लैजिस्लेटिव एबिलिटी इन कांग्रेस"

सहसम्बन्ध सिद्धान्त

सहसम्बन्ध के विषय मे माप के तीन प्रकारो पर विचार किया जा सकता है, जिन को निम्नलिखित क्रम से सुविधानुसार बनाया जा सकता है :

(1) आकलन, या समाश्रयण[3], समीकरण जो दो चरो के बीच फलनीय सम्बन्ध का वर्णन करता है। जैसा कि नाम सकेत करता है, इस समीकरण का एक उद्देश्य एक चर से दूसरे चर का आकलन करना है।

(2) आश्रित चर के लिए *अनुमानित या परिकलित मूल्यो से* वास्तविक मूल्यो के अपसरण का माप। यह माप मानक विचलन के समान है और निरपेक्ष रूप मे आकलनों *की आश्रयता का विचार प्रदान करता है। इसे आकलन की मानक त्रुटि* ($s_{1\ r}$) कहा जाता है।

(3) उन इकाइयों या मदों से स्वतन्त्र जिनमे कि मूलत. उनकी व्याख्या की *गई थी, चरो के बीच सम्बन्ध के अश, या सहसम्बन्ध* (r), का माप। इस माप का वर्ग (r^2) हमे आश्रित चर में, जिसकी व्याख्या आकलन समीकरण के द्वारा की गई है, विच- *रण की सापेक्ष मात्रा बताने के योग्य बनाता है।*

आकलन समीकरण—जगल वालो को कई बार वृक्षो की ऊँचाई के विकास का उनके व्यास के विकास द्वारा अनुमान लगाना सुविधाजनक लगता है, क्योकि ऊँचाई के विकास के प्रत्यक्ष माप की अपेक्षा इस प्रविधि मे कम समय लगता है। प्रकीर्ण आरेख, चार्ट 19 5, छाती भर ऊँचा *व्यास-विकास और 20 वृक्षो की ऊँचाई मे* विकास दर्शाता है जोकि आकलन रेखा के साथ दो चरो के बीच सम्बन्ध के स्वभाव की व्याख्या *करता है। इस सरल रेखा को इस प्रकार जोडा गया है* कि इसमे Y विचलनो के *वर्गों* का योग किसी अन्य सरल रेखा के वर्गों के योग से कम है। इस प्रकार जोडे गए वक्र को *सांख्यिकीविदो द्वारा प्राय सर्वोत्तम माना गया है* जिसके साथ एक चर के मूल्यो को मापा जाता है जबकि दूसरे चर के मूल्य ज्ञात हैं। इस प्रकार की रेखा का आसजन उपनति के आसजन के समान है, और इसमे निम्न सामान्य समीकरणो का प्रयोग आता है ·

$$\text{I. } \Sigma Y = Na + b\Sigma X.$$

$$\text{II } \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

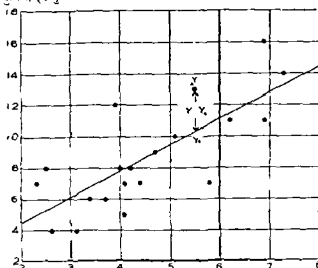
यह स्मरण कीजिए कि सामान्य समीकरणों का वर्णन अध्याय 12 मे किया गया था।

सारणी 19.1 मे मूल्य निर्धारण के लिये आवश्यक परिकलनो को दिखाया गया है जिसका अवश्यमेव प्रतिस्थापन किया जाना चाहिये। प्रतिस्थापन फल है :

$$\text{I } 173 = 20a + 90.7b.$$

$$\text{II } 856.0 = 90\ 7a + 453.93b.$$

3 जीव विज्ञानीय समाश्रयण (अर्थात् सामान्य प्रकार या औसत की ओर लौटने की प्रवृत्ति) का अध्ययन करने के लिए गाल्टन के द्वारा सहसम्बन्ध के प्रयोग के परिणामस्वरूप "समाश्रयण" शब्द का सांख्यिकी साहित्य मे प्रवेश हुआ। अब जबकि सहसम्बन्ध विश्लेषण का प्रयोग बहुत प्रकार की समस्याओ मे होने लगा है, शब्द "आकलन' अधिक उचित दिखाई देता है।



चार्ट 19.5 20 वन वृक्षों का छाती की ऊँचाई का व्यास विकास और ऊँचाई विकास । *सारणी 19 1 के आंकड़े ।*

समीकरण 1 म सभी मदो को 4 535 से गुणा करन पर और समीकरण I को समीकरण II में से घटाने स a को निरस्त किया जा सकता है । इस प्रकार

$$\begin{array}{lrl} \text{II} & 856\ 0 & = 90\ 7a + 453\ 93b \\ (\text{I} \times 4\ 535) & 784\ 555 & = 90\ 7a + 411\ 3245b \\ \hline & 71\ 445 & = \qquad 42\ 6055b. \end{array}$$

$$b = 1.676896$$

a का मूल्य प्राप्त करने के लिय अब हम समीकरण I में b के मूल्य का प्रतिस्थापन कर सकते हैं ।

$$\text{I} \quad 173 = 20a + 152\ 094467.$$

$$a = 1\ 045277.$$

समीकरण II म प्रतिस्थापन द्वारा a तथा b के मूल्यो का परीक्षण किया जाता है । जब कि यह सिद्ध नहीं होता कि परिकलन मे कोई त्रुटि नही हुई है, तथा यदि दो प्रसामान्य समीकरणो म यथार्थ अंको का प्रतिस्थापन किया गया है तब या तो कोई भी नहीं या प्रति सन्तुलनात्मक गलतियाँ हुई हैं । जबकि $a = 1\ 045$ तथा $b = 1.677$, रेखा का समीकरण, जो हम इस विशेष वन म वृक्षो की ऊँचाई के विकास का आकलन करने के योग्य बनाता है जबकि उनका व्यास म विकास ज्ञात है, इस प्रकार वर्णित किया जा सकता है

$$Y_c = 1.045 + 1\ 677X.$$

सारणी 19.1

20 वन-वृक्षो की ऊँचाई और व्यास मे विकास के लिए आकलन समीकरण के परिकलन मे प्रयुक्त मूल्यों का निर्धारण

व्यास विकास मे दर्जा (लघुतम से दीर्घतम)	छाती की ऊँचाई पर व्यास विकास इचो मे X	ऊँचाई विकास फुटो मे Y	XY	X^2	Y^2
1	2 3	7	16 1	5 29	49
2	2 5	8	20 0	6 25	64
3	2 6	4	10 4	6 76	16
4	3 1	4	12 4	9 61	16
5	3 4	6	20 4	11 56	36
6	3 7	6	22 2	13 69	36
7	3 9	12	46 8	15 21	144
8	4 0	8	32 0	16 00	64
9	4 1	5	20 5	16 81	25
10	4 1	7	28 7	16 81	49
11	4 2	8	33 6	17 64	64
12	4 4	7	30 8	19.36	49
13	4 7	9	42 3	22 09	81
14	5 1	10	51 0	26 01	100
15	5 5	13	71 5	30 25	169
16	5 8	7	40 6	33 64	49
17	6 2	11	68 2	38 44	121
18	6 9	11	75 9	47 61	121
19	6 9	16	110 4	47 61	256
20	7 3	14	102 2	53 29	196
जोड	90 7	173	856 0	453 93	1,705

आँकड़े डोनाल्ड ब्रूस तथा एफ० एक्स शूमेचर, फारेस्ट मेन्स्यूरेशन, प्रथम सस्करण, मैक ग्रा-हिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क, 1935, पृष्ठ 124 से। प्रकाशक एव लेखकों के सौजन्य से।

अब कल्पना करें कि हम एक वृक्ष की ऊँचाई के विकास का आकलन करना चाहते हैं जिसके व्यास मे 5 5 इच की वृद्धि हुई है। समीकरण म प्रतिस्थापन करने से हमारे पास है

$$Y_c = 1\ 045 + (1\ 677)(5\,5),$$
$$= 10\ 268 \text{ फुट।}$$

आकलनों की विश्वसनीयता—फिर भी हम यह आशा नही करनी चाहिये कि जिन वृक्षो के व्यास मे 5 5 इच की वृद्धि हुई है उन सबकी ऊँचाई मे भी ठीक 10 268 फुट की वृद्धि होगी क्योंकि प्रकीर्ण आरेख के सब बिन्दु प्रासजित रेखा के ऊपर नही होते। अपितु, 10 268 को सकेत किये गए व्यास विकास के सभी वृक्षो की औसत ऊँचाई-

विकास के आकलन के रूप मे विचारना चाहिये। हमें इस मूल्य में उतने ही विचरण की आशा करनी चाहिये जितनी कि बारबारता बटन के अकगणितीय माध्य मे। अत वास्तव मे यह कल्पना करते हुए कि हम प्रतिनिधि प्रतिदर्श को ले रहे हैं यह खोज करना उचित है कि जिस त्रुटि की शृंखला म हम रुचि रखते हैं उसमें वृक्षों के कितने अनुपात के आने की आशा है।

ऐसा करने के लिए यह आवश्यक है कि हम उनके माध्य मे नही अपितु आकलन की रेखा से, Y मूल्यों के मानक विचलनों का परिकलन करें। चार्ट 19 6 पर आकलन रेखा से किसी Y मूल्य तक का ऊर्ध्वाधर अन्तर प्रेक्षित Y मूल्यो और आकलित Y मूल्य के बीच अन्तर का प्रतिनिधित्व करता है। X मूल्य या व्यास वृद्धि मे प्रत्येक माप के लिये आकलन समीकरण को हल करने से आकलित Y मूल्यो, Y_c, को प्राप्त किया जाता है। $Y - Y_c$ विचलन उस त्रुटि को प्रस्तुत करता है जो किसी एक विशेष उदाहरण में की गई होगी। उन विचलनों के सार माप को प्राप्त करने के लिये उनका वर्ग किया जा सकता है, उनको जोडा जा सकता है, N से भाग किया जा सकता है और वर्गमूल निकाला जा सकता है। यह आकलन की मानक त्रुटि है,[4] जिसके लिये $s_{Y.X}$ चिह्न है। इसके सूत्र को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$s_{Y.X} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y_c)^2}{N}}$$

इस उदाहरण म

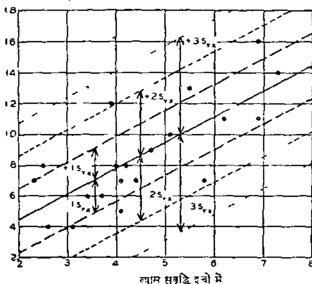
$$s_{Y.X} = \sqrt{\frac{88.75}{20}} = \sqrt{4.438} = 2.107 \text{ फुट।}$$

सारणी 19 2 के स्तम्भ 7 और 10 मे गणना दिखायी गयी है। साधारणतया माप का अधिक शीघ्रगामी ढग, जिसका वर्णन पृष्ठ 423 पर किया गया है, प्रयुक्त किया जाएगा। केवल माप के अर्थ की व्याख्या करने के लिये उपर्युक्त ढग का प्रयोग किया जाता है।

इस माप की व्याख्या बारबारता बटन के मानक विचलन के बिल्कुल समान विधि से की जा सकती है। यह आकलन रेखा के ऊपर और नीचे के परिसर के उस आकलन को प्रदान करता है जिसमे मदो की 68 27 प्रतिशत के आने की आशा की जा सकती है, यदि प्रकीर्ण प्रसामान्य है। व्यवहार मे हम प्राय इस माप को उस परिसर के रूप मे विचारते हैं जिसके भीतर लगभग $\frac{2}{3}$ मूल्य पाये जाएँगे। वर्तमान उदाहरण के लिये ($s_{Y.X} = 2.107$), आरेख मे प्रदर्शित तग सीमा $\pm s_{Y.X}$ के भीतर चार्ट 19 6 की लगभग $\frac{2}{3}$ मदें पाई जाने की आशा कर सकते हैं, लगभग 95 प्रतिशत (आदर्श रूप से 95.45) व्यापक सीमा के भीतर जिसमे $\pm 2s_{Y.X}$ सम्मिलित है, और $\pm 3s_{Y.X}$ के भीतर व्यावहारिक रूप मे सभी (सिद्धान्त रूप मे, मदो की बडी सख्या के साथ, 99.73 प्रतिशत केस)। बिन्दुओ की गिनती से पता चलता है कि आकलन की रेखा के $\pm s_{Y.X}$ के भीतर 20 मे से

4 यद्यपि इस माप को "आकलन की मानक त्रुटि" कहा जाता है तथापि यह अध्याय 24 तथा 25 म प्रयुक्त अर्थ में मानक त्रुटि नही है। आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के गिर्द Y मूल्यों का मानक विचलन $s_{Y.X}$ है।

13 मदें (65 प्रतिशत) प्राप्त होती हैं, रेखा के $\pm 2s_{Y\,X}$ के भीतर 19 मदें (95 प्रतिशत) दृष्टिगोचर होती है, और $\pm 3s_{Y\,X}$ के भीतर सभी 20 मदें सम्मिलित हैं। थोड़ा सा अन्तर इस कारण से हो सकता है कि प्रतिदर्श छोटा था और प्रकीर्ण आकलन समीकरण के चारों ओर प्रसामान्य रूप से वितरित नहीं था।



चार्ट 19 6. 20 वन वृक्षों के व्यास विकास तथा ऊँचाई विकास के लिये आकलन की ± 1, ± 2 तथा ± 3 मानक त्रुटियों के आकलन समीकरण एवं क्षेत्रों । सारणी 19 2 के आंकड़े ।

यद्यपि आकलन की मानक त्रुटि आकलन समीकरण के गिर्द सभी Y मूल्यों के प्रसार का माप है और इसलिय प्रसार का सामान्य या पूर्ण माप है, तथापि विशिष्ट आकलनों की विश्वसनीयता का संकेत करने के लिये प्राय इसका प्रयोग किया जाता है। यह माप किया गया था कि 5 5 इञ्च व्यास विकास वाले वृक्षों का औसत ऊँचाई विकास 10 268 फुट होना चाहिये। हम अब अपने कथन का विस्तार यह कहकर कर सकते हैं कि *यदि हमारा प्रतिदर्श प्रतिनिधि है तो इस प्रकार के लगभग ⅔ वृक्षों के ऊँचाई विकास मे 8 16 फुट* और 12 38 फुट के बीच अन्तर (10 268 ± 2 107) होना चाहिए, अथवा, कुछ अधिक विस्तृत परिसर का विचार करने पर 100 मे से लगभग 95, 6 05 फुट और 14 48 फुट के बीच मे होने चाहिएँ। किसी अन्य परिसर के भीतर आने वाले अनुपात को भी [E] परिशिष्ट ड के संकेत से तुरन्त परिकलित किया जा सकता है।

त्रुटि के परिसर से सम्बन्धित ये कथन, *निश्चितता से नहीं अपितु केवल आशा मे* सम्बद्ध हैं। हमने केवल 20 मदों का प्रयोग किया है और यद्यपि प्रतिदर्श सतर्कता से भी क्यों न चुना हो, 20 का अन्य प्रतिदर्श हमे ठीक वही परिणाम प्रदान नहीं करेगा जैसे कि हमने ऊपर प्राप्त किये थे। सम्भवत हम अनिश्चितता को और कम कर सकते हैं, अपने प्रतिदर्श का केवल आकार बढ़ा कर ही नहीं, अपितु व्यास विकास के अतिरिक्त किसी अन्य कारक के *साथ ऊँचाई विकास मे परिवर्तनों की तुलना द्वारा भी, उदाहरणार्थ—आयु,* क्योंकि जैसे वृक्ष पुराने होते चले जाते है, वैसे-वैसे उनके विकास की दर बदल सकती है। साथ ही मिट्टी मे

सारणी 19 2

20 वन वृक्षों के ऊँचाई विकास के लिये, जैसा कि उनके व्यास विकास द्वारा आकलित किया गया, कुल विचरण, व्याख्यायित विचरण और अवर्णित विचरण का परिकलन

व्यास विकास में दर्जा (निम्नतम से उच्चतम तक)	छाती भर ऊंचाई पर व्यास विकास इंचों में	ऊँचाई विकास फुटों में		विचरण			वर्गित विचरण		
	X	Y	Y_c	$y = Y-\bar{Y}$	$y_c = Y_c-\bar{Y}$	$y_e = Y-Y_c$	$y^2 = (Y-\bar{Y})^2$	$y_c^2 = (Y_c-\bar{Y})$	$y_e^2 = (Y-Y_c)^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	2 3	7	4 902	−1 65	− 3 748	2 098	2 7225	14 0475	4.4016
2	2 5	8	5 238	−0 65	−3.412	2 762	0 4225	11 6417	7 6286
3	2.6	4	5 405	−4 65	−3 245	−1 405	21 6225	10 5300	1.9740
4	3 1	4	6 244	−4 65	−2 406	−2.244	21 6225	5 7888	5 0355
5	3.4	6	6.747	−2 65	−1 903	−0 747	7 0225	3.6214	0 5:80
6	3 7	6	7.250	−2 65	−1 400	−1 250	7 0225	1 9600	1 5625
7	3 9	12	7.585	3 35	−1 065	4 415	11 2225	1.1342	19 492.
8	4.0	8	7.753	−0 65	−0 897	0 247	0 4225	0 8046	0.0610
9	4 1	5	7 921	−3 65	−0.729	−2 921	13 3225	0 5314	8.5322
10	4.1	7	7.921	−1.65	−0 729	−0.921	2 7275	0.5314	0.8482
11	4.2	8	8.088	−0 65	−0 562	−0 081	0 4225	0 3147	0 0077
12	4 4	7	8.424	−1 65	−0 226	−1 424	2 7225	0 0511	2 0278
13	4 7	9	8.927	0 35	0 277	0 073	0 1225	0 0767	0 0053
14	5.1	10	9.598	1.35	0 948	0 442	1.8225	0 8987	0.1616
15	5 5	13	10 268	4.35	1 618	2.732	18.9225	2 6179	7.4638
16	5 8	7	10 772	−1 65	2 122	−3.772	2 7225	4 5029	14 2280
17	6 2	11	11.442	2 35	2 792	−0 442	5.5225	7.7953	0.1954
18	6 9	11	12 616	2.35	3 966	−1.616	5 5225	15.7292	2.6115
19	6.9	16	12 616	7 35	3 966	3 384	54 0225	15 7292	11.4515
20	7.3	14	13.287	5 35	4 637	0 713	28 6225	21.5018	0.5084
योग..	90 7	173	173 004	0	0 004	−0 004	208 5500	119 8085	88.7548

पौधे के भोजन का गुण और मात्रा और वृक्षों की भीड़ के अंश का विचार किया जा सकता है। यदि व्यास विकास के अतिरिक्त कई अन्य साधनों पर भी विचार किया जाता (यह अध्याय 21 में वर्णित अनेकधा सहसम्बन्ध है) तब भी कुछ अवर्णित विचरण होते और इसलिए तब भी कुछ अनिश्चितता होती।

सहसम्बन्ध गुणांक और व्याख्यात घटबढ़—आकलन समीकरण और आकलन की मानक त्रुटि से निकट से सम्बन्धित दूसरा माप है सहसम्बन्ध r का गुणांक। आकलन समीकरण $Y_e = a + bX$ एक इस प्रकार का कथन है जिसमें आश्रित चर स्वतन्त्र चर में विचरणों के साथ साथ बदलता है। $s_{Y.X}$ आश्रित चर में प्रसार की मात्रा का संकेतक है जिसको हम अपनी आकलन रेखा के द्वारा गणना करने में असफल रहे हैं परन्तु व्यास विकास तथा ऊँचाई विकास फुटों में, के आँकड़ों की अवस्था में इसे मूल आँकड़ों के रूप में वर्णित किया गया है। जब दो चरों के बीच सम्बन्ध के अंश का वर्णन कर रहे हों तो उन संक्षिप्त संख्यात्मक पदों का प्रयोग करने के योग्य होना सुविधाजनक है जो मूल आकड़ों की इकाइयों से स्वतन्त्र हैं और यद्यपि हम आकलन की रेखा के समीकरण या $s_{Y.X}$ में से किसी एक को भी नहीं जानते तो भी दो श्रेणियों के बीच सम्बन्ध के अंश का वर्णन करना सुविधाजनक है निश्चितता के लिए जानकारी को इस प्रकार से दबाने से कुछ हानि होती है क्योंकि यह एक चर से दूसरे के मूल्य का आकलन करने के योग्य नहीं बनाती अथवा निरपेक्ष विस्तार में किसी भी आकलन की परिशुद्धता के अंश के बारे में जिसे हम कर रहे हैं, नहीं बताती। परन्तु कुछ लाभ भी होता है क्योंकि विभिन्न सहसम्बन्धों को विषय सामग्री से स्वतन्त्र एक गुणांक की किसी अन्य गुणांक से तुलना की जा सकती है। जैसा कि वर्णन किया जा चुका है, सहसम्बन्ध का गुणांक एक ऐसी संख्या है जो कि शून्य में से होकर $+1$ से -1 तक बदलती है। यह चिह्न संकेत करता है कि सम्बन्ध की रेखा का ढाल धनात्मक है या ऋणात्मक, जबकि गुणांक की मात्रा सम्बन्ध के अंश की द्योतक है। जब चरों के मध्य बिल्कुल कोई सम्बन्ध नहीं होता तो r शून्य होता है।

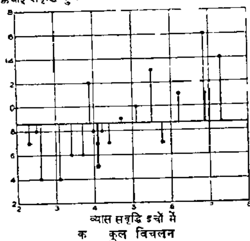
निम्नलिखित ढंग से सहसम्बन्ध के गुणांक के अर्थ की स्पष्ट जानकारी दी जाती है। चरता का एक माप जिसे विचरण या कुल विचरण कहा जाता है Y मूल्यों के उनके माध्य से विचलनों के वर्गों का योग है, $\Sigma(Y-\bar{Y})^2$। इस कुल विचरण को दो भागों में बाँटा जा सकता है (1) वह जिसका वर्णन हमारी सम्बन्ध की रेखा द्वारा किया जा चुका है तथा (2) वह जिसका वर्णन करने में हम असफल रहे हैं। हमारे बटन के वृक्षों के ऊँचाई विकास में कुल विचरण 208.55 है, जैसा कि सारणी 19.2 के स्तम्भ 8 की गणनाओं में दिखाया गया है। विचरण की मात्रा जिसका वर्णन हमने अपनी सम्बन्ध रेखा द्वारा किया है आकलित Y मूल्यों का उनके माध्य से विचलनों के वर्गों का जोड़ है (आकलित Y मूल्यों का माध्य भी है, जैसा कि सारणी 19.2 के स्तम्भ 3 और 4 के योगों को N के द्वारा भाग करने से देखा जा सकता है), अर्थात $\Sigma(Y_e-\bar{Y})^2$।[5] व्याख्यात विचरण को सारणी 19.2 के स्तम्भ 9 में 119.81 दिखाया गया है। अव्याख्यात विचरण, Y मूल्यों के, उनके आकलित मूल्यों से विचलनों के वर्गों का जोड़ है, $\Sigma(Y-Y_e)^2$। सारणी 19.2 के स्तम्भ 10 में अव्याख्यात विचरण को 88.75 दिखाया गया है।

आओ हम अपनी खोज का सार बनायें

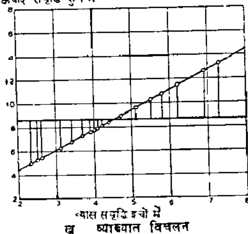
विचरण	संकेत चिह्न तथा सूत्र	विचरण की मात्रा*	कुल विचरण का प्रतिशत
अव्याख्यात	$\Sigma y_u^2 = \Sigma(Y-Y_e)^2$	88.75	42.6
व्याख्यात	$\Sigma y_e^2 = \Sigma(Y_e-\bar{Y})^2$	119.81	57.4
योग	$\Sigma y^2 = \Sigma(Y-\bar{Y})^2$	208.55	100.0

* सारणी 19.2 में पूर्णांकन के कारण दो अंतिम अंक में कुछ बढ़ जाते हैं। बाद में यह देखा जायगा कि $\Sigma y_u^2 = 88.74$

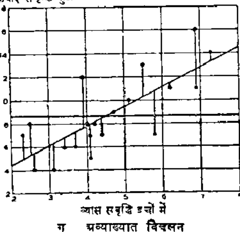
5 देखें परिशिष्ट ख, परिच्छेद 19.1, समीकरण 2।



क कुल विचलन



ख व्याख्यात विचलन



ग अव्याख्यात विचलन

यह स्पष्ट है कि हमने आश्रित चर मे 57 4 प्रतिशत विचरण की व्याख्या कर ली है। एक के अनुपात के रूप मे अभिव्यक्त, 0 574, *निर्धारण का गुणाक* r^2 है। सहसम्बन्ध का गुणाक r, निर्धारण के गुणाक का वर्गमूल है और इसका मूल्य $+0\ 758$ है (चिह्न वही है जो b का है) और इसे आश्रित चर मे कुल विचरण के अनुपात के वर्गमूल के रूप म सोचा जा सकता है जिसकी व्याख्या आकलन समीकरण के प्रयोग द्वारा की जा चुकी है। जब तक कि $r^2 = 0$ या 1 0 नही है, जबकि $r = r^2$, तब तक r, r^2 से अवश्य बडा होगा, निर्धारण के गुणाक और सहसम्बन्ध के गुणाक की व्याख्या करने की उपर्युक्त विधि का एक प्रमुख लाभ यह है कि धारणा अरेखिक तथा अनेकधा गुणाको का वर्णन करने का भी काम देगी, जिनका वर्णन अध्याय 20 और 21 मे किया गया है।

कुछ पाठको के लिए यह सहायक हो सकता है कि वे सारणी 19 2 की जानकारी की सजीव कल्पना करने के योग्य हो। चार्ट 19 7 ऊँचाई और व्यास विकास के आँकडो के सम्बन्ध मे प्रदर्शित करता है

क वास्तविक Y मूल्यो के उनके माध्य से विचलन।

ख परिकलित Y मूल्यो के अपने माध्य से विचलन। (पुन: देखिए कि $\bar{Y}_e = \bar{Y}$।)

चार्ट 19 7 जैसा कि उनके व्यास विकास से व्याख्यात है, 20 वन वृक्षो के ऊँचाई विकास के लिए कुल विचलन, व्याख्यात विचलन, और अव्याख्यात विचलन। सारणी 19 2 के आँकड।

(ग) वास्तविक Y मूल्यों के परिकलित Y मूल्यों से विचलन।

विचरण के जिस अनुपात की व्याख्या की गई है, वह 0 574 था। जिस अनुपात की व्याख्या करने में हम असफल रहे हैं, वह 0 426 था। यह k^2 है जो अनिधारण[6] का गुणांक है। ध्यान दें कि सभी परिस्थितियों में $r^2 + k^2 = 1 0$। यह भी ध्यान दें कि r^2 के लिए अधिकतम सम्भव मूल्य 1 0 है (जब r भी 1 0 है), यह तभी होगा जबकि प्रकीर्ण आरेख के सभी बिन्दु आकलन रेखा पर हों, जैसा कि चार्ट 19 2 में था। यदि किसी विचरण की व्याख्या न की जाए तो r^2 (और r) शून्य होगा क्योंकि आकलन समीकरण Y से मिल जाएगा।

जैसा कि सारणी 19 2 या खोजा के सार में देखा जा सकता है कुल विचरण व्याख्यात विचरण तथा अव्याख्यात विचरण के जोड़ के बराबर है[7]

$$\Sigma y^2 = \Sigma y_c^2 + \Sigma y_s^2,$$

$$208\ 55 = 119\ 81 + 88\ 75$$

समीकरण को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$\Sigma y_c^2 = \Sigma y^2 - \Sigma y_s^2$$

जैसा कि पूर्व अनुच्छेदों में परिकलित किया गया,

$$r^2 = \frac{\Sigma y_c^2}{\Sigma y^2},$$

किन्तु हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं[8]

$$r^2 = \frac{\Sigma y^2 - \Sigma y_s^2}{\Sigma y^2} = 1 - \frac{\Sigma y_s^2}{\Sigma y^2}$$

$$= 1 - \frac{88\ 75}{208\ 55} = 1 - 0\ 426 = 0\ 574$$

वही मूल्य है जो पहले प्राप्त किया गया।

पृष्ठ 418 पर यह प्रासंगिक वर्णन किया गया था कि r का चिह्न वही है जो कि आकलन समीकरण में b का चिह्न है। जब तक कि सहसम्बन्ध बहुत नीचा न हो तब r के चिह्न का निर्धारण प्रकीर्ण आरेख के निरीक्षण से भी किया जा सकता है। वे विधियाँ जिनका वर्णन पहले r^2 या r के मूल्य का निर्धारण करने के लिए किया गया था गुणांकों का अर्थ[9] समझाने के लिए प्रस्तुत की गयी थीं। वे इतनी अधिक परिश्रम

---

6 जबकि $r^2 + k^2 = 1 0$, $r + k > \pm 1 0$ जब तक कि $r = \pm 1 0$ या 0 न हो। k को अन्य सम्बन्धन का गुणांक कहा जाता है।

7 बीजगणितीय प्रमाण के लिए देखें परिशिष्ट घ, परिच्छेद 19 1, समीकरण 7।

8 वर्गमूल लेने से सहसम्बन्ध गुणांक प्राप्त होता है

$$r = \sqrt{1 - \frac{\Sigma y_s^2}{\Sigma y^2}} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma y_s^2 - N}{\Sigma y^2 - N}} = \sqrt{1 - \frac{s_{y\,x}^2}{s_y^2}}$$

इस अन्तिम व्यंजक की ओर इस अध्याय में बाद में संकेत किया जाएगा।

9 सहसम्बन्ध गुणांक का वर्णन इस ढंग से भी किया जा सकता है यदि दो चरों X और Y को ऐसा सोचा जाए कि वे किसी मद में विद्यमान होने की बराबर सम्भावना वाले तत्वों से मिलकर बने हैं (जिनमें से कुछ X और Y में समान हैं, परन्तु जिनमें से कुछ एक में हैं और दूसरे में नहीं), तो समस्त

माध्य हैं कि उनको दिन प्रतिदिन के परिकलना के प्रयोग म नही लाया जा सकता। गणना के उद्देश्यो क लिए अधिक उपयोगी दूसरे सूत्रा का वणन इस अध्याय म आगे किया जायेगा।

उत्पाद घूर्ण सूत्र—अनक विभिन्न दृष्टिकोणा से सहसम्बन्ध के गुणाक पर पहुँचा जा सकता है। जैसा कि पहले देख चुके हैं, पहल दिया गया विवरण विशेष रूप से ज्ञानवर्द्धक है क्योंकि आवश्यक रूप से उसी विचार का प्रयोग वक्र-रेखीय तथा अनेकधा सहसम्बन्ध म किया जा सकता है। परन्तु निम्न वणन सरल भी है और कुछ उद्देश्या के लिए अत्यन्त उपयोगी भी।

आकलन समीकरण म, b हम उस प्रमामान्य मात्रा के विषय मे बताता है जिसमे आश्रित चर स्वतन्त्र चर म एक इकाई के परिवर्तन क साथ बदलता है। यह आकलन समीकरण पर किसी बिन्दु का $\frac{y}{x}$ अनुपात या ढाल है, जबकि y और x को श्रेणी के माध्य से विचलनो क रूप मे परिभाषित किया है ताकि आकलन समीकरण $y_c = bx$, बन जाता है और b का $\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ के मूल्य की खोज[10] के द्वारा प्राप्त किया जाता है। यद्यपि आकलन के उद्देश्यो के लिय यह स्थिर b आवश्यक है, तो भी यह हम चरो के मध्य सम्बन्ध की मात्रा को नही बता सकता क्योंकि वे प्रत्यक्ष रूप से एक दूसरे से तुलना योग्य नही हैं। X श्रेणी और Y श्रेणी का समान प्रसार नहीं है, और वे भिन्न भौतिक इकाइयो म भी हो सकती हैं। तथापि अनुपात $\frac{y}{x}$ की मदो मे तुलनात्मकता को, अंश को s_Y से तथा हर को s_X से विभक्त करके या सारे व्यजक को $\frac{s_Y}{s_X}$ से विभक्त करके प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार निम्नलिखित ढग से b को r म बदल दिया जाता है[11]

$$r = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \div \frac{s_Y}{s_X} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \cdot \frac{s_X}{s_Y} = \frac{(\Sigma xy)(s_X)}{N s_X^2 s_Y} = \frac{\Sigma xy}{N s_X s_Y} = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

जनसख्या क निर्धारण का गुणाक समान तत्त्वो क दो अनुपातो का गुणनफल है, और सहसम्बन्ध का गुणाक उनका ज्यामितीय माध्य है। आओ हम 5 मडलक (तत्त्व) लें, जिनके एक तरफ निम्नलिखित अंकित हैं (दूसरी तरफ कोरी है)



यदि हम 5 मडलकों को आकाश म फेंकें, जब वे गिरत हैं तो 0 से 4 तक X की कोई भी सख्या दृष्टिगोचर हो सकती है तथा Y की 0 से 3 तक। जब भी X प्रस्तुत होता है तो उसी मडलक पर Y के प्रस्तुत होने के अवसर 4 मे से 2 हैं, इसी प्रकार जब Y दृष्टिगोचर होता है तो उसी मडलक पर X के प्रस्तुत होने के 3 म से 2 अवसर हैं। यदि हम इन मडलको को आकाश मे कई बार फेंकें, और X तथा Y की प्रत्येक बार गणना कर तो फेंकने से प्रकट होन वाली X की सख्या मे और Y की सख्या मे सहसम्बन्ध होगा। r^2 का अत्यधिक सम्भव मूल्य है $\frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = 0.333$, जबकि r का अत्यधिक सभव मूल्य $\sqrt{\frac{2}{4} \times \frac{2}{3}} = +0.58$ है। फेंकन का जितनी अधिक सख्या होगी उतनी हा अधिक r की इस मूल्य तक पहुँचने की प्रवृत्ति होगी।

10 देख परिशिष्ट ध, परिच्छेद 19 2।

11 उसी परिणाम को प्राप्त करने का दूसरा ढग है कि r को b की विशिष्ट अवस्था के रूप मे समझो, अर्थात् जब मौलिक आँकडो को, उनके अपने मानक विचलनो का इकाइयों मे अभिव्यक्त करके,

अंतिम दो रूपो म से किसी एक में अनुपात को सहसम्बन्ध के गुणांक का गुणनफल घूर्ण रूप कहा जाता है। इस प्रकार यह देखा जा सकता है कि जब अंश और हर दोनों मानक विचलन इकाइयो मे हो तो r आकलन समीकरण का केवल ढाल मात्र है।

अब क्योंकि

$$r = b \frac{s_X}{s_Y}$$

$$b = r\frac{s_Y}{s_X}$$

और

$$y = r\frac{s_Y}{s_X}x$$

इस रूप मे आकलन समीकरण का प्रयोग इस अध्याय मे बाद म किया जाएगा।[12]

परिकलन की व्यावहारिक विधियाँ

सहसम्बन्ध के सिद्धान्त का जितना सम्भव है उतना संक्षेप से वर्णन करने के लिये पूर्व व्याख्या म युग्मित मदो की सीमित संख्या ली गई थी। तथापि अधिकतर व्याव

तुलनायोग्य बना दिया गया है। इस प्रकार

$$\frac{\Sigma xy}{\Sigma x} \text{ हो जाता है } \frac{\Sigma\left(\frac{x}{s_X}\right)\left(\frac{y}{s_Y}\right)}{\Sigma\left(\frac{x}{s_X}\right)} = \frac{\Sigma xy}{s_X s_Y} \frac{s_x^2}{\Sigma x} = \frac{\Sigma xy}{s_X s_Y} \frac{s_X}{Ns^2_X} = \frac{\Sigma xy}{N s_X s_Y}$$

सूत्र का प्राय $r = \frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{x}{s_X}\frac{y}{s_Y}\right)$ के रूप मे वर्णन किया जाता है। विशेषण *गुणनफलघूर्ण* का कारण उस समय स्पष्ट हो जाता है जब यह अनुभव कर लिया जाता है कि शब्द घूर्ण माध्य से विचलनों की कुछ शक्ति की औसत का संकेत करता है। इस प्रकार r चरों के गुणनफल का प्रथम घूर्ण है जबकि प्रत्येक का वर्णन उसके अपने मानक विचलन के सम्बन्ध में पहले किया जा चुका है। इस प्रमाण के लिये कि

$$\frac{\Sigma y_c^2}{\Sigma y^2} = \frac{(\Sigma xy)}{\Sigma x \Sigma y}$$

देख परिशिष्ट ध परिच्छेद 19 3।

12 आकलन समीकरण $X_c = a + bY$ जोकि वर्गित क्षैतिज विचलनो को कम से कम करता है का कोई पूर्व उल्लेख नहीं किया गया है। इस समीकरण के लिए प्रसामान्य समीकरण हैं

$$\text{I} \quad \Sigma X = Na + b\,\Sigma y,$$
$$\text{II} \quad \Sigma XY = a\,\Sigma Y + b\,\Sigma Y^2$$

इस रूप म $x_c = by$ $b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$ तथा $x_c = r\frac{s_X}{s_Y}y$

इस पुस्तक के रेखिक सहसम्बन्ध का वर्णन करने वाले भागो म आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ से सम्बन्धित समस्याओ पर हम पूर्ण ध्यान देंगे। कुछ ऐसी स्थितियाँ है जिनमे आकलन समीकरण $X_c = a + bY$ उचित है और अन्य कुछ ऐसी स्थितियाँ हैं जिनम इनम से किसी से भी भिन्न आकलन समीकरणों की आवश्यकता रहती है

हारिक समस्याओं में हमारे पास मदों के युग्मों की बड़ी संख्या होती है। अतः व्यवहार में समय की बचत के लिये पूर्व विधियों में मामूली सा सुधार करना उचित है।

सहसम्बन्ध समस्या में प्रारम्भिक पग के रूप में एक प्रकीर्ण आरेख अवश्यमेव खींचा जाना चाहिये। यदि सम्बन्ध के अंश का केवल सन्निकट विचार चाहिये तो प्रकीर्ण आरेख का निरीक्षण सन्तोषजनक परिणाम उपस्थित करता है। सहसम्बन्ध करने में थोड़े से अनुभव के पश्चात्, निरीक्षण द्वारा, प्रकीर्ण आरेख से, सांख्यिकी-शास्त्री r के आश्चर्यजनक निकट आकलन करने के योग्य हो सकता है, और ये r के परिकलनों में भारी त्रुटियों को खोजने के लिये उसकी पर्याप्त सहायता कर सकते हैं। प्रकीर्ण आरेख का प्रयोग अधिकतर अन्वेषणात्मक उद्देश्यों के लिए किया जा सकता है और समय-समय पर सहसम्बन्ध के गुणांक का निर्धारण करने की आवश्यकता को समाप्त करने के लिए इससे पर्याप्त जानकारी प्राप्त हो सकती है

हम पहले ही देख चुके हैं कि

$$b=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}.$$

क्योंकि प्रथम प्रसामान्य समीकरण है

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X,$$

$$\frac{\Sigma Y}{N} = a + b\frac{\Sigma X}{N}, \text{ तथा}$$

$$a=\overline{Y}-b\overline{X}$$

इन व्यंजकों से, दो सामान्य समीकरणों का इकट्ठा हल किए बिना a और b को प्राप्त किया जा सकता है। तथापि हमें परिकलन करना चाहिये [13]

$$\bar{X}=\frac{90.7}{20}=4\ 535.\quad \bar{Y}=\frac{173}{20}=8.65.$$

$$\Sigma xy = \Sigma XY - \bar{X}\Sigma Y,$$

$$=856\ 0-(4\ 535)(173)=71\ 445.$$

$$\Sigma x^2 = \Sigma X^2 - \bar{X}\Sigma X,$$

$$=453\ 93-(4\ 535)(90.7)=42\ 6055.$$

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \bar{Y}\Sigma Y,$$

$$=1{,}705-(8\ 65)(173)=208\ 55$$

अन्तिम जोड़ की बाद में आवश्यकता पड़ेगी।

तब हम प्राप्त करते हैं

$$b=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}=\frac{71\ 445}{42\ 6055}=1\ 676896,$$

$$a=\bar{Y}-b\bar{X}=8\ 65-(1\ 676896)(4\ 535),$$

$$=1.045277,$$

निम्न आकलन समीकरण प्रदान करते हुए

$$Y_c = 1\ 045+1.677X.$$

13. योगों के व्यंजकों के प्रमाण के लिये अध्याय 21 में टिप्पणी 3 देखें।

तब हम व्यजक[14]

$$\Sigma Y^2_c = a\Sigma Y + b\Sigma XY,$$
$$= (1\ 045277)(173) + (1\ 676896)(856\ 0),$$
$$= 1{,}616\ 26$$

के प्रयोग से ΣY^2_c का परिकलन करते हैं,

और Σy^2_s को निम्न से

$$\Sigma y^2_s = \Sigma Y^2 - \Sigma Y^2_c$$
$$= 1{,}705 \quad 1\ 616\ 26 = 88\ 74$$

हम या तो परिकलन कर सकते हैं

$$\Sigma y^2_c = a\Sigma Y + b\Sigma XY - \overline{Y}\,\Sigma Y,$$
$$= (1\ 045277)(173) + (1\ 676896)(856\ 0) - (8\ 65)(173)$$
$$= 119\ 81,$$

या

$$\Sigma y^2_c = b\Sigma xy,$$
$$= (1\ 676896)(71\ \ 445) = 119\ 81,$$

और Σy^2_s निम्न विकल्प व्यजक से प्राप्त कर सकते हैं

$$\Sigma y^2_s = \Sigma y^2 - \Sigma y^2_c$$
$$= 208\ 55 - 119\ 81 = 88\ 74$$

$s^2_{Y\ X}$ को प्राप्त करने के लिए सुविधाजनक सूत्र है

$$s^2_{Y\ X} = \frac{\Sigma y^2_s}{N} = \frac{88\ 74}{20} = 4\ 437,$$

तथा

$$s_{Y\ X} = 2.106 \text{ फुट ।}$$

तब सहसम्बन्ध का गुणाक निम्न प्रायिक व्यजक से प्राप्त किया जाता है

$$r^2 = \frac{\Sigma y^2_c}{\Sigma y^2} = \frac{119\ 81}{208\ 55} = 0\ 574,$$

तथा

$$r = +0\ 758$$

---

14 यह प्रमाण कि $\Sigma Y^2_c = a\Sigma y + b\Sigma XY$, परिशिष्ट घ, परिच्छेद 19 1, समीकरण 3 म दिया गया है। यह प्रमाण कि $\Sigma y^2_s = \Sigma Y^2 - \Sigma Y^2_c$ उसी परिच्छेद के समीकरण 5 म दिया गया है। $\Sigma y^2_c = b\Sigma xy$, के प्रमाण के लिये देखें समीकरण 6 । $\Sigma y^2_s = \Sigma y^2 - \Sigma y^2_c$, के प्रमाण के लिए देखें समीकरण 7 ।

यदि प्राथमिकता दी जाए तो पादटिप्पणी 8 मे प्रदत्त व्यजको मे से एक के प्रयोग द्वारा r को प्राप्त किया जा सकता है।

यदि r के मूल्य की ही आवश्यकता हो, तो जिस सूत्र मे a या b के मूल्य की आवश्यकता नही पडती उस का प्रयोग करना अत्यधिक शीघ्रगामी है। यह पहले देखा गया है कि

$$r=\frac{\Sigma xy}{Ns_X s_Y}$$

परन्तु x के लिए $X-\bar{X}$ का और y के लिए $Y-\bar{Y}$ का, प्रतिस्थापन करके तथा सरलीकरण करके, यह बन जाता है[15]

$$r=\frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2]}}$$

सारणी 19 1 से आवश्यक मूल्यो का प्रवेश प्रदान करता है.

$$r=\frac{(20)(856\ 0)-(90\ 7)(173)}{\sqrt{[(20)(453\ 93)-(90\ 7)^2][(20)(1,705)-(173)^2]}},$$

$$=+0\ 758$$

ध्यान दे कि यह व्यजक स्वत r के लिए चिह्न प्रदान करता है।

कुछ चेतावनियाँ

सहसम्बन्ध तथा कारणत्व—सहसम्बन्ध के गुणाक को कोई ऐसी वस्तु नही समझना चाहिए जो कारणत्व को प्रमाणित करती है अपितु केवल सह-विचरण के माप के रूप मे समझना चाहिए। वास्तव मे, निम्नलिखित परिस्थितियों मे से कोई एक प्रचलित हो सकती है

1 *किसी एक चर मे विचरण दूसरे चर मे विचरण के कारण (प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष) होता है।* जिस चर को दूसरे मे विचरणो का कारण समझा जाता है उसे प्राय स्वतत्र चर के रूप मे ग्रहण किया जाता है तथा X अक्षाश पर आलेखित किया जाता है। इस प्रकार, क्योकि स्टॉक पर लाभाशो के विषय मे सोचा जाता है कि वे स्टॉक कीमतो को प्रभावित करते हैं, इसके विपरीत नही, तो एक लाभाश "VV" श्रेणी को स्वतन्त्र चर बना लिया जाएगा। यह एक तर्कसगत प्रक्रिया है जो साख्यिकी शास्त्री के इस विश्वास का निर्धारण करती है कि दो चरो के बीच कारणात्मक सम्बन्ध है और उसके इस विश्वास का भी कि कारण क्या है और प्रभाव क्या है। तब यह स्पष्ट होना चाहिए कि सहसम्बन्ध

---

15 इस व्यजक की प्राप्ति के लिये देखें परिशिष्ट ध, परिच्छेद 19 4। उपर्युक्त व्यजक के द्वारा r को प्राप्त करके, वर्णित आकडो के सहसम्बन्ध के साथ प्रयुक्त सूत्रो से $s_{Y\ X}$ तथा आकलन समीकरण को प्राप्त करना सम्भव है

$$Y_c-\bar{Y}=r\frac{s_Y}{s_X}(X-\bar{X})$$

था

$$s_{Y\ X}=s_Y\sqrt{1-r^2}$$

का गुणांक स्वयमेव यह नहीं कहता कि X Y का कारण है न ही यह कहता है कि Y X का कारण है।

2 दो चरों का सह विचरण एक ही ढंग से या विपरीत ढंगों से प्रत्येक चर पर प्रभाव डालने वाले समान कारण अथवा कारणों से हो सकता है। यदि यह पाया जाए कि प्रति हजार व्यक्ति मोटर गाडी दुघटनाओं और प्रति व्यक्ति फेडरल आय कर अदायगियों में सहसम्बन्ध है तो हमें शीघ्रता से इस परिणाम पर नहीं पहुँच जाना चाहिए कि एक मोटर गाडी दुघटना एक व्यक्ति के आय कर देने में सहायक कर देती है यह भी आवश्यक रूप से सत्य नहीं है कि कर का अधिक अदायगियाँ करना एक व्यक्ति को सावधानी से कार चलाने के लिए अयोग्य बना देता है। तो भी यह पूर्ण सम्भव है कि उन राज्यों में जहा औसत आय ऊची है प्रति व्यक्ति आय कर ऊँचा होगा अधिकतर व्यक्तियों के पास मोटर गाडियाँ होगी और दुघटनाएं बडी सख्या में होगी।

3 दो चरों म कारणात्मक सम्बन्ध अयोयाश्रित सम्बन्धों का परिणाम हो सकता है। इस प्रकार वस्तु की ऊँची कीमत उसके उत्पादन को प्रेरणा देती है परन्तु बढा हुआ उत्पादन वस्तु का लागत को बढा या घटा सकता है जो समय का प्रक्षणाधीन अवधि पर और इस बात पर निभर करता है कि यह वधमान लागत उद्योग है या ह्रासमान लागत उद्योग और लागत में परिवतन के द्वारा कीमत प्रभावित होगी।

4 सहसम्बन्ध सयोगवश हो सकता है। यद्यपि ब्रह्माण्ड मे जिसस कि प्रतिदश लिया गया है चरो म किसी प्रकार का कोई भी सम्ब ध न हो तो भी यह हो सकता है कि सहसम्बन्ध की उचित मात्रा प्रदान करने के लिए कवल सयागवश चुन गए चर युग्मो में से पर्याप्त साथ साथ बदल। इस प्रकार यह पाया जा सकता है कि पुरुष विद्यार्थियों के प्रदत्त समूह म उनके जूतो के आकार तथा उनका जेबो की धनराशि म धनात्मक सह सम्बन्ध था। तथापि यह इस प्रकार क्यों है इस सम्बन्ध म सिद्धान्त का विकास करना कठिन है और सभावना यह है कि अ य प्रतिदश एकदम भिन्न परिणाम प्रस्तुत करेगा। r का विश्वसनीयता के माप की ओर अध्याय 26 म सक्षेप म ध्यान दिया जाएगा।

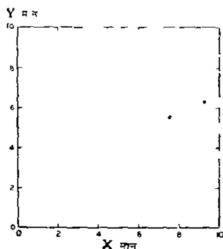
विषमागता[16] प्रक्षण आकडो म बारंबारता बटन की विषमता का प्राय द्विबहुलकता द्वारा या कुछ उन मदो की विद्यमानता द्वारा जा कि अन्य मदा से सयोगवश बहुत असगत है ज्ञात किया जा सकता है। प्रकीर्ण आरेख पर इस प्रकार का विषमता दो या दो से अधिक समूहो मे बिन्दुओ के इकट्ठा होने का या चाट पर एक या अधिक बिन्दुओ का दूसरो स बहुत पर होने का प्रवृत्ति का प्रदर्शित कर सकता। जहाँ विषमता का प्रक्षण किया जाता है वहाँ यह श्रेष्ठतर है कि आकडा का वर्गीकरण किसी तकसगत आधार पर किया जाए और प्रत्यक समूह का अलग अलग सहसम्बन्ध स्थापित किया जाए। सहसम्बन्ध करने स पूव कारणो के विभिन्न समुच्चय स स्पष्ट शासित पृथक मदो का निष्कासन कर

---

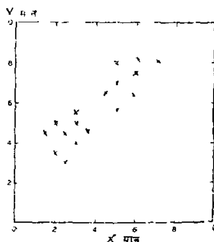
16 निम्नलिखित गद्यांशों म विषमागता का वणन करने वाली सामग्री एफ० ई० क्राक्स्टन द्वारा लिखित एलिमेन्टरी स्टैटिस्टिक्स विद एप्लीकेशन्स इन मेडिसिन एण्ड दि बायलॉजिकल साइन्सिस डोवर प्रकाशन इन्कार्पोरेटिड न्यूयार्क 1959, अध्याय 6 म इसी विषय के विवरण पर आधारित है। चार्ट 19 8 19 9 और 19 10 भी इस पुस्तक म से हैं।

देना चाहिए। यदि इस प्रकार के सामान्य ज्ञान के पग नही उठाए जाते तो न केवल सह-सम्बन्ध की मात्रा के सम्बन्ध मे अपितु कई बार इसके चिह्न के बारे मे भी, भ्रामक प्रभाव पड सकता है।

चार्ट 19 8क एक चित्रित प्रकीर्ण आरेख है जो निम्न सहसम्बन्ध को दिखाता है। चार्ट 19 8ख मे दो अवयव समूहो को विभिन्न चिह्नो द्वारा दिखाया गया है, और यह दिखाई देता है कि दो पर्याप्त ऊँचे सहसम्बन्ध विद्यमान है। यह भी सम्भव है कि दो विभिन्न समूहो को, जिनमे से प्रत्येक बहुत कम या कोई सहसम्बन्ध नही रखता, प्रकीर्ण आरेख पर इस प्रकार से आरेखित किया जा सकता है कि यदि वे मिला दिए जाते तो सामान्य धनात्मक (या ऋणात्मक) सहसम्बन्ध विद्यमान दिखाई देता।



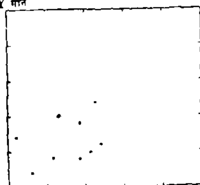
चार्ट 19.8क निम्न सहसम्बन्ध को दिखाने वाला चित्रित प्रकीर्ण आरेख दो असमान समूह जो पहचाने नहीं जा सके। एफ० ई० क्राक्स्टन द्वारा लिखित एलिमेन्टरी स्टैटिस्टिक्स विद ऐप्लिकेशन्स इन मेडिसिन एन्ड दि बायलॉजिकल साइन्सिस, डावर प्रकाशन, इन्कार्पोरेटिड न्यूयार्क, 1959, पृ० 128 से।



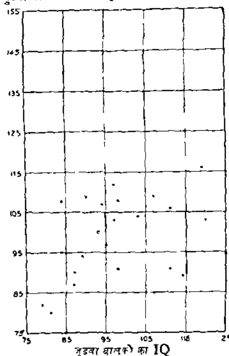
चार्ट 19 8ख वही प्रकीर्ण आरेख जैसा कि चार्ट 19 8क मे है, परन्तु जो बिन्दुओं तथा गुणा चिह्नो द्वारा प्रदर्शित दो असमान समूहो मे से प्रत्येक के लिए पर्याप्त उच्च सहसम्बन्ध का सकेत करता है। उसी स्रोत से जिसमे चार्ट 19 8क है।

विषमागता के एक अन्य प्रकार को चार्ट 19 9 मे दिखाया गया है। चार्ट 19 9 मे नौ इकट्ठे बिन्दु हैं जोकि निम्न सहसम्बन्ध, $r = +0\ 32$ को दिखाते हैं और एक बिन्दु दूसरो से बहुत परे है। सब 10 बिन्दुओ के लिए $r = +0\ 79$। इस प्रकार के एकमेव प्रेक्षण की विद्यमानता, जो लगभग निश्चित रूपेण विषमाग है (या कम से कम अतुल-

नात्मक है), उस समय एक उच्चतर सहसम्बन्ध गुणांक को उत्पन्न कर सकती है जब कि दूसरे प्रेक्षणों के लिए बहुत कम या किसी भी सहसम्बन्ध का अस्तित्व नहीं है। साथ ही यह भी सम्भव है कि चार्ट 19.9 में भी उसी प्रकार की विषमांगता का वर्णन किया गया हो जिसका विवरण पूर्व अनुच्छेद में किया गया, 9 के समूह में से ऊपर के चार बिन्दु एक ऐसी श्रेणी का प्रतिनिधित्व कर सकते हैं जो कि निम्न पाँच



चार्ट 19.9 विषमांगता के एक प्रकार का चित्रण करने वाला प्रकीर्ण आरेख। ऊपरी दाएँ कोने में एक विशेष मद की उपस्थिति के कारण सहसम्बन्ध में वृद्धि हो जाती है। यह चार्ट यथार्थ आँकड़ों से बनाया गया है जिसका स्रोत और प्रकृति बताई नहीं गई। चार्ट, 19.8 के चार्ट के नीचे दिए गए स्रोत के पृष्ठ 129 से।



चार्ट 19.10 एक प्रकार की विषमांगता चित्रण करने वाला प्रकीर्ण आरेख। चार्ट की चोटी पर एक सम्भवतः विशेष मद की उपस्थिति के कारण सहसम्बन्ध कम हो गया है। आँकड़े ए० एच० विनफील्ड द्वारा लिखित ट्विन्स एण्ड आर्फन्स, जे० एम० डैन्ट एण्ड सन्स, लिमिटेड, लन्दन और टोरन्टो, पृष्ठ 121—123 में और भिन्न असमान के 26 भ्रातृवत जुड़वाँ बच्चों के प्रतिभा गुणांक उपस्थित करते हैं। चार्ट, 19.8 के चार्ट के नीचे दिए सन्दर्भ के पृष्ठ 111 से।

बिन्दुओं द्वारा प्रतिनिधित्व की गई श्रेणी से भिन्न है। किसी भी अवस्था में, अन्वेषक को इस सम्भावना की ओर ध्यान देना चाहिए।

यह पर्याप्त स्पष्ट हो जाना चाहिए कि चार्ट 19.9 में प्रदर्शित परिस्थिति के विपरीत परिस्थिति भी उपस्थित हो सकती है। कहने का भाव यह है कि बिन्दुओं का गुच्छा ऊँचे सहसम्बन्ध को दिखा सकता है, परन्तु एक अन्तिम बिन्दु इस प्रकार से स्थित हो सकता है कि इसका अन्यों के साथ सम्मिश्रण निम्न सहसम्बन्ध को उत्पन्न करेगा। चार्ट 19.10 में एक ऐसी स्थिति को दिखाया गया है जिसमें सीमान्त मूल्यों के युग्म को सम्मिलित करने से निम्न सहसम्बन्ध और भी निम्नतर बन गया है। r +0.348 से घट कर +0.290 हो गया है।

माप की त्रुटियाँ—क्योंकि दो चरों के माप में भूलों का सामान्यतया सहसम्बन्ध नहीं होता अतः इस प्रकार की भूलें r के आकार को इसके वास्तविक मूल्य

नीचे गिरा देती है। यदि मूलों का विस्तार ज्ञात है तो इस प्रकार के तनुकरण को ठीक किया जा सकता है।

औसतों का प्रयोग—यदि सहसम्बन्ध किए जाने वाले आँकड़ों को प्रथम स्वतन्त्र चर के अनुसार कई आकार समूहों में इकट्ठा कर लिया जाता है, यदि प्रत्येक समूह के लिए $\bar{X}$ और $\bar{Y}$ का परिकलन किया जाता है और यदि ये माध्य सह सम्बन्धित हैं, तो माध्यों में सहसम्बन्ध सब मिलाकर पृथक पृथक मदों में सहसम्बन्ध से ऊँचा होगा (जब तक कि असामूहिक आँकड़ा के लिए $r=1\ 0$ नहीं हैं)। यह इसलिए ऐसा है क्योंकि विभिन्न स्तम्भ माध्यों के गिर्द वास्तविक मूल्यों का अब कोई प्रसार नहीं है। इसी प्रकार यदि आश्रित चर की अनेक पंक्तियों का समूहीकरण तथा औसत किया जाता है तो सहसम्बन्ध में वृद्धि हो जाएगी। यदि आँकड़ा को दोनों चरों के अनुसार समूहित किया जाता है, ताकि पर्याप्त कोष्ठक हों, और यदि प्रत्येक कोष्ठक के लिए $\bar{X}$ और $\bar{Y}$ का परिकलन किया जाता है और (इनके मध्य मूल्यों की अपेक्षा) इन युग्मित कोष्ठक माध्यों को सहसम्बन्धित किया जाता है तो सहसम्बन्ध अधिक हो जाएगा। यदि कोष्ठकों की संख्या अधिक है, तो वृद्धि महत्त्वहीन होगी। उदाहरणस्वरूप राज्य औसतों का सहसम्बन्ध सामान्यत काउन्टी मूल्यों के सहसम्बन्ध से ऊँचा होगा।

अरेखिक सम्बन्ध—यदि प्रकीर्ण आरेख का निरीक्षण इस बात को स्पष्ट करता है कि आँकड़ा के साथ सरल रेखा की अपेक्षा वक्र रेखा को अधिक औचित्य के साथ आसंजित किया जा सकता था तो सम्बन्ध की निकटता को घटा कर वर्णन करने वाला r एक भ्रामक माप है। अध्याय 20 म व्याख्यात प्रविधि का अनुसरण करते हुए एक वक्र रेखा को जोड़ना चाहिए और अरेखिक सहसम्बन्ध के गुणाक का परिकलन करना चाहिए। इस प्रकार करने से एक उच्चतर गुणाक प्राप्त होगा और एक ऐसा गुणाक मिलेगा जो अधिक यथार्थता से सम्बन्ध की निकटता को प्रतिबिम्बित करता है। कई बार सहसम्बन्ध से पूर्व एक या दोनों चरों को लघुगणकों पारस्परिकों या किसी अन्य काय में बदलना श्रेष्ठतर हो सकता है।

सगत आँकड़ों का निरसन—उदाहरणार्थ जिन नगरों की संख्या 1,00 000 से 5,00,000 तक है, यदि उनके परचून विक्रयों और वेतन-चिट्ठों का सहसम्बन्ध बना दिया जाता है तो सहसम्बन्ध सामान्यतया उतना ऊँचा नहीं होगा जितना कि तब यदि 10 000 से 50,00,000 तक के नगरों को सम्मिलित कर लिया जाता है। यह ऐसा इसलिए है क्योंकि परचून विक्रया और वेतन चिट्ठों दोनों का जनसंख्या के साथ धनात्मक सहसम्बन्ध है, और जब दोनों अक्षाशों पर मूल्यों के परिसर को बढ़ाया जाता है तो Σy^2_s में अनुरूप वृद्धि के बिना Σy^2_c को बढ़ाया जाता है। इस प्रकार के आँकड़ों के लिए, चार्ट 19 10 में वर्णित प्रकार की विषमागता से बचने का स्मरण रखना चाहिए। एक भिन्न स्थिति का भी विचार कीजिए यदि नौकरी दिलाने वाले अकों को दो से पाँच वर्ष तक का अनुभव रखने वाले श्रमिकों की मासिक आय से सहसम्बन्धित कर दिया जाए तो सहसम्बन्ध उस अवस्था से ऊँचा हो सकता है जिसमें इस प्रकार के सभी कर्मचारियों को सम्मिलित किया गया है, क्योंकि आय प्राय अनुभव के साथ साथ प्रत्यक्ष रूप से बदलती रहती है जबकि नौकरी दिलाने वाले अक धनात्मक रूप में अनुभव के साथ आवश्यक तौर पर सहसम्बन्धित नहीं होते।

समूहित आँकड़ो का सहसम्बन्ध

जब सहसम्बन्धित की जाने वाली मदो के युग्मो की सख्या बडी हो तो समय की बचत होती है यदि गणनाएँ करने से पूर्व आँकडा को सामूहित कर लिया जाता है। पहले आँकडो को मिलाया जाता है[17] जैसा कि सारणी 19 3 मे है, जो कि आयोवा मे सब काउटिया के लिए प्रतिशत ग्रामीण फाम तथा 3 000 डालर से कम आय के साथ प्रतिशत के बीच सम्बन्ध को दिखाता है। यह सारणी प्रकीर्ण आरेख से मिलती जुलती है केवल यह अपवाद है कि ठीक ठीक आलेखित किए जाने की अपेक्षा प्रत्येक बिन्दु को केवल उचित कोष्ठक मे रख दिया गया है। इस प्रकार 5 प्रतिशत ग्रामीण फार्म वाली तथा 3,000 डालर से कम आय के साथ 10 प्रतिशत वाली काउन्टी का अत्यन्त नीचे बाएँ कोने मे मिलान किया जायेगा।

सारणी 19 3

1960 मे आयोवा की काउन्टियो के लिए प्रतिशत ग्रामीण फाम तथा 3 000 डालर से कम आय के साथ प्रतिशत का परिकलन

$ 3 000(Y) से कम आय का प्रतिशत

55 0 59										○
50 0–54 9							○		○	
45 0–49 9					○			○	2	○
40 0–44 9								○	○	○
35 0 39					(3)	○	○	○	○	○
30 0 34 9						○	○	○	○	○
25 0–29 9				○	○	○	○	○		
20 0–24 9		○	(3)	○	○					
15 0–19 9		○	○							
10 0 14 9	○									
	4 7–9 9	10 0–14 9	15 0–19 9	20 0–24 9	25 0–29 9	30 0–34 9	35 0–39 9	40 0–44 9	45 0–49 9	50 0–57 4

प्रतिशत ग्रामीण फार्म (X)

आँकड सयुक्त राज्य जनसख्या ब्यूरो, यू एस सेसस आफ पापुलेशन 1960, खण्ड I, कैरेक्टरिस्टिक्स आफ दि पापुलेशन भाग 17, आयोवा, पृष्ठ 17–166–17–168 से।

सारणी 19 4 सहसम्बन्ध सारणी है। प्रत्येक कोष्ठक के केन्द्र मे अको को सारणी 19 3 से लिया गया है। समस्तरीय ढग से सख्याओ को जोड कर f_y मूल्यो को प्राप्त किया गया है, f_1 मूल्यो को उर्ध्वाधर रूप मे जोडकर। अको के इन दो समूहो को क्रमश आश्रित और स्वतन्त्र चरो के बारम्बारता बटनो के रूप मे जाना जाएगा। वास्तव मे प्रत्येक बटन के लिए कुल बारम्बारताएँ या काउन्टियाँ N वही है 99। सारणी मे तीन अन्य स्तम्भ तथा पक्तियाँ उनके समरूप हैं जिनके बारम्बारता बटन से मानक विचलनो और माध्य का परिकलन करने के हम अभ्यस्त है, अतिरिक्त इसके कि यहा हमारे पास दो बारम्बारता बटन हैं एक X मूल्यो का (समस्तरीय चलता हुआ) तथा दूसरा Y मूल्यो का (उर्ध्वाधर रूप मे चलता हुआ)। परिकलन मे सुविधा के लिए विचलनो का काल्पनिक

17 मिलान करने की अपेक्षा छाटना सरलतर हो सकता है और इसमे कम गलतियाँ होने की सम्भावना है। यह उस समय विशेष रूप से सत्य है जब आँकडे पत्रको पर है या यदि छिद्र पत्रक उपकरण उपलब्ध है।

माध्यो से वर्ग अन्तरालो के सम्बन्ध मे मापा जाता है, X के विचलनो को 5 5 प्रतिशत और Y के विचलनो को 5 0 प्रतिशत के रूप मे चुना जाता है ।

क्योकि r के लिए xy मूल्यो की आवश्यकता पडती है, अत. प्रत्येक कोष्ठक के लिये इनका भी परिकलन और जोड कर लिया जाता है । यह X विचलन को Y विचलन मे गुणा करके किया जाता है (प्रत्येक कोष्ठक के ऊपरी भाग मे प्रदर्शित), और अन्तत इस गुणनफल को उचित बारम्बारता से गुणा करके । परिणाम प्रत्येक कोष्ठक के निम्न भाग मे मोटे छप अकों मे दिखाए गये हैं। यह देखा जाएगा कि प्रथम तथा तृतीय चतुर्थांश धनात्मक है, जबकि द्वितीय और चतुर्थ वास्तव मे ऋणात्मक हैं । उन गुणनफलो के बीजगणितीय योग को सारणी के निम्न दायें कोने मे दिखाया गया है। व्यजक $\Sigma fd'xd'_Y$ मे f के लिए कोई पादाक नही है क्योकि प्रत्येक कोष्ठक बारम्बारता एक X श्रेणी और एक Y श्रेणी के लिए समान है ।

जब समूहित आंकडो का सहसम्बन्ध कर रहे हो, तब प्रथम r का परिकलन करना सर्वाधिक शीघ्रगामी है, जिसके पश्चात् आकलन समीकरण और आकलन की मानक त्रुटि को प्राप्त किया जा सकता है ।[18]

असमूहित आंकडो से प्रत्यक्ष रूप से r प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया गया था .

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

समूहित आंकडो के लिए X को d'_X के द्वारा बदल दिया जाता है और Y को d'_Y के द्वारा, चिह्न f का प्रवेश करा दिया जाता है और व्यजक बन जाता है :

$$r = \frac{N\Sigma fd\, xd_Y - (\Sigma fxd_X)(\Sigma f_Y d'_Y)}{\sqrt{[N\Sigma f_X (d'_X)^2 - (\Sigma fxd_X)^2][N\Sigma f_Y (d_Y)^2 - (\Sigma f_Y d_Y)^2]}}$$

इस सूत्र मे प्रतिस्थापन करने से हमारे पास निम्नलिखित आता है .

$$r = \frac{(99)(349) - (-51)(2)}{\sqrt{[(99)(581) - (-51)^2][(99)(336) - (2)^2]}},$$

$$= \frac{34,653}{\sqrt{(54,918)(33,260)}},$$

$$= +0\,8108.$$

उन विधियो के द्वारा जिनसे पाठक पूर्व परिचित हैं सारणी 19.4 मे प्रदर्शित मूल्यो से निम्नलिखित माप शीघ्रता से परिकलित किए जाते है :

$\bar{X} = 35.367$ $\bar{Y} = 32\,551$

$sx = 13\,0191$ $s_Y = 9.2105$

---

18 वास्तव मे दो प्रसामान्य समीकरणों को स्थापित करना और प्रथम आकलन समीकरण को प्राप्त करना सम्भव है । ऐसा करने की विधि के लिए देखें, मूल अग्रेजी पुस्तक का प्रथम संस्करण, पृष्ठ 675 तथा पृष्ठ 856—857.

सारणी 19 4

1960 मे आयोवा की काउन्टियो के लिए प्रतिशत ग्राम फार्म (X) तथा 3 000 डालर (Y) के कम आय के साथ प्रतिशत की सहसम्बन्ध सारणी

श्रेणी सीमाएँ X / Y	मध्य मूल्य	2 5–7 9 5 2	8 0–13 4 10 7	13 5–18 9 16 2	19 0–24 4 21	24 5–29 9 27 2	30 0–35 4 32 7	35 5–40 9 38 2	41 0–46 4 43	46 5–51 9 49 2	52 0–57 4 54 7	f_Y	d_Y	$f_Y d_Y$	$f_Y(d_Y)^2$
55 0–59 9	57 45										+15 1 15	1	5	5	25
50 0–54 9	52 45							0 1 0		+8 1 8		2	4	8	32
45 0–49 9	47 45					6 1 6			+3 1 3	+6 2 12	+9 1 9	5	3	15	45
40 0–44 9	42 45								+2 4 8	+4 3 12	+6 2 12	9	2	18	36
35 0–39 9	37 45					2 3 −6	−1 4 −4	0 4 0	+1 5 5	+2 6 12	+3 1 3	23	1	23	23
30 0–34 9	32 45						0 5 0	0 7 0	0 12 0	0 1 0	0 1 0	26	0	0	0
25 0–29 9	27 45				+3 1 3	+2 4 8	+1 8 8	0 1 0	1 1 1			15	1	−15	15
20 0–24 9	22 45		+10 1 10	+8 3 21	+6 1 6	+4 1 4						6	2	−12	24
15 0–19 9	17 45		+15 4 60	2 4 18								8	3	24	72
10 0–14 9	12 45	+24 4 96										4	4	16	64
f_x		4	5		2	9	17	13	23	13	6	N = 99		$\Sigma f_Y d_Y$ = 2	$\Sigma f_Y (d_Y)^2$ = 336
d_x		6		4	3	2	1	0		2	3				
$f_x d_x$		24		28	6	18	17	0	23	26	18	$\Sigma f_x d_x$ = 51		$\Sigma f d_x d_Y$ = 349	
$f_x(d_x)^2$		144	17	12	18	36	17	0	23	52	54	$\Sigma f (d_x)^2$ = 591			

आँकडे सारणी 19 3 से।

आकलन समीकरण को प्राप्त करने के लिए हम

$$Y_c - \bar{Y} = r\frac{s_Y}{s_X}(X - \bar{X})$$

का प्रयोग करते हैं।

इस समीकरण मे प्रतिस्थापन करने के बाद, हमारे पास है

$$Y_c - 32\ 551 = 0\ 8108\ \frac{9\ 2105}{13\ 0191}(X - 35\ 367), \text{ अथवा}$$

$$Y_c = 12.264 + 0\ 5736X$$

अब क्योकि जैसा कि पाद टिप्पणी 8 म दिखाया गया है

$$r^2 = 1 - \frac{s^2_{Y\cdot X}}{s^2_Y},$$

$$s^2_{Y\cdot X} = s^2_Y(1 - r^2), \text{ तथा}$$

$$s_{Y\cdot X} = s_Y\sqrt{1 - r^2}.$$

प्रतिस्थापन प्रदान करता है,

$$s_{Y.X} = 9.2105\ \sqrt{1-(0.8108)^2},$$
$$= 5.388$$

समूहन का प्रभाव—समूहित आँकडो से प्राप्त मूल्य पूर्णरूपेण वही नही है जो उस समय प्राप्त होत यदि परिकलन असमूहित आँकडो पर आधारित होते। यद्यपि अन्तर सामान्यतया मामली है यदि प्रत्येक दिशा मे कम से कम 12 समूह है तथापि समूहित आँकडो से परिकलित सहसम्बन्ध के गुणाक की प्रवृत्ति बहुत छोटा होने की है। यह पुन. स्मरण किया जाए कि सहसम्बन्ध गुणाक के लिए एक सूत्र है

$$r = \frac{\Sigma xy}{N s_X s_Y}$$

समूहन से त्रुटियो की प्रवृत्ति अश मे परस्पर एक दूसरे को समाप्त करने की होती है यदि X और Y बटन लगभग सममित हैं। तथापि हर मे मानक विचलनो की अत्यधिक बडा होने की प्रवृत्ति है और शैपार्ड के शोधन का प्रयोग किया जाना चाहिए। यदि वही परिस्थितियाँ पाई जाती है जिनके अन्तर्गत यह शोधन उचित है।

यदि 169 मदो का सहसम्बन्धित किया जाता है तो असमूहित $r = +0.8317$ जो कि वास्तव मे सारणी 19.4 के समूहित आँकडो के लिए $r = +0.8108$ के मूल्य से ऊँचा है। यदि शैपार्ड के शोधन का प्रयोग किया जाता है (समूहित आँकडो के लिए r के सूत्र मे कोष्ठको से घिरे हुए प्रत्येक व्यजक म से $\frac{N^2}{12}$ को घटा कर) तो $r = +0.8271$ मिलता है। वास्तव मे इन आँकडो के लिए शैपार्ड के शोधन के प्रयोग की मान्यता सदेहास्पद है, क्योकि दोनो श्रेणियाँ सीमित परिसर की हैं।

कोटिबद्ध आँकड़ों का सहसम्बन्ध

कई बार सांख्यिकीय श्रेणियाँ ऐसी मदो से बनी होती है जिनकी यथार्थ मात्रा मापी नही जा सकती, परन्तु जिनको आकार या किसी अन्य कसौटी के अनुसार कोटिबद्ध कर दिया जाता है। इस प्रकार सारणी 19.5 के स्तम्भ 2 मे 14 फरवरी 1966 का युनाइटिड प्रेस की कोटियो के अनुसार हमने 10 बास्केटबाल टीमो की सूची बनाई है। स्तम्भ 3 मे हमने एसोसिएटिड प्रेस की कोटियो के क्रम के अनुसार उन्ही टीमो की सूची बनाई है। हम अधिकारियो के दो समुच्चयो मे सहमति की सीमा का निर्धारण करना चाहते है।

क्योंकि पहले वर्णन किए गए सहसम्बन्ध के गुणाक को कोटिबद्ध आँकडो का वर्णन करने के लिए नही बनाया गया, अत. हम *स्पियरमैन के कोटि सहसम्बन्ध गुणाक* का प्रयोग करेंगे, जिसका सूत्र है

$$r_{rank} = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)},$$

जिसमे D दो श्रेणियो मे युग्मित मदो के बीच कोटि के अन्तर का उल्लेख करता है। सारणी 19.5 मे यह देखा जायेगा कि धनात्मक अन्तरो का योग ऋणात्मक अन्तरो के योग के बराबर है और इसलिए व्यवकलनो की यथार्थता पर एक नियन्त्रण प्रदान करता है। सूत्र मे मूल्यो का प्रतिस्थापन करने से, हमारे पास

$$r_{rank} = 1 - \frac{6(18)}{10(100-1)} = +0.9$$

आता है। सूत्र इस अवस्था म महसम्बन्ध के गुणाक का चिह्न धनात्मक देता है। जब कभी कोटि मे काई बराबरी हो तो दो या अधिक अवस्थाओ को विभिन्न मदो मे बाट लेना चाहिए। इस प्रकार यदि ड्यूक और पश्चिमी टक्सास यू० पी० कोटियो म द्वितीय तथा तृतीय के लिए बराबरा कर तो प्र यक की कोटि 2 5 होगी जबकि यदि ड्यूक पश्चिमी टैक्सास और प्राविडस द्वितीय ततीय और चतुथ क लिए बराबर होते तो प्रत्येक 3 की कोटि प्राप्त कर लेता।[19]

युग्मित मूल्यो के लिए r का शाघ्र परिकलन करने के लिए मूल्यो की दो युग्मित श्रेणिया कई बार कोटिया मे बदली जाती हैं और r_{rank} का परिकलन किया जाता है।

सारणी 195

कोटिबद्ध आँकडों के सहसम्ब ध के लिए मूल्यो का परिकलन दो समाचार सेवाओ के द्वारा बास्किट बाल टीम की कोटिया 14 फरवरी 1966

टीम	कोटि		कोटि मे अतर D स्तम्भ (2) – स्तम्भ (3)		D
	UPI	AP	+	—	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
कटकी	1	1			
ड्यूक	2	2			
पश्चिमी टक्सास	3	3			
प्राविडस	4	6		2	4
लोयोला (शिकागो)	5	4	1		1
सट जासेफ्स (पेना)	6	8		2	4
वामस	7	7			
वाडरबिल्ट	8	5	3		9
नेबरास्का	9	9			
मिशिगन	10	10			
योग			4	4	18

आकड़े रिकाड हैकनसक एन० ज० 15 फरवरी 1966 पृष्ठ 33 स।

उदाहरणाथ कोई व्यक्ति अमरीकन लाग क्रिकट स दूर मदान म खड होन वाला को उनके बट लगाने की औसता के अनुसार और उनके क्षत्र रक्षण अभिलख के अनुसार कोटिबद्ध कर सकता है

19 विवरण के लिए डब्ल्यू० एल० टलर द्वारा लिखित करैक्टिग दि एवरेज रक कोरिलेशन कोइफिशन्ट फॉर टाइज इन दि रक्स जनल आफ दि अमरिकन स्टटिस्टिकल एसोसिएशन खण्ड 59 क्रमाक 307 सितम्बर 1964 पृष्ठ 872—880 दखिए।

और कोटियो के इन दो समुच्चयो का सहसम्बन्ध कर सकता है। जबकि r_{rank} का परिकलन r से अधिक शीघ्रता से हो सकता है तो भी कुछ समय हमेशा आँकडो को कोटिबद्ध करने मे लगाना चाहिए। साथ ही यह स्मरण रखना अच्छा है कि यदि कोई उपस्थित सहसम्बन्ध की मात्रा का स्थूल आकलन करना चाहता है तो इसे मौलिक मूल्यो के प्रकीर्ण आरेख से प्राप्त किया जा सकता है।

कोटि विधि सामान्य विधि जैसी परिशुद्ध न होने का कारण यह है कि आँकडों से सम्बन्धित सभी जानकारी का प्रयोग नही किया जाता। इस प्रकार एक श्रेणी मे मदो के मूल्यो के प्रथम अन्तर परिमाण के क्रम मे प्राय कदापि स्थिर नही होते, प्राय ये अन्तर सारणी के मध्य तक और छोटे हो जाते है। यदि ऐसे प्रथम अन्तर स्थिर हो तब r और r_{rank} समरूप परिणाम प्रदान करेगे।[20] तो भी यदि मूल्यो को प्रसामान्य रूप से विभक्त किया गया हो तो r_{rank} पर एक शोधन लागू किया जा सकता है जो वही परिणाम प्रस्तुत करेगा जो कि r को प्रत्यक्ष रूप से परिकलित करने से प्राप्त होगा। ये शोधन हमेशा सहसम्बन्ध को बढाने का कार्य करते है तो भी ये बहुत छोटे है, और किसी भी अवस्था मे सहसम्बन्ध को 0 02 से अधिक नही बढाते। इसके अतिरिक्त, शोधन हमेशा उचित नही होता। वर्तमान उदाहरण मे हमारे पास (सम्भवत) प्रसामान्य बटना के केवल ऊपरी सिरे है यदि आकडो को आलेखित किया जाए तो वे उलटे-J बटनो के रूप मे दृष्टिगोचर होगे।

2 × 2 सारणियो मे आँकडो का सहसम्बन्ध

प्राय ऐसे आँकडे सम्मुख आते है जो प्रत्येक अक्षाश पर युग्मशाखीय वर्गीकरण मे होते हैं। कई बार इस प्रकार की '2 × 2' सारणी के लिए सहसम्बन्ध गुणाक वाछित[21] हो सकता है।

सारणी 19 6 म एक राज्य विश्वविद्यालय के एक विभाग मे 36 अध्यापको के शैक्षिक कार्य तथा शैक्षिक कोटि के आँकडो को दिखाया गया है। जैसा कि सारणी 19 6 के आँकडो द्वारा दिखाया गया है क्या शैक्षिक कोटि और शैक्षिक कार्य मे सहसम्बन्ध है ?

2 × 2 सारणी के लिए सहसम्बन्ध गुणाक प्राप्त करने की एक विधि मे गुणनफल घूर्ण सूत्र का प्रयोग निहित है। यदि हम 2 × 2 सारणी मे मूल्यो को इस प्रकार रखते है

a_1	b_1	$a_1 + b_1$
a_2	b_2	$a_2 + b_2$
$a_1 + a_2$	$b_1 + b_2$	N

20 प्रमाण के लिए देखिए परिशिष्ट ध, परिच्छेद 19 5।

21. सारणी 25 6 एक 2 × 2 सारणी है जिसके लिए सहसम्बन्ध गुणाक वाछित नही था। तथापि अध्याय 25 मे वर्णित काई-वर्ग विश्लेषण को सारणी 19 6 के आकडो पर लागू किया जा सकता था।

तो यह दिखाया[22] जा सकता है कि गुणनफल घूर्ण सूत्र बन जाता है

$$r = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{\sqrt{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_1+a_2)(b_1+b_2)}}$$

सारणी 19 6 के लिए हम

$$r = \frac{(10)(13)-(5)(8)}{\sqrt{(18)(18)(15)(21)}} = \frac{130 - 40}{\sqrt{102\ 060}} = \frac{90}{319\ 5} = +0\ 282$$

प्राप्त करते हैं। जब तक कि दो द्विभाजनो की इस प्रकार से व्यवस्था नही की जाती जैसे कि सारणी 19 5 मे है या जब तक दोनों द्विभाजनो को उलट नही दिया जाता तब तक यह व्यजक r के लिए अर्थपूर्ण चिह्न प्रस्तुत नही करेगा, केवल एक को उलटने से चिह्न बदल जाता है।

सारणी 19 6

एक राज्य विश्वविद्यालय के एक विभाग मे 36 अध्यापकों का शैक्षिक कार्य तथा शैक्षिक कोटि

शैक्षिक कोटि	शैक्षिक कार्य		योग
	उच्च	निम्न	
उच्च	10	8	18
निम्न	5	13	18
योग	15	21	36

शैक्षिक पद पूर्ण प्रोफेसरो के लिए "उच्च" था और शेष सभी दर्जों के लिए "निम्न"। गतिविधियो जैसे कि लिखी गई पुस्तकें, लिखे गए लेख पढ़े गए पेपर आदि की संख्या मे से प्रत्येक के लिए बिन्दुओं की एक प्रणाली द्वारा शैक्षिक कार्य को मापा गया था।

2 × 2 सारणी मे आँकडो के सहसम्बन्ध की एक अन्य विधि मे, माध्य वर्ग आकस्मिकता के गुणाक C का परिकलन सम्मिलित है। इसका परिकलन निम्न व्यजक[23] से करते है

$$C = \sqrt{\frac{(a_1b_2 - b_1a_2)}{[(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_1+a_2)(b_1+b_2)] + (a_1b_2 - b_1a_2)}},$$

22 ऊपर दिया गया सूत्र, जी० यू० यूल तथा एम० जी० कडाल द्वारा लिखित *एन इन्ट्रोडक्शन टु दि थीअरि ऑफ स्टैटिस्टिक्स*, 12वा सस्करण, सशोधित चार्ल्स ग्रिफिन एण्ड को०, लन्दन, 1940 पृष्ठ 252—253 म विकसित व्यजक के अश के सरलीकरण का परिणाम है। विकास यह कल्पना करता है कि प्रत्येक चर के लिए केवल दो मूल्य सम्भव हैं। यह सारणी 25 6 मे दोनो चरो के लिए सत्य है। सारणी 19 6 मे यह शैक्षिक कोटि के लिए सत्य है क्योंकि दो वर्गों को "पूर्ण प्रोफेसर" तथा "अपूर्ण प्रोफेसर" के रूप मे सोचा जा सकता है। यह शैक्षिक कार्य के लिए सत्य नही है। 2×2 सारणियो के विस्तृत वर्णन के लिए एम० जी० कडाल तथा ए० स्टुअर्ट द्वारा लिखित *दि एडवांस्ड थीअरि ऑफ स्टैटिस्टिक्स*, खण्ड 2, *इफरेन्स एन्ड रिलेशनशिप*, चार्ल्स ग्रिफिन एड क०, लन्दन, 1961, अध्याय 23, एट० सेक० देखिए।

23 यह सामान्य व्यजक

$$C = \sqrt{\frac{x^2}{N+x^2}}$$

का एक सशोधन है, जो 2 × 2 सारणियो के लिए x^2 के परिकलन को अनावश्यक बना देता है। काइ-वर्ग का वर्णन अध्याय 25 मे किया गया है। 2×2 से बडी सारणियो के लिए सामान्य व्यजक का प्रयोग किया जाएगा।

जो हमारे उदाहरण के लिए हमें

$$C=\sqrt{\frac{[(10)(13)-(5)(8)]^2}{[(18)(18)(15)(21)]+[(10)(13)-(5)(8)]^2}},$$

$$=\sqrt{\frac{8,100}{102,000+8,100}}=\sqrt{0.073529}=0.271$$

प्रदान करता है।

परिकलन C के लिए स्वचालित ढग से चिह्न प्रदान नही करते, परन्तु आंकडो के परीक्षण से प्राय चिह्न प्राप्त किया जा सकता है। इस अवस्था मे यह धनात्मक होगा।

माध्य वर्ग आकस्मिकता के गुणाक का एक लाभ यह है कि इसका प्रयोग 2×2 सारणियो तक सीमित नही है। इसका प्रयोग बडी सारणियो के लिए किया जा सकता है, C के लिए सूत्र वही है जो पादटिप्पणी 23 मे दिया हुआ है।

C की एक हानि यह तथ्य है कि C का अधिकतम मूल्य 1 0 नही है। इसका *उच्चतम मूल्य 1 0 से कम है, उदाहरण के लिए यह 2×2 सारणी के लिए 0 707, 3×3 सारणी के लिए 0 816, और 10×10 सारणी के लिए 0 949 है।* एक एसी सारणी के लिए जिसम स्तम्भो को सख्या उतनी ही है जितनी कि पक्तियो की, C के उच्चतम मूल्य को इस प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है

$$\sqrt{\frac{\text{स्तम्भो (या पक्तियो) की सख्या}-1}{\text{स्तम्भो (या पक्तियो) की सख्या}}}$$

C की इस कमी के लिए सशोधन किए जा सकते हैं, परन्तु ये पूर्णरूपेण सतोषजनक नही है।

2×2 सारणियो मे आंकडो का सहसम्बन्ध करने के लिए विभिन्न अन्य विधियाँ उपलब्ध हैं।[24] इनमे से ये हैं चतुष्कोष्ठिक सहसम्बन्ध, असमान चिह्नो की विधि कोटिज्या r विधि, तथा सगामी विचलनो की विधि।

---

24 उदाहरणार्थ, कडाल तथा स्टूअट द्वारा लिखित ऊपर निर्दिष्ट पुस्तक का अध्याय 26 देखिए, अग्रेजी पुस्तक के प्रथम सस्करण के पृष्ठ 688—689 देखिए।

20

सहसम्बन्ध II द्वि-चर अरेखिक सहसम्बन्ध

पिछले अध्याय मे दो चरो स्वतन्त्र चर मे एक इकाई वृद्धि से सम्बद्ध आश्रित चर मे वृद्धि की स्थिर मात्रा, के बीच सरलतम प्रकार के सम्बन्धो पर विचार किया गया था। तथापि रेखिक कल्पनाएँ सदैव सन्तोषजनक नही होती। वृक्षा के ऊँचाई विकास तथा व्यास विकास के आँकडो का, चार्ट 19 5 मे प्रदर्शित, रेखिक आकलन समीकरण द्वारा उचित रूप से वर्णन किया गया था। जैसा कि चार्ट 20 1 म देखा जा सकता है जो सारणी 20 1 के आँकडो को उपस्थित करता है, वृक्षो के आयतन तथा व्यास मे रेखिक सम्बन्ध नही है। जैसाकि सारणी मे देखा गया अक, आयतन एक वृक्ष मे लकडी के तख्तो की फुट सख्या के दसवे भाग का प्रतिनिधित्व करते है। अरिजोना मे कोकोनिनो नैशनल फारेस्ट से ट्री मैजरमेन्ट बुक से पोन्डरोसा देवदार वृक्षो के लिये आयतन के बीस जोडो को यादृच्छिक रूप से चुना गया है।

बहुपद

द्वितीयाश वक्र—व्यास तथा आयतन म सम्बन्ध का वर्णन करने के लिये पहले हम

$$Y_c = a + bX + cX^2$$

प्रकार के आकलन समीकरण का प्रयोग करेंगे और फिर अपने परिणामो की उन परिणामो से तुलना करेंगे जो सरल रेखा प्रयुक्त करने से प्राप्त हुए थे। व्याख्यात्मक आँकडो के एक भिन्न समूह के लिये

$$Y_c = a + bX + cX^2 + bX^3$$

प्रकार के आकलन समीकरण का विचार करके हम पाडरोसा देवदार वृक्षो के व्यास तथा आयतन के आँकडो पर आएँगे और उन आँकडो के कई सम्भव रूपातरणो का परीक्षण करेंगे।

द्वितीयाश वक्र के लिये तीन प्रसामान्य समीकरणो की आवश्यकता होती है। वे

$$\text{I} \qquad \Sigma Y = Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2,$$

$$\text{II} \qquad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3,$$

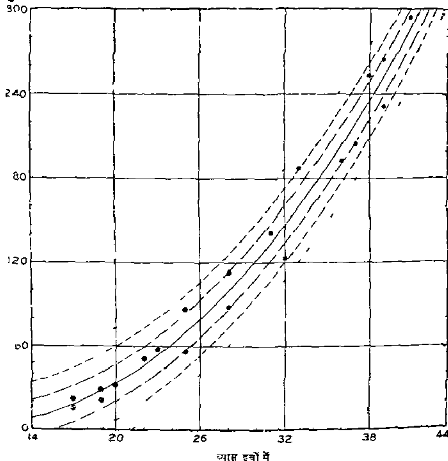
$$\text{III} \qquad \Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4$$

है। सारणी 20 1 मे प्राप्त मूल्यो का प्रतिस्थापन करने से, हम प्राप्त करते है

$$\text{I.} \qquad 2{,}460 = 20a + 569b + 17{,}437c,$$

$$\text{II} \qquad 83{,}777 = 569a + 17{,}437b + 567{,}749c,$$

$$\text{III} \qquad 2{,}949{,}733 = 17{,}437a + 567{,}749b + 19{,}361{,}917c$$



चार्ट 20 1 बीस पोंडरोसा देवदार वृक्षों का व्यास तथा आयतन और ± 1 ± 2 और ± 3 आकलन का मानक त्रुटियो के क्षत्रो के साथ द्वितीयाश आकलन समीकरण। सारणी 20 1 के आकड । आकलन समीकरण मोटी रेखा से दिखाया है ।

a, *b*, तथा *c* के मूल्यों को प्राप्त करने के लिये, इन तीन समीकरणों को एक साथ हल करना आवश्यक है । तीन युगपत् समीकरणों को हल करने की एक प्रविधि का वर्णन करने म पहले हम सामान्य रूप से प्रत्येक पग का विवरण देंगे और फिर इस समस्या के लिय विशिष्ट क्रिया का सकेत करग । पग हैं .

1 प्रसामान्य समीकरण I का ऐसी सख्या से गुणा करो कि एक अज्ञात का गुणाक वैसा ही बन जाए जैसा कि प्रसामान्य समीकरण II मे उसी अज्ञात का गुणाक । हमारे आँकडो के लिये

$(I \times 28\ 45)\quad 69{,}987 = 569a + 16\ 188\ 05b + 496{,}082\ 65c$

प्राप्त करन के लिये प्रसामान्य समीकरण I को $\Sigma X - N = 28\ 45$ से गुणा किया जाता है ।

सारणी 20.1

बीस पोंडरोसा देवदार वृक्षों के व्यास तथा आयतन के लिये सरल-रेखा तथा द्वितीयाश वक्र पर आधारित सम्बन्ध के मापो का निर्धारण करने के लिये प्रयुक्त मूल्यो का परिकलन

छाती तक की ऊँचाई पर व्यास (इचों मे) X	आयतन* (बोर्ड फुट—10) Y	XY	X^2Y	X^2	X^3	X^4	Y^2
36	192	6,912	248 832	1,296	46,656	1,679,616	36,864
28	113	3,164	88,592	784	21,952	614,656	12,769
28	88	2,464	68,9 2	784	21,952	614 656	7,744
41	294	12 054	494,214	1,681	68,921	2.825,761	86,436
19	28	532	10,108	361	6,859	130 321	784
32	123	3,936	125 952	1,024	32 768	1,048 576	15,129
22	51	1,122	24 684	484	10 648	234,256	2,601
38	252	9 576	363 888	1,444	54 872	2 085 136	63,504
25	56	1 400	35,000	625	15,625	390 625	3,136
17	16	272	4 624	289	4 913	83,521	256
31	141	4,371	135,501	961	29,791	923 521	19,881
20	32	640	12,800	400	8,000	160 000	1,024
25	86	2,150	53,750	625	15 625	390 625	7,396
19	21	399	7 581	361	6,859	130,321	441
39	231	9,009	351,351	1 521	59,319	2,313 441	53,361
33	187	6 171	203,643	1,089	35,937	1,185 921	34,969
17	22	374	6 358	289	4 913	83,521	484
37	205	7,585	280,645	1,369	50,653	1,874 161	42 025
23	57	1,311	30,153	529	12,167	279 841	3,249
39	265	10 335	403,065	1,521	59 319	2 313 441	70 225
569	2 460	83 777	2 949 733	17 437	567,749	19 361 917	462 278

* आयतन स्क्रिबनर दशमलव C नियम द्वारा निश्चित किया गया था। जिसका वर्णन डी० ब्रूस तथा एफ० ऐक्स० शूमेचर द्वारा लिखित फॉरेस्ट मेन्स्यूरेशन, मैक ग्रा हिल बुक कम्पनी, न्ययार्क, पृष्ठ 159—163 म किया गया है।

आँकड सयुक्त राज्य अमरीका के कृषि विभाग की फॉरेस्ट सर्विस क सौजन्य से प्राप्त। अक अरिजोना मे कोकोनिना नेशनल फारेस्ट से ट्री मैजरमेन्ट बुक से यादृच्छ प्रतिदर्श हैं।

2 समीकरण A प्राप्त करने के लिये, जिसमे दो अज्ञात होग समीकरण II से सशोधित समीकरण I को घटाओ या सशोधित समीकरण I से समीकरण II को घटाओ। वतमान समस्या के लिये, समीकरण A मे केवल b और c होग।

$$\begin{array}{lrl} \text{II} & 83{,}777 = & 569a + 17\,437b + 567{,}749c \\ (\text{I} \times 28\ 45). & 69{,}987 = & 569a + 16\,188\ 05b + 496\,082\ 65c \\ \hline \text{A} & 13{,}790 = & 1{,}248.95b + 71{,}666\ 35c. \end{array}$$

3 प्रसामान्य समीकरण II को ऐसी सख्या से गुणा करो कि अज्ञात का गुणाक जो समीकरण A मे नही है, समीकरण II मे वही बन जाए जो प्रसामान्य समीकरण III मे है। अपनी समस्या मे हम प्रसामान्य समीकरण II को $\Sigma X \div \Sigma X = 30\ 644991$ स गुणा करते है। और

(II × 30 644991)

$$2\ 567\ 345\ 411 = 17\ 437a + 534{,}356\ 708b + 17{,}398{,}662\ 995c$$

प्राप्त करते हैं,

4 समीकरण B को प्राप्त करने के लिये, जिसमे वही दो अज्ञात होगे जो समीकरण A म हैं, समीकरण III मे से सशोधित समीकरण II को घटाओ या सशोधित समीकरण II मे से समीकरण III को घटाओ। हमारे आकडों के लिये हमारे पास है

$$\text{III}\quad 2\ 949\ 733 = 17\ 437a + 567\ 749b \quad + 19{,}361{,}917c$$

(II × 30 644991)

$$\underline{2\ 567\ 345\ 411 = 17{,}437a + 534{,}356\ 708b + 17{,}398{,}662\ 995c}$$

$$\text{B}\quad 382\ 387\ 589 = \quad 33{,}392\ 292b + 1{,}963{,}254\ 005c$$

5 समीकरण A तथा B मे दा स्थिराको के मूल्यो को प्राप्त करने के लिये उन समीकरणो को युगपत् रूप से हल करो (प्रविधि का वर्णन पृष्ठ 236—237 पर किया गया था)। वृक्षो के आयतन तथा व्यास के आँकडो के लिये ऐसा करने से

$$b = -5\ 620315,$$
$$c = +0\ 2903663$$

प्राप्त होता है।

6 उस अज्ञात के मूल्य को प्राप्त करन के लिये जो A तथा B समीकरणो में नही था, पग 5 मे परिकलित मूल्यो को, प्रसामान्य समीकरणो मे से किसी एक मे प्रतिस्थापित करो। I का प्रयोग करके हम

$$2{,}460 = 20a + (569)(-5\ 620315) + (17{,}437)(0.2903663)$$
$$20a = 594\ 842,$$
$$a = 29\ 7421$$

प्राप्त करते है।

7 पडताल के तौर पर पग 5 और 6 म प्राप्त मूल्यो को, पग 6 मे अप्रयुक्त एक प्रसामान्य समीकरण मे प्रतिस्थापित करो। समीकरण II का प्रयोग

$$83{,}777 = (569)(29\ 7421) - (17{,}437)(-5\ 620315) + (567{,}749)(0\ 2903663),$$
$$= 83{,}776\ 9987$$

प्रदान करता है।

व्यास मे वृक्ष आयतन का आकलन करने के लिए द्वितीयांश समीकरण है।

$$Y_c = 29\ 7 - 5.62X + 0\ 2904X^2$$

इस समीकरण को एक मोटी रेखा द्वारा चार्ट 20 1 पर दिखाया गया है। प्रकीर्ण आरेख तथा आकलन समीकरण की उपस्थिति के कारण पाठक विस्मित हो सकता है

कि b का ऋणात्मक चिह्न है। कारण यह है कि चार्ट 20.1 वक्र का केवल एक भाग दिखाता है। यदि चार्ट शून्य पर प्रारम्भ होने वाले समस्तर पैमाने के साथ पुन बनाया जाता तो आकलन समीकरण मोटे रूप मे U-आकार का दिखाई देता।

30 इच के व्यास वाले वृक्ष के लिये, आकलित आयतन होगा

$$Y_c = 29.7 - (5.62)(30) + (0.2904)(30)^2,$$

$$= 122.1 \text{ बोर्ड फुट के दशक ।}$$

जो व्यजक रेखिक सहसम्बन्ध के लिए प्रयोग किया गया था, उसी के द्वारा कुल विचरण का परिकलन किया गया है,

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \overline{Y}\Sigma Y,$$

$$= 462,278 - (123)(2,460) = 159,698.$$

क्योंकि हमारे पास a, b, तथा c के मूल्य हैं, अत हम व्याख्यात विचरण को ज्ञात कर सकते है, जो

$$\Sigma y_{c \cdot YXX}^2 = a\Sigma Y + b\Sigma XY + c\Sigma X^2 Y - \overline{Y}\Sigma Y,$$

$$= (29.7421)(2,460) + (-5.620315)(83.777) + (0.2903663)(2,949,733) - (123)(2,460),$$

$$= 156,235.5$$

है।[1]

अब हम उसी प्रकार से जैसा कि रेखिक सहसम्बन्ध के लिये है, $\Sigma y_{s \cdot YXX^2}^2$ को प्राप्त कर सकते है

$$\Sigma y_{s \cdot YXX^2}^2 = \Sigma y^2 - \Sigma y_{c \cdot YXX^2}^2,$$

$$= 159,698 - 156,235.5 = 3,462.5$$

आकलन की मानक त्रुटि है

$$s_{YXX^2} = \sqrt{\frac{\Sigma y_{s \cdot YXX^2}^2}{N}},$$

$$= \sqrt{\frac{3,462.5}{20}} = 13.2 \text{ बोर्ड फुट दशक ।}$$

आकलन समीकरण के चारो ओर ± 1 2 तथा $3s_{YXX^2}$, के क्षेत्रो को खडित रेखाओ द्वारा चार्ट 20.1 मे दिखाया गया है। आयतन के अनुमानो को, जैसे कि 30 इच के व्यास वाले वृक्ष के लिये बनाए गए थे, ± 13.2 लिखा जा सकता है।

पहले की भाँति, निर्धारण का गुणाक कुल विचरण के साथ व्याख्यात विचरण का अनुपात है.

$$r_{1 \cdot XX^2}^2 = \frac{\Sigma y_{c \cdot YXX^2}^2}{\Sigma y^2},$$

$$= \frac{156,235.5}{159,698} = 0.978.$$

---

1. YXX^2 एक कुछ भद्दा पादाक है, परन्तु यह इस बात को पूर्णतया स्पष्ट रूप से इंगित करता है कि हम आश्रित चर की प्रथम तथा द्वितीय शक्तियो का प्रयोग करके आकलन समीकरण के सम्बन्ध मे परिकलित मापा का वर्णन कर रहे हैं।

सहसम्बन्ध का गुणांक इस अंक का वर्गमूल्य है, परन्तु इसका कोई चिह्न नहीं है। चिह्न के

$$r_{Y\,XX_2} = 0\ 989,$$

अभाव का कारण यह है कि जब आकलन समीकरण वक्र रेखीय है, तो समीकरण के एक भाग मे दो चरो का सम्बन्ध धनात्मक हो सकता है परन्तु दूसरे भाग मे ऋणात्मक।

परिणामों की उन परिणामों से तुलना जो कि सरल रेखा के प्रयोग से प्राप्त हुए है— चार्ट 20 1 *के स्वरूप से, यह पूर्णतया स्पष्ट है कि* पोडरोसा देवदार वृक्षो के व्यास तथा आयतन के बीच सम्बन्ध अरेखिक है, और हम अध्याय 26 मे देखेंगे कि द्वितीयाश वक्र के प्रयोग से उत्पन्न सहसम्बन्ध, सरलरेखा पर आधारित सहसम्बन्ध से पर्याप्त ऊँचा है। इस समय, अभी-अभी प्राप्त परिणामो की सीधी रेखा सम्बन्ध के परिणामों के साथ केवल तुलना करने मे हमारी रुचि है। सारणी 20 1 से उचित योगो तथा N का प्रयोग करके प्रसामान्य समीकरणों

$$\text{I.}\quad \Sigma Y = Na + b\Sigma X \text{ तथा}$$
$$\text{II}\quad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

का हल प्रदान करता है

$$a = -191\ 124274 \text{ तथा}$$
$$b = 11\ 041275$$

सरल रेखा आकलन समीकरण $Y_c = -191\ 1 + 11\ 04X$ है। इस समीकरण को, गहरी रेखा द्वारा, चार्ट 20 2 पर दिखाया गया है, और यह स्पष्ट है कि सरल रेखा सम्बन्ध का सन्तोषजनक विवरण नहीं है।

सरल रेखा से, व्याख्यात विचरण है।

$$\Sigma y^2_c = a\Sigma Y + b\Sigma XY - \bar{Y}\Sigma Y,$$
$$= (-191\ 124274)(2{,}460) + (11\ 041275)(83\ 777) - (123)(2{,}460),$$
$$= 152{,}259\ 2$$

कुल विचरण है

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \bar{Y}\Sigma Y,$$
$$= 462{,}278 - (123)(2{,}460) = 159{,}698,$$

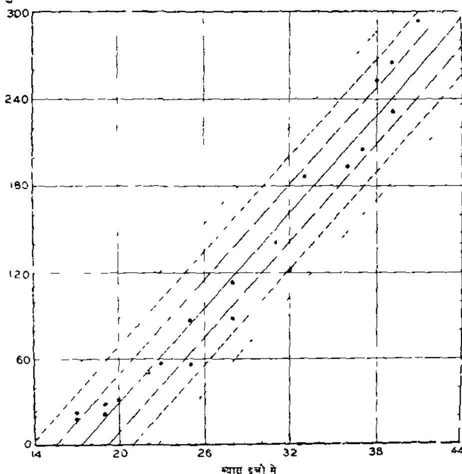
जो वही है जैसा कि द्वितीयाश वक्र के लिये है, तथा

$$\Sigma y_s^2 = \Sigma y^2 - \Sigma y_c^2,$$
$$= 159\ 698 - 152\ 259\ 2 = 7{,}438\ 8$$

आकलन की मानक त्रुटि है

$$s_{Y\,X} = \sqrt{\frac{\Sigma y_s^2}{N}}$$
$$= \sqrt{\frac{7\ 438\ 8}{20}}$$
$$= 19\ 3 \text{ बोर्ड फुट दशक,}$$

जो निश्चित रूप से उस मूल्य से, जो कि उस समय प्राप्त हुआ था जब द्वितीयाश वक्र का प्रयोग किया गया था, बड़ा मूल्य है। ± 1, 2, तथा $3s_Y$ के क्षेत्रो को चार्ट 20 2 पर खण्डित रेखाओ द्वारा दिखाया गया है।



चार्ट 20.2 बीस पोडरोसा देवदार वृक्षो का व्यास तथा आयतन और आकलन की मानक त्रुटि ± 1, ± 2 तथा ± 3 के क्षेत्रो के साथ सरल रेखा आकलन समीकरण। सारणी 20 1 के आकडे। आकलन समीकरण को गहरी रेखा द्वारा दिखाया गया है।

जैसा प्रत्याशित था, निर्धारण तथा सहसम्बन्ध के रेखिक गुणाक उनसे छोटे[2] है जो कि द्वितियाश वक्र पर आधारित हैं।

2 एक माप को स्थापित करना सरल है

$$r^2_{YX^2\cdot X} = \frac{\Sigma y^2_{c(YX X^2)} - \Sigma y^2_c}{\Sigma y^2 - \Sigma y^2_c},$$

जो, (1) X^2 के प्रयोग के कारण व्याख्यात विचरण मे वृद्धि को (2) अकेले X के प्रयोग द्वारा अव्याख्यात विचरण की मात्रा के अनुपात के रूप में, व्यक्त करती है। ऊपर के व्यजक के अश तथा हर को Σy^2 से भाग करके हम

$$r^2_{YX^2\cdot X} = \frac{r^2_{Y\cdot XX^2} - r^2}{1 - r^2}$$

लिखने की अनुमति मिल जाती है। यह माप आगामी अध्याय मे वर्णित आंशिक निर्धारण के गुणाक के पूर्णतया समान है। इसका पुन अध्याय 26 मे उल्लेख किया जाएगा जब हम यह निश्चय करेगे कि क्या निर्धारण का अरेखिक गुणाक रेखिक गुणाक से पर्याप्त बड़ा है।

वे हैं :

$$r^2 = \frac{\Sigma y_c^2}{\Sigma y^2} = \frac{152\ 259\ 2}{159{,}698} = 0.953,$$

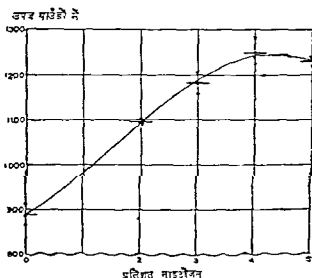
और

$$r = +0.976$$

तृतीयात वक्र—तृतीयात वक्र, तथा प्रतिफल सयोगवश, क्रमागत ह्रास नियम के भी उदाहरण के रूप में हम उन आंकड़ों का प्रयोग करेंगे जो टिफ्टन, जार्जिया में नाइट्रोजन खाद तथा तम्बाकू उत्पादन के प्रयोगों से प्राप्त किये गये हैं। पाँच विभिन्न खेतों में एक सहस्र पाउंड खाद प्रति एकड़ की दर से डाली गई। सक्रिय उपादानों में से फास्फोरिक अम्ल तथा पोटाश को क्रमश 8 तथा 5 प्रतिशत पर स्थिर रखा गया, तथा नाइट्रोजन को निम्न प्रकार से बदला शून्य, 2 प्रतिशत, 3 प्रतिशत, 4 प्रतिशत, 5 प्रतिशत। सम्भवत. प्रयोग इस प्रकार से किया गया कि खेतों के बीच उत्पादन में अन्तर, भूमि उर्वरता, नालियों, तथा इसी प्रकार के अन्य तत्त्वों के कारण नहीं थे। तीन विभिन्न वर्षों में प्रयोग को दोहराया गया। कुल विचरण में से, उपयोग की गई नाइट्रोजन की बदलती हुई मात्रा से किस अनुपात का वर्णन किया जा सकता है? जबकि ऐसा सम्भव है कि प्रयोग पूर्ण रूप से अभिकल्पित नहीं था आंकड़े लगभग पूर्ण सहसम्बन्ध का संकेत करते हैं जब

$$Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$$

प्रकार के सम्बन्ध की कल्पना की जाती है। इसकी प्रकीर्ण आरेख, चार्ट 20.3, के परीक्षण द्वारा स्थूल ढंग से पड़ताल की जा सकती है। भारी क्षैतिज रेखाएँ प्रत्येक नाइट्रोजन की प्रतिशतताओं के औसत उत्पादन हैं, जिन्हें दिया गया है। ये साधन समस्या के समाधान



चार्ट 20.3. टिफ्टन, जार्जिया में खाद में प्रतिशत नाइट्रोजन तथा तम्बाकू का प्रति एकड़ उत्पादन। सारणी 20.2 के आंकड़े। क्षैतिज रेखाएँ नाइट्रोजन की प्रत्येक प्रतिशतता के लिए प्रति एकड़ औसत उत्पादन को प्रदर्शित करती हैं, जबकि वक्र तृतीयात समीकरण से परिकलित मूल्यों को प्रस्तुत करता है।

के लिए आवश्यक नहीं हैं, परन्तु ये आसजित किए जाने वाले वक्र के प्रकार की खोज करने में उपयोगी हैं।

प्रसामान्य समीकरणों का हल—क्योंकि चार स्थिरांकों का अवश्य पाना है, अतः निम्न प्रकार के चार प्रसामान्य समीकरणों का प्रयोग आवश्यक है[3]

$$\text{I} \quad \Sigma Y = Na + b\Sigma X + c\Sigma X^2 + d\Sigma X^3,$$

$$\text{II} \quad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 + d\Sigma X^4,$$

$$\text{III} \quad \Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 + d\Sigma X^5,$$

$$\text{IV} \quad \Sigma X^3Y = a\Sigma X^3 + b\Sigma X^4 + c\Sigma X^5 + d\Sigma X^6$$

अभीष्ट मूल्यों का सारणी 20 2 में परिकलन किया गया है, और उनके प्रतिस्थापनों का फल है निम्न चार प्रसामान्य समीकरण

$$\text{I} \quad 169\ 4 = 15a + 42b + 162c + 672d$$

$$\text{II} \quad 506\ 0 = 42a + 162b + 672c + 2\ 934d,$$

$$\text{III} \quad 197\ 198 = 162a + 672b + 2\ 934c + 13\ 272d,$$

$$\text{IV} \quad 822\ 884 = 672a + 2\ 934b + 13\ 272c + 61\ 542d$$

अपनी पूर्वगामी परिविधि का अनुसरण करके प्रत्येक स्थिति में a का निरसन करते हुए, हम I और II, II और III, III और IV, समीकरणों का इकट्ठा हल कर सकते हैं। इससे तीन समीकरण प्राप्त होते हैं

$$\text{A} \quad 48\ 222 = 666b + 5\ 276c + 15{,}786d$$

$$\text{B} \quad 80\ 256 = 1\ 980b + 14{,}364c + 82\ 116d$$

$$\text{C} \quad 790\ 152 = 25\ 724b + 178\ 416c + 1\ 051\ 020d$$

b का निरसन करते हुए अब हम A और B तथा फिर B और C को एक साथ हल कर सकते हैं। इस प्रकार समीकरण घटकर दो रह जाते हैं

$$\text{D} \quad -42\ 029\ 064 = 3\ 079\ 944c + 23\ 432\ 976d$$

$$\text{E} \quad -339{,}492\ 584 = 12\ 492\ 144c + 132\ 899\ 616d$$

समीकरण D तथा E को युगपत रूप से हल करके हम पाते हैं कि

$$d = -4\ 4648847$$

तथा

$$c = 20\ 323899$$

इन मूल्यों को समीकरण A B या C में प्रतिस्थापित करके हम मालूम होता है कि

$$b = 8\ 263630$$

b, c और d के लिए प्राप्त मूल्यों को समीकरण I, II III या IV, में प्रतिस्थापित कर हम

$$a = 890\ 32389$$

प्राप्त करते हैं।

---

3 यदि 1 प्रतिशत नाइट्रोजन के मान प्रथम लिए होते तो मूलबिन्दु आसानी से X मूल्यों के माध्य (2 5) पर लिया जा सकता था। तब X की विषम शक्तियों का योग शून्य हुआ होता और प्रसामान्य समीकरणों से आसान हो गया होता। तब हमारे पास युगपत हल करने में निम्न प्रसामान्य समीकरण के दो जोड़ होने चाहिएँ थे

$$\text{I} \quad \Sigma Y = Na + c\Sigma X^2 \qquad \text{II} \quad \Sigma XY = b\Sigma X^2 + d\Sigma X^4,$$

$$\text{III} \quad \Sigma X^2Y = a\Sigma X^2 + c\Sigma X^4 \qquad \text{IV} \quad \Sigma X^3Y = b\Sigma X^4 + d\Sigma X^6$$

सारणी 20.2

टिफ्टन, जार्जिया में खाद में प्रतिशत नाइट्रोजन तथा तम्बाकू के प्रति एकड़ उत्पादन के बीच सम्बन्ध के मापों को प्राप्त करने के लिए आवश्यक मूल्यों का परिकलन

(खाद प्रति एकड़ 1,000 पाउंड है, P_2O_5 तथा K_2O क्रमशः 8 और 5 प्रतिशत है। सभी खेतों में वर्ष 2 में उपज असाधारण रूप से ऊंची थी, परिणामतः वे एक उपादान द्वारा कम कर दी गई जिससे उनकी औसत को वर्ष 1 और वर्ष 3 की औसत तक घटा दिया।)

खेत संख्या तथा वर्ष	प्रतिशत नाइट्रोजन X	उपज पाउंडों में Y	XY	X^2Y	X^3Y	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	Y^2
खेत A :											
वर्ष 1	0	867	0	0	0	0	0	0	0	0	751,689
वर्ष 2	0	889	0	0	0	0	0	0	0	0	790,321
वर्ष 3	0	914	0	0	0	0	0	0	0	0	835,396
खेत B :											
वर्ष 1	2	1,094	2,188	4,376	8,752	4	8	16	32	64	1,196,836
वर्ष 2	2	1,101	2,202	4,404	8,808	4	8	16	32	64	1,212,201
वर्ष 3	2	1,092	2,184	4,368	8,736	4	8	16	32	64	1,192,464
खेत C											
वर्ष 1	3	1,206	3,618	10,854	32,562	9	27	81	243	729	1,454,436
वर्ष 2	3	1,180	3,540	10,620	31,860	9	27	81	243	729	1,392,400
वर्ष 3	3	1,157	3,471	10,413	31,239	9	27	81	243	729	1,338,649
खेत D											
वर्ष 1	4	1,281	5,124	20,496	81,984	16	64	256	1,024	4,096	1,640,961
वर्ष 2	4	1,238	4,952	19,808	79,232	16	64	256	1,024	4,096	1,532,644
वर्ष 3	4	1,224	4,896	19,584	78,336	16	64	256	1,024	4,096	1,498,176
खेत E											
वर्ष 1	5	1,235	6,175	30,875	154,375	25	125	625	3,125	15,625	1,525,225
वर्ष 2	5	1,237	6,185	30,925	154,625	25	125	625	3,125	15,625	1,530,169
वर्ष 3	5	1,219	6,095	30,475	152,375	25	125	625	3,125	15,625	1,485,961
	42	16,934	50,630	197,198	822,884	162	672	2,934	18,272	61,542	19,377,528

आंकड़े डब्ल्यू० जे० स्पिलमैन द्वारा लिखित यूज़ ऑफ दि एक्सपोनेन्शल यील्ड कर्व इन फर्टिलाइजर एक्सपरिमेन्ट्स, संयुक्त राज्य अमरीका के कृषि विभाग के टैक्निकल बुलेटिन संख्या 348, पृष्ठ 16—17 से।

वास्तव में X की शक्तियों का धारण करने वाले पांच स्तम्भ आवश्यक नहीं है। इन स्तम्भ योगों को प्राप्त करने का सबसे शीघ्र तरीका यह है कि प्रथम पांच प्राकृतिक अंकों की अभीष्ट शक्तियों के जोड़ों की जाँच करो, 1 घटाओ (क्योंकि $X=1$ लुप्त है), और 3 से गुणा करो (क्योंकि वर्ष तीन है)।

$$\overline{Y} = \frac{16934}{15} = 1,28.933 \text{ पाउंड}$$

$$= (890\ 32389)(16{,}934) + (78\ 263630)(50\ 630) + (20\ 323899)(197\ 198) + (-4\ 4648847)(822{,}884) - (1{,}128\ 93333)(16{,}934),$$
$$= 255\ 624$$
$$\Sigma y^2 = \Sigma Y - \bar{Y}\Sigma Y,$$
$$= 19\ 377\ 528 - (1\ 128\ 93333)(16{,}934),$$
$$= 260\ 171$$
$$\Sigma y^2{}_{\cdot Y X_1 X_2 X_3} = \Sigma y - \Sigma y^2{}_{c Y X_1 X_2 X_3},$$
$$= 260\ 171 - 255\ 624 = 4{,}547.$$

इनसे हम प्राप्त करते है

$$r^2_{Y X_1 X_2 X_3} = \frac{\Sigma y^2{}_{Y X_1 X_2 X_3}}{\Sigma y^2}$$
$$= \frac{255\ 624}{260\ 171} = 0\ 983$$
$$r_{Y X_1 X_2 X_3} = 0\ 991$$
$$s_{Y X_1 X_2 X_3} = \sqrt{\frac{\Sigma y^2{}_{\cdot Y X_1 X_2 X_3}}{N}},$$
$$= \sqrt{\frac{4\ 547}{15}} = 17\ 4 \text{ पाउड}$$

डूलिटल विधि—यह अवश्य स्वीकार किया जाना चाहिए कि जब चार समीकरणों का युगपत रूप से हल करना हो तो उपर्युक्त प्रविधि कुछ श्रम साध्य है। आगे, जब तक d का मूल्य प्राप्त नही किया जाता, तब तक कोई पड़ताल नही की जा सकती। c और d को प्राप्त करने के लिए आवश्यक दो समीकरणों (D और E) के हल के अतिरिक्त यह भी किसी कार्य की परिशुद्धता की जाँच नही करता। सारे के सारे पूर्वगामी श्रम को त्रुटियो से भर कर भी इन दो समीकरणों का हल रुक जाता। जब तक सभी स्थिराकों को प्राप्त नही कर लिया जाता तब तक चार प्रसामान्य समीकरणो के हल की परिशुद्धता पर हम कोई वास्तविक नियन्त्रण नही रख सकते। यदि अन्तिम नियन्त्रण असफल हो जाता है तो सारे कार्य को अवश्यमेव दोहराया जाना चाहिए।

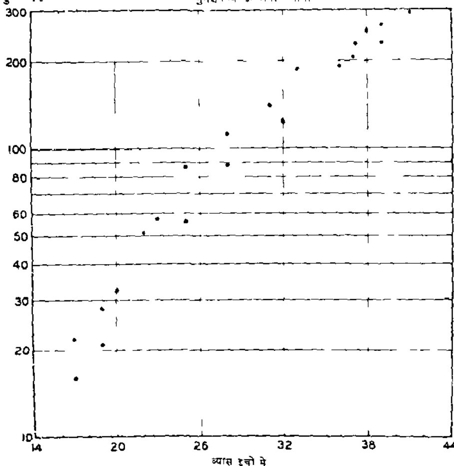
सौभाग्य से इस प्रकार के समीकरणों को युगपत् रूप से हल करने के लिए एक विधिवत तरीका है जो परिशुद्धता पर बहुधा नियन्त्रण प्रदान करता है और जब चार या चार से अधिक समीकरण हो तो पूर्व-वर्णित ढग से कम श्रम साध्य है। एम० एच० डूलिटल द्वारा विकसित किए जाने के कारण यह विधि डूलिटल विधि के नाम से प्रसिद्ध है। साख्यिकी शास्त्र मे और बहुत सी श्रम बचाने वाली युक्तियों के समान यह विधि प्रारम्भ में बहुत भ्रान्तिपूर्ण दिखाई देती है। एक निश्चित सीमा तक आवृत्तिमूलक नीरस[4] श्रम के लिए प्रविधि की जटिलता का प्रतिस्थापन है। अनेकधा सहसम्बन्ध समस्या मे (अध्याय 21 देखिए) जब चार या अधिक

4 इस प्रविधि के विस्तृत निरूपण के लिए मूल अंग्रेजी पुस्तक का द्वितीय संस्करण, पृष्ठ 498 503 देखिए।

स्वतन्त्र चर हों तो युगपत् समीकरणों के हल के लिए डूलिटल विधि का प्रयोग विशेष रूप से परामर्श के योग्य है।

रूपांतरों का प्रयोग

आकलन समीकरण के रूप में, द्वितीयांश वक्र या इससे ऊँचे दर्जे के वक्र के प्रयोग की अपेक्षा हम एक या दोनों चरों के लिए पाठ्यांकों को एक विभिन्न रूप में बदल सकते हैं। सबसे अधिक प्रयुक्त रूपान्तरों के अन्तर्गत लघुगणक, व्युत्क्रम, मूल या शक्तियाँ तथा लघुगणकों के लघुगणक आते हैं। अधिकतर एक रूपान्तरण दो रूपान्तरित श्रेणियों के बीच रेखिक सम्बन्ध प्रदर्शित करेगा। व्यास के आँकडों तथा पोडरोसा देवदार वृक्षों के आयतन के लिए, जिनका इस अध्याय में पहले प्रयोग किया गया था हम लघुगणकों, मूलों तथा व्युत्क्रमों के प्रयोग पर विचार करेंगे। पहले हम रूपान्तरों का लेखाचित्रीय विधि से परीक्षण करेंगे। तत्पश्चात् उन रूपान्तरों के लिए आँकडों के सहसम्बन्ध का विश्लेषण किया



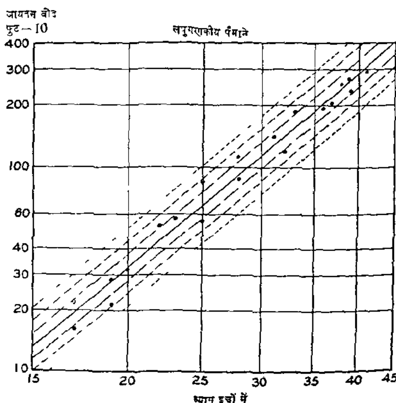
चार्ट 20.4 बीस पोडरोसा देवदार वृक्षों के व्यास तथा आयतन का एक अर्ध-लघुगणकीय ग्रिड पर प्रकन। सारणी 20.3 के आंकडे।

जाएगा जो सर्वाधिक उचित दिखाई देते है। अन्य रूपान्तरो को केवल प्रतीकात्मक रूपो मे वर्णित किया जाएगा।

प्रारम्भिक परीक्षण—अध्याय 5 मे अर्ध-लघुगणकीय चार्ट के साथ अपने अनुभव के आधार पर, यह सोचना तर्कसगत दिखाई देता है कि यदि लघुगणकीय ऊर्ध्वाधर पैमाने के साथ ग्रिड का प्रयोग करें तो चार्ट 20 1 का प्रकीर्ण आरेख सीधा हो सकता है। इस परिस्थिति मे हम

$$(\log Y)_c = \log a + X \log b$$

प्रकार[5] के आकलन समीकरण का प्रयोग करेंगे। इस प्रकार का प्रकीर्ण आरेख चार्ट 20 4 मे दिखाया गया है, और यह स्पष्ट है कि लघु Y तथा X के बीच का सम्बन्ध रेखिक नहीं है।



चार्ट 20 5 बीस पोडरोसा देवदार वृक्षो का आयतन तथा व्यास और ±1, ±2, तथा ±3 आकलन की मानक त्रुटियो के क्षेत्रों के साथ (लघु $Y)_c$ = लघु $a+b$ लघु X प्रकार का आकलन समीकरण, लघुगणकीय ग्रिड पर प्रदर्शित। सारणी 20 3 के आकड। आकलन समीकरण को गहरी रेखा से दिखाया गया है।

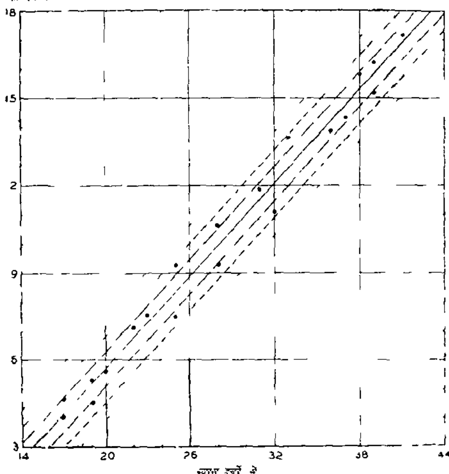
---

5. यह स्पष्ट करने के लिए कि हम "Y के परिकलित मूल्य के लघुगणक" के साथ नही, अपितु "लघु Y_c के परिकलित मूल्य" का वर्णन कर रहे हैं, लघु Y_c की अपेक्षा (लघु $Y)_c$ चिह्न का प्रयोग किया जाता है। इसी प्रकार के कारणो से आगे आने वाले अनुच्छेदो मे $\sqrt{Y_c}$ की अपेक्षा $(\sqrt{Y})_c$ का और $\frac{1}{Y_c}$ की अपेक्षा $\left(\frac{1}{Y}\right)_c$ का प्रयोग किया जाता है।

चार्ट 20 5 मे एक ग्रिड पर जिसके दोनो ऊर्ध्वाधर तथा क्षैतिज लघुगणकीय पैमाने हैं, उन्ही आँकडो का अकन किया गया है। इस रूपान्तर मे

$$(\log Y)_c = \log a + b \log X$$

प्रकार के आकलन समीकरण के प्रयोग की आवश्यकता पडती है। चार्ट 20 5 का प्रकीर्ण आरेख यह सकेत करता है कि लघु Y तथा लघु X के बीच सम्बन्ध वस्तुत रेखिक है।[6]



चार्ट 20 6. बीस पोंडरोसा देवदार वृक्षो के आयतन का व्यास और वर्गमूल तथा आकलन की ±1, ±2 और ±3 मानक त्रुटियो के क्षेत्रों के साथ, $(\sqrt{Y})_c = a+b$ \ प्रकार का आकलन समीकरण जिसे एक अकगणितीय ग्रिड पर दिखाया गया है। सारणी 20 4 क आकड। आकलन समीकरण को गहरी रेखा द्वारा दिखाया गया है। इस चार्ट क लिए एक वर्गमूल ऊर्ध्वाधर पैमाने का प्रयोग किया जा सकता था। वर्गमूल ऊर्ध्वाधर पैमाने तथा अकगणितीय क्षैतिज पैमाने का प्रयोग करने वाला ग्रिड यहाँ प्रयुक्त नहा किया गया क्योकि पाठक को इस प्रकार का रेखाकित पत्र एकदम प्राप्य नहा है। समान अन्तराल वाल ऊर्ध्वाधर पैमाना मूल्य 0, 1, 4, 9, 16 25, तथा इसी प्रकार आग हो सकते हैं।

---

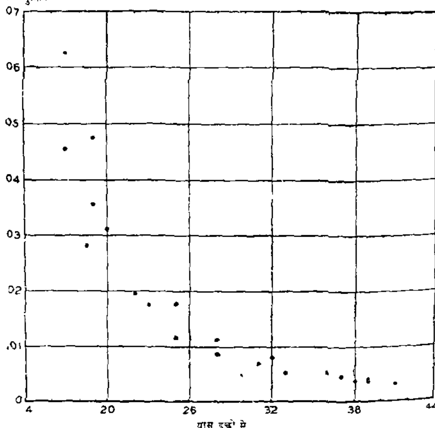
6 कई बार $Y_c = a+b$ लघु X प्रकार का आकलन समीकरण समुचित होता है। विवरण के लिए देख, एफ० इ० क्राक्स्टन द्वारा लिखित एलिमेन्टरी स्टैटिस्टिक्स विद एप्लिकेशन्स इन मेडिसिन एन्ड दि बायलाजिकल साइन्सिज, डावर प्रकाशन, इन्कॉर्पोरेटिड, न्यूयार्क, 1959, पृष्ठ 152—157।

एक और रूपान्तर है जो सम्भवत पूर्व परीक्षित दोनो से अधिक तर्कसगत है। क्योंकि बेलन का आयतन प्रत्यक्ष रूप से इसकी लम्बाई तथा गोलाकार अनुप्रस्थ काट के अर्ध व्यास (या व्यास) के वर्ग से सम्बन्धित होता है, अत यह तर्कसगत दिखाई देगा कि ऐसे रूपान्तर का परीक्षण किया जाए जिसके अन्तर्गत $\sqrt{Y}$ और X आते हो। वास्तव मे वृक्ष बेलन नही है,[7] पर चार्ट 20 6 एक प्रकीर्ण आरेख को प्रदर्शित करता है जो पहले की अपेक्षा रैखिक के अधिक निकट लगता है। इस सम्बन्ध के लिए आकलन समीकरण

$$(\sqrt{Y})_c = a + bX$$

प्रकार[8] का बन जाएगा।

यद्यपि यह आशा करना तर्कसगत नही है कि $\frac{1}{Y}$ और X इन आंकडो के लिए एक



चार्ट 20 7 बीस पोंडरोसा देवदार वृक्षो के आयतन का तथा व्यास व्युत्क्रम अकगणितीय ग्रिड पर प्रदर्शित। सारणी 20 1 के आकड जो Y मूल्यो के व्युत्क्रमो को नही दिखाती।

---

7 देखें मूल अग्रेजी पुस्तक के द्वितीय सस्करण के पृष्ठ 234 पर सारणी 20 1 के नीचे उल्लिखित सकेत।

8 देखें टिप्पणी 5।

रेखिक प्रकीर्ण आरेख बनाएँगे, तथापि चार्ट 20 7 तैयार किया गया है। यह स्पष्ट है कि इन आँकडो के लिए यह सम्बन्ध उपयुक्त नही है, यद्यपि अन्य श्रेणियो के लिए यह कभी-कभी उपादेय है। आकलन समीकरण $\left(\frac{1}{Y}\right)_e = a + bX$ प्रकार[9] का होगा।

पाठको ने ध्यान दिया होगा कि चार्ट 20 4 और 20 5 मे प्रयुक्त ग्रिडो की इस प्रकार रचना की गई थी कि वास्तविक X मूल्यो तथा Y मूल्यो का अकन किया गया था। चार्ट 20 6 और 20 7 मे विशिष्ट ग्रिड का प्रयोग नही था अपितु अकगणितीय पैमानो को काम मे लाया गया था और X मूल्यो के सामने $\sqrt{Y}$ तथा $\frac{1}{Y}$ मूल्यो को अकित किया गया था। 20.6 तथा 20 7 चार्टो के लिए विशेष ग्रिडो का प्रयोग किया जा सकता था, इनका इसलिए प्रयोग नही किया गया क्योकि वे पाठक को तत्काल प्राप्त नही है।

अब हम लघु Y, लघु X के सम्बन्ध तथा $\sqrt{Y}$, X के सम्बन्ध के लिए विभिन्न सहसम्बन्ध मापो का परिकलन प्रारम्भ करेगे। लघु Y, X के सम्बन्ध तथा $\frac{1}{Y}$, X के सम्बन्ध को केवल चिह्नो के रूप मे विचारा जायगा। क्योकि सम्बन्धित चार समीकरण प्रकारो मे से प्रत्येक को आकलन समीकरण मे केवल दो अज्ञातो की आवश्यकता पडती है, अत सभी प्रविधियाँ, जैसा कि अध्याय 19 मे वर्णित है, समूहित आँकडो के रेखिक सहसबध की प्रविधियो के समान होगी। सूत्र वैसे ही रहेगे जैसे कि पहले प्रयुक्त किए गए थे, अतिरिक्त इसके कि (1) लघु $Y, \sqrt{Y}$ या $\frac{1}{Y}$ को Y के लिए तथा (2) लघु X को X के लिए प्रतिस्थापन किया जाएगा जब हम लघु Y, लघु X सम्बन्ध का प्रयोग करते हैं।

क्योकि चार रूपातरो के अन्तर्गत जिन पर विचार किया जाएगा, Y मूल्यो के लघुगणक, वर्ग मूल, या व्युत्क्रम आते है, अत दो बातो को ध्यान मे रखना चाहिए (1) न्यूनतम वर्गो का जोड $Y - Y_e$ मूल्यो के वर्गो के योग को निम्नतम नही करता, यह परिकलित रूपान्तरित Y मूल्यो से रूपान्तरित प्रेक्षित Y मूल्यो के विचलनो के वर्गो के योग को निम्नतम करता है, तथा (2) जब आकलन समीकरण से यथार्थ Y मूल्यो के प्रसार की मात्रा का वर्णन कर रह हो, तो जब दोनो ही रूपान्तरित इकाइया के रूप मे हो तो आकलन की मानक त्रुटि को अवश्यमेव परिकलित Y मूल्यो मे जोडा जाना चाहिए और उनमे से घटाना चाहिए, जोड तथा घटाव के बाद परिणामो को मूल Y श्रेणी की इकाइयो मे पुन रूपान्तरित किया जा सकता है।

लघु Y, लघु X सम्बन्ध—चार्ट 20.5 मे यह सकेत किया गया था कि व्यास तथा आयतन मे सम्बन्ध लगभग रेखिक था जब दोनो श्रेणियो को लघुगणको के रूप मे व्यक्त किया गया था। आकलन समीकरण

$$(\text{लघु } Y)_e = \text{लघु } a + b\,\text{लघु } X$$

प्रकार का है और प्रसामान्य समीकरणो

$$\text{I} \quad \Sigma\text{लघु } Y = N\,\text{लघु } a + b\,\Sigma\text{लघु } X,$$
$$\text{II.} \quad \Sigma(\text{लघु } X.\text{लघु } Y) = \text{लघु } a\,\Sigma\text{लघु } X + b\,\Sigma(\text{लघु } X)^2$$

को युगपत् रूप से हल करके स्थिराक लघु a तथा b प्राप्त किए जाते हैं।

9. पादटिप्पणी 5 देखिए।

इन समीकरणा म, सारणी 20 3 (लघुगणक परिशिष्ट द म हैं) से मूल्यो को प्रतिस्थापित करन म

$$\text{I}\quad 38\ 727389 = 20 \text{ लघु } a + 28\ 728012\ b,$$

$$\text{II}\quad 56\ 619891 = 28\ 728012 \text{ लघु } a + 41\ 581145\ b.$$

प्राप्त होन हैं। युगपत हल प्रदान करता है

$$\text{लघु } a = -2\ 569125 \text{ तथा}$$

$$b = 3\ 136656$$

आकलन समीकरण को अब लिखा जा सकता है

$$(\text{लघु } Y)_c = -2\ 569125 + 3\ 136656 \text{ लघु } X$$

क्योंकि आकलन समीकरण जिसे हम प्रयुक्त कर रहे हैं,

$$Y_c = aX^b$$

का रखिक रूप है अत मूल आंकडा के रूप म आकलन समीकरण

$$Y_c = 0\ 002697 X^{3\ 136656}$$

है।

सारणी 20 3

उन मूल्यों का परिकलन जिनको बीस पोडरोसा देवदार वृक्षो के व्यास के लघुगणक तथा आयतन के लघुगणक के बीच सम्बन्ध क मापो का निर्धारण करने के लिए प्रयुक्त किया गया

(लघुगणको का परिशिष्ट द म प्राप्त किया गया है।)

छाती की ऊँचाई पर व्यास (इंच) X	आयतन* (बोर्ड फुट -10) Y	लघु X	लघु Y	लघुX लघुY	(लघु X)^2	(लघु Y)^2
36	192	1 556303	2 283301	3 553508	2 422079	5 213463
28	113	1 447158	2 053078	2 971128	2 094266	4 215129
28	88	1 447158	1 944483	2 813974	2 094266	3.781014
41	294	1 612784	2 468347	3 980911	2 601072	6 092737
19	28	1 278754	1 447158	1 850559	1 635212	2 094266
32	123	1 505150	2 089905	3 145621	2 265477	4 367703
22	51	1 342423	1 707570	2 292281	1 802100	2.915795
38	252	1 579784	2 401401	3 793695	2 495717	5 766727
25	56	1 397940	1 748188	2 443862	1 954236	3 056161
17	16	1 230449	1 204120	1 481608	1 514005	1 449905
31	141	1 491362	2 149219	3 205264	2.224161	4.619142
20	32	1.301030	1 505150	1 958245	1 692679	2 265477
25	86	1 397940	1 934498	2 704312	1 954236	3 742283
19	21	1 278754	1 322219	1 690793	1 635212	1 748263
39	231	1 591065	2.363612	3 760660	2 531488	5.586662
33	187	1 518514	2 271842	3 449824	2 305885	5 161266
17	22	1 230449	1 342423	1 651783	1 514005	1 802100
37	205	1 568202	2 311754	3 625297	2 459258	5 344207
23	57	1 361728	1 755875	2 391024	1 854303	3 083097
39	265	1 591065	2 423246	3 855542	2 531488	5 872121
569	2,460	28 728012	38 727389	56 619891	41 581145	78 177518

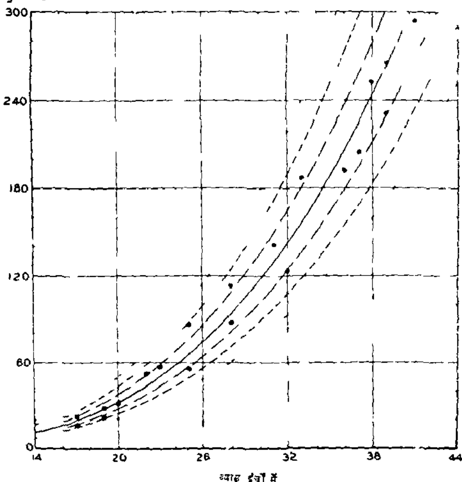
*सारणी 20 1 की टिप्पणी देखें।

आंकडो के स्रोत के लिए, देखें सारणी 20 1।

(ध्यान दीजिए कि लघु $a = -2.569125 = 7.430875 - 10$ तथा इसका प्रतिलघु 0.002697 है।) आकलन समीकरण को चार्ट 20.5 पर दिखाया गया है जिसके लघुगणकीय पैमाने है, और चार्ट 20.8 पर जिसके अकगणितीय पैमाने हैं।

जहा लघु $\overline{Y} = \frac{\Sigma \text{लघु } Y}{N} = \frac{38.727389}{20} = 1.93636945$ है वहाँ कुल विचरण है[10]

$$\Sigma(\text{लघु } y)^2 = \Sigma(\text{लघु } Y)^2 - (\overline{\text{लघु } Y})\Sigma \text{लघु } Y$$



चार्ट 20.8 बीस पोडरोसा देवदार वृक्षो का आयतन तथा व्यास और आकलन की ±1, ±2, तथा ±3 मानक त्रुटियो के क्षेत्रों के साथ $(\text{लघु } Y)_c = \text{लघु } a + b \text{ लघु } Y$ प्रकार का आकलन समीकरण अकगणितीय ग्रिड पर प्रदर्शित। सारणी 20.3 के आकड। आकलन समीकरण को गहरी रेखा स दिखाया गया है।

---

10 ध्यान दीजिए कि $\Sigma(\text{लघु } y)^2 = \Sigma[\text{लघु } Y - (\overline{\text{लघु } Y})]^2 = \Sigma\left(\text{लघु } Y - \frac{\Sigma \text{लघु } Y}{N}\right)^2$ यह $\Sigma[\text{लघु } (Y - \overline{Y})]^2$ नहीं है। इसी प्रकार, $\Sigma(\text{लघु } y)_c^2 = \Sigma[(\text{लघु } Y)_c - (\overline{\text{लघु } Y})]^2$ और $\Sigma(\text{लघु } y)_s^2 = \Sigma[\text{लघु } Y - (\text{लघु } Y)_c]^2$

कुल विचरण के लिए संख्यात्मक मूल्य है

$$\Sigma(\text{लघु } Y)^2 = 78\ 177518 - (1.93636945)(38.727389),$$
$$= 3\ 186985.$$

व्याख्यात विचरण है[11]

$$\Sigma(\text{लघु } y)_c^2 = \text{लघु } a\, \Sigma\, \text{लघु } Y + b\Sigma(\text{लघु } X \text{ लघु } Y) - (\overline{\text{लघु } Y})\, \Sigma\, \text{लघु } Y,$$
$$= (-2\ 569125)(38.727389) + (3.136656)(56.619891) - (1.93636945)(38\ 727389),$$
$$= 3.111085.$$

अव्याख्यात विचरण को अब घटा कर प्राप्त किया जा सकता है

$$\Sigma(\text{लघु } y)_s^2 = \Sigma(\text{लघु } y)^2 - \Sigma(\text{लघु } y)_c^2,$$
$$= 3\ 186985 - 3\ 111085 = 0\ 075900$$

महसम्बन्ध तथा निर्धारण के गुणाक है

$$r^2_{\text{लघु } Y \text{ लघु } X} = \frac{\Sigma(\text{लघु } y)_c^2}{\Sigma(\text{लघु } y)^2} = \frac{3\ 111085}{3\ 186985} = 0\ 976 \text{ तथा}$$
$$r_{\text{लघु } Y \text{ लघु } X} = +0\ 988.$$

हम महसम्बन्ध गुणाक के लिये एक चिह्न दिखा सकते है, क्योकि लघु Y तथा लघु X के बीच सम्बन्ध रेखिक है ।

क्योकि आकलन समीकरण के अन्तर्गत केवल दो स्थिराक आते है, अत हम सशोधित उत्पाद घूर्ण सूत्र के प्रयोग द्वारा सहसम्बन्ध के गुणाक का परिकलन कर सकते हैं । यह स्मरण किया जाएगा कि यह व्यजक आकलन समीकरण मे पहले स्थिराको को ज्ञात किए *बिना महसम्बन्ध गुणाक को प्राप्त करने की अनुमति देता है ।* लघु Y तथा लघु X के लिये,

$$r_{\text{लघु } Y \text{ लघु } X} = \frac{N\Sigma(\text{लघु } X \text{ लघु } Y) - (\Sigma\, \text{लघु } X)(\Sigma\, \text{लघु } Y)}{\sqrt{[N\Sigma(\text{लघु } X)^2 - (\Sigma\, \text{लघु } X)^2][N\Sigma(\text{लघु } Y)^2 - (\Sigma\, \text{लघु } Y)^2]}},$$
$$= \frac{20(56\ 619891) - (28\ 728012)(38\ 727389)}{\sqrt{[20(41\ 581145) - (28.728012)^2][20(78.177518) - (38.727389)^2]}},$$
$$= +0\ 988.$$

आकलन की मानक त्रुटि है

$$s_{\text{लघु } Y \text{ लघु } X} = \sqrt{\frac{\Sigma(\text{लघु } y)_s^2}{N}} = \sqrt{\frac{0.075900}{20}} = 0\ 061604$$

---

11. यदि हम दोनों (लघु $Y)_c$ = लघु $a + b$ लघु X तथा (लघु $Y)_c$ = लघु $a + X$ लघु b, मे $\Sigma(\text{लघु } y)_c^2$ तथा $\Sigma(\text{लघु } y)_s^2$ का परिकलन कर रहे हो तो चिह्नो द्वारा या किसी और प्रकार से व्याख्यात विचरण और अव्याख्यात विचरण को प्राप्त करन की दो विधियो के बीच भेद करने की सम्भवत हम इच्छा करेंगे ।

आकलन की $\pm 1, 2,$ *तथा 3 मानक त्रुटियों के क्षेत्रों को* चार्ट 20.5 और 20.8 पर दिखाया गया है। ध्यान दीजिये कि चार्ट 20.8 पर X का मूल्य जितना अधिक बढ़ता है, प्रकीर्ण क्षेत्र उतने ही आकलन समीकरण से पृथक् होते जाते हैं। चार्ट 20.5 पर क्षेत्र सर्वदा समान अन्तर पर हैं क्योंकि पैमाने लघुगणकीय है।

एक Y_c *मूल्य का परिकलन तथा आकलन की मानक त्रुटि का किस प्रकार प्रयोग* किया जाता है इसे प्रदर्शित करना अच्छा हो सकता है। जब $X=30$ (जिसके लिये लघु $X=1.477121$) तो (लघु $Y)_c$ का मूल्य निश्चित करने के लिये, हम लिखते है

$$(\text{लघु } Y)_c = -2.569125 + (3.136656)(1.477121),$$
$$= 2.064095$$

इसका प्रतिलघु है 115.9 ताकि $Y_c = 115.9$ बोर्ड फुटों के दशक। आकलन की $\pm$ एक *मानक त्रुटि की सीमाओं को प्राप्त करने के लिये हम लिखते है*

$$\text{प्रतिलघु } [(\text{लघु } Y)_c \pm s_{\text{लघु}Y\ \text{लघु}X}] = \text{प्रतिलघु } (2.064095 \pm 0.061604),$$
$$= \text{प्रतिलघु } 2.002491 \text{ तथा } 2.125699,$$
$$= 100.6 \text{ तथा } 133.6 \text{ बोर्ड फुटों के दशक।}$$

आकलन की $\pm$ दो मानक त्रुटियों की सीमाओं के लिए हम परिकलन करते है

$$\text{प्रतिलघु } [(\text{लघु } Y)_c \pm 2s_{\text{लघु}Y\ \text{लघु}X}] = \text{प्रतिलघु } (2.064095 \pm 0.123208),$$
$$= 87.3 \text{ तथा } 153.9 \text{ बोर्ड फुटों के दशक}$$

आकलन की $\pm$ तीन मानक-त्रुटियों की सीमाओं के लिये

$$\text{प्रतिलघु } [(\text{लघु } Y)_c \pm 3s_{\text{लघु}Y\ \text{लघु}X}] = \text{प्रतिलघु}(2.064095 \pm 0.184812)$$
$$= 75.7 \text{ तथा } 177.4 \text{ बोर्ड फुटों के दशक।}$$

इसी ढंग से X *के अन्य मूल्यों पर आधारित आयतन के आकलनों के लिये सीमाओं* को प्राप्त किया जा सकता है। हाँ, इसे अवश्यमेव स्मरण रखना चाहिये कि सारणी में प्रतिलघुओं को देखने से पूर्व (लघु $Y)_c$ मूल्य तथा $s_{\text{लघु}Y\ \text{लघु}X}$ मूल्य को आपस में अवश्य जोड़ लेना चाहिये। विकल्प स्वरूप Y_c मूल्यों का आकलन की मानक त्रुटि के एक अनुपात के रूप में प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिये,

$$\text{प्रतिलघु } s_{\text{लघु}Y\ \text{लघु}X} = \text{प्रतिलघु } 0.061604 = 1.1524 \text{ तथा}$$
$$\text{प्रतिलघु} - s_{\text{लघु}Y\ \text{लघु}X} = \text{प्रतिलघु} - 0.061604 = \text{प्रतिलघु } 9.938396 - 10,$$
$$= 0.8678$$

आकलन की $\pm$ एक मानक त्रुटि की सीमाओं को प्राप्त करने के लिये हमारे आकलन समीकरण से परिकलित किन्हीं Y_c मूल्यों को अब इन अनुपातों से गुणा किया जा सकता है। उस अवस्था में जब $X=30$ तथा $Y_c=115.9$, तो हम वही मूल्य

$$115.9 \times 1.1524 = 133.6 \text{ तथा}$$
$$115.9 \times 0.8678 = 100.6 \text{ बोर्ड फुटों के दशक}$$

प्राप्त करते है जो कि पहले प्राप्त किये थे। *आकलन की* $\pm$ *दो या तीन मानक त्रुटियों* की सीमाओं के लिए प्रविधि वही है, अपवाद यह है कि प्रारम्भिक पग के अन्तर्गत

rलघु$_Y$ लघु$_X$ को 2 या 3 से गुणा करना पडता है या अभी अभी प्राप्त अनुपातों के वर्ग या घन किये जा सकते हैं।

$\sqrt{Y}, X$ सम्बन्ध—क्योंकि चार्ट 20 6 का प्रकीर्ण आरेख चार्ट 20 5 के प्रकीर्ण आरेख से अधिक लगभग रेखिक दिखाई देता है अत हमे लघु Y, लघु X सम्बन्ध की अपेक्षा $\sqrt{Y}$ Y सम्बन्ध के लिये सहसम्बन्ध या निर्धारण के उच्चतर गुणाक की प्राप्त करने की आशा करनी चाहिये। तथापि वे गुणाक जिनका हम परिकलन करने वाले हैं उन गुणाको से बहुत ऊँचे नहीं हो सकते जो अभी अभी प्राप्त किये गए हैं क्योंकि हमने पाया था कि r^2लघु$_Y$ लघु$_X = 0\ 976$ तथा rलघु$_Y$ लघु$_X = +0\ 988$

सारणी 20 4

बीस पोंडरोसा देवदार वृक्षों के आयतन के वर्गमूल तथा व्यास के बीच सम्बन्ध के मापो के निर्धारण के लिये प्रयुक्त मूल्यो की सगणना

(वर्गमूलो को परिशिष्ट थ से प्राप्त किया जा सकता है।)

छाती की ऊचाइ पर व्यास (इच) X	आयतन* (बोड फुट —10) Y	$\sqrt{Y}$	$X\sqrt{Y}$	X
36	192	13 86	498 96	1 296
28	113	10 63	297 64	784
28	88	9 38	262 64	784
41	294	17 15	703 15	1 681
19	28	5 29	100 51	361
32	123	11 09	354 88	1 024
22	51	7 14	157 08	484
38	252	15 87	603 06	1,444
25	56	7 48	187 00	625
17	16	4 00	68 00	289
31	141	11 87	367 97	961
20	32	5 66	113 20	400
25	86	9 27	231 75	625
19	21	4 58	87 02	361
39	231	15 20	592 80	1,521
33	187	13 67	451 11	1 089
17	22	4 69	79 73	289
37	205	14 32	529 84	1 369
23	57	7 55	173 65	529
39	265	16 28	634 92	1 521
569	2 460	204 98	6 494 91	17 437

* सारणी 20 1 की टिप्पणी देखें।

आकडो के स्रोत के लिये सारणी 20 1 देखें।

आकलन समीकरण

$$(\sqrt{Y})_c = a + bX$$

प्रकार का है, और प्रसामान्य समीकरण

$$\text{I} \quad \Sigma\sqrt{Y} = Na + b\Sigma X,$$
$$\text{II} \quad \Sigma X\sqrt{Y} = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

है। सारणी 20 4 से मूल्यो का प्रतिस्थापन करने से (वर्ग तथा वर्गमूल परिशिष्ट थ मे दिये गए हैं), हम

$$\text{I} \quad 204\ 98 = 20a + 569b, \text{ तथा}$$
$$\text{II} \quad 6{,}494\ 91 = 569a + 17{,}437b,$$

प्राप्त करते है, जब इन्हें युगपत् रूप से हल किया जाता है तो ये

$$a = -4\ 8587836 \text{ तथा}$$
$$b = 0\ 5313293$$

प्रदान करते है।

तब, आकलन समीकरण

$$(\sqrt{Y})_c = -4\ 86 + 0\ 531X,$$

है, जिसे चार्ट 20 6 पर प्रदर्शित किया गया है जहाँ $\sqrt{Y}$ मूल्यो तथा X मूल्यो का अङ्कन किया गया है, तथा चार्ट 20 9 पर दिखाया गया है जिस पर Y तथा X मूल्य दृष्टिगोचर होते है।

$$\Sigma(\sqrt{y})^2 = \Sigma(\sqrt{Y})^2 - \overline{\sqrt{Y}}\Sigma\sqrt{Y} = \Sigma Y - \overline{\sqrt{Y}}\Sigma\sqrt{Y},$$

से[12] कुल विचरण का परिकलन किया गया है, जहाँ

$$\overline{\sqrt{Y}} = \frac{\Sigma\sqrt{Y}}{N} = \frac{204\ 98}{20} = 10\ 249 \text{ कुल विचरण है}$$

$$\Sigma(\sqrt{y})^2 = 2{,}460 - (10\ 249)(204\ 98) = 359\ 1600$$

व्याख्यात विचरण है

$$\Sigma(\sqrt{y})^2_c = a\Sigma\sqrt{Y} + b\Sigma X\sqrt{Y} - \overline{\sqrt{Y}}\Sigma\sqrt{Y}$$
$$= (-4\ 8587836)(204\ 98) + (0\ 5310293)(6{,}494\ 91) - (10\ 249)(204\ 98),$$
$$= 352\ 1940$$

अव्याख्यात विचरण है

$$\Sigma(\sqrt{y})^2_s = \Sigma(\sqrt{y})^2 - \Sigma(\sqrt{y})^2_c,$$
$$= 359\ 1600 - 352\ 1940 = 6\ 9660.$$

---

[12] ध्यान दीजिये कि $\Sigma(\sqrt{y})^2 = \Sigma(\sqrt{Y} - \overline{\sqrt{Y}})^2 = \Sigma\left(\sqrt{Y} - \frac{\Sigma\sqrt{Y}}{N}\right)^2$

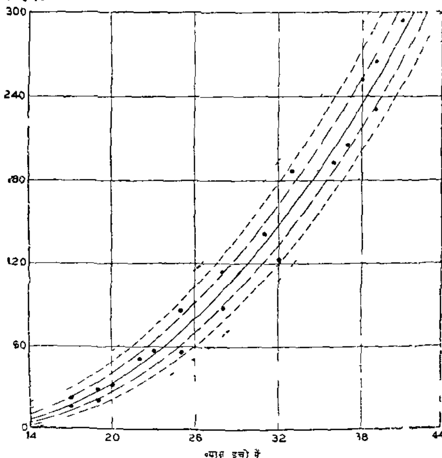
यह $\Sigma(\sqrt{Y - \overline{Y}})^2$ नहीं है। इसी प्रकार, $\Sigma(\sqrt{y})^2_c = \Sigma[(\sqrt{Y})_c - \overline{\sqrt{Y}}]^2$ तथा $\Sigma(\sqrt{y})^2_s = \Sigma[\sqrt{Y} - (\sqrt{Y})_c]^2$

निर्धारण के गुणाक को

$$r^2_{\sqrt{Y}X} = \frac{\Sigma(\sqrt{y})_c^2}{\Sigma(\sqrt{y})^2},$$
$$= \frac{352.1940}{359\ 1600} = 0\ 981$$

स प्राप्त किया जाता है। यह मूल्य उस मूल्य से थोडा सा अधिक है जिसे द्वितीयाश समीकरण ($r^2_{Y\ XX^2}=0\ 978$) के प्रयोग से प्राप्त किया था, और उससे भी अधिक है जब लघुगणकीय आकलन समीकरण (r^2 लघु$_Y$ लघु$_X = 0\ 976$) का प्रयोग किया गया था। सहसम्बन्ध का गुणाक निर्धारण के गुणाक का वर्गमूल है,

$$r_{\sqrt{Y}X} = +0\ 990,$$



चार्ट 20 9 बीम पोडरोसा देवदार वृक्षो का आयतन तथा व्यास तथा आकलन की ±1 ±2, एव ±3, मानक त्रुटियो के क्षेत्रो के साथ, $(\sqrt{Y})_c = a + bY$, प्रकार का आकलन समीकरण एक अकगणितीय ग्रिड पर प्रदर्शित। सारणी 20 4 के आँकड़े। आकलन समीकरण को गहरी रेखा से दिखाया गया है।

अथवा यदि a तथा b का परिकलन न किया गया हो तो इसे निम्नलिखित से ज्ञात किया जा सकता है

$$r_{\sqrt{Y}X}=\frac{N\Sigma X\sqrt{Y}-(\Sigma X)(\Sigma\sqrt{Y})}{\sqrt{[N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2][N\Sigma Y-(\Sigma\sqrt{Y})^2]}},$$

$$=\frac{20(6,494\ 91)-(569)(204\ 98)}{\sqrt{[20(17,437)-(569)^2][20(2,460)-(204\ 98)^2]}},$$

$$=+0\ 990$$

आकलन की मानक त्रुटि

$$s_{\sqrt{Y}X}=\sqrt{\frac{\Sigma(\sqrt{v})^2_s}{N}}=\sqrt{\frac{6\ 9660}{20}}=0\ 590$$

आकलन की $\pm 1, 2,$ तथा 3 मानक त्रुटियो के क्षेत्र चार्ट 20 6 तथा 20 9 पर अंकित हैं। लघुगणकीय सम्बन्ध के समान, X की वृद्धि के साथ-साथ निरपेक्ष दृष्टि से क्षेत्र विस्तृत होते चले जाते है। इसे चार्ट 20 9 मे देखा जा सकता है। चार्ट 20 6 मे क्षेत्र एक जैसे अन्तर पर है क्योंकि $\sqrt{Y}$ मूल्यो को आलेखित किया गया था।

जब $X=30$ तो Y_c के मूल्य को निम्न प्रकार से प्राप्त किया जाता है

$$(\sqrt{Y})_c=-4\ 86+(0\ 531)(30)=11\ 07$$

क्योंकि $(\sqrt{Y})_c=11\ 07$, $Y_c=(11\ 07)^2=122\ 5$ बोर्ड फुटो के दशक। आकलन की $\pm$ एक मानक त्रुटि की सीमाओं को प्राप्त करने के लिये हम $[(\sqrt{Y})_c\pm s_{\sqrt{Y}X}]^2=(11\ 07\pm 0\ 59)^2=109\ 8$ तथा 136 0 बोर्ड फुटो के दशक का परिकलन करते हैं। परिकलन की $\pm$ दो मानक त्रुटिया की सीमाओ का

$$[(\sqrt{Y})_c\pm 2s_{\sqrt{Y}X}]^2=[11\ 07\pm 2(0\ 59)]^2$$

$=97\ 8$ तथा 150 1 बोर्ड फुटो के दशक

से परिकलन किया जाता है। आकलन की $\pm$ तीन मानक त्रुटियो की सीमाओ के लिय

$$[(\sqrt{Y})_c\pm 3s_{\sqrt{Y}X}]^2=[11\ 07\pm 3(0\ 59)]^2$$

$=86\ 5$ तथा 164 9 बोर्ड फुटो के दशक।

इसी प्रकार से आयतन के अन्य आकलनो के लिए सीमाओ का परिकलन किया जा सकता है। यह स्मरण रखना महत्वपूर्ण है कि वर्गो को प्राप्त करने से पूर्व $(\sqrt{Y})_c$ तथा $s_{\sqrt{Y}X}$ मूल्यो को अवश्य मिला देना चाहिय।

वृक्षो के व्यास और आयतन के लिये तीन अरेखिक सम्बन्धो की तुलना—यद्यपि यह स्पष्ट है कि पाडरोसा देवदार वृक्षा के आयतन और व्यास के बीच सहसम्बन्ध का वर्णन करने के लिये तीन अरेखिक आकलन समीकरणा म से कोई भी एक रेखिक समीकरण की अपेक्षा प्राथमिकता देने योग्य है, तथापि यह स्पष्ट बिल्कुल नही है कि तीन अरेखिक समीकरणो मे से कौन सा श्रेष्ठ है, क्योकि व सब निर्धारण के ऐसे गुणाक प्रदान करते है जो केवल तीसरे दशमलव स्थान पर भिन्न होते हैं। सभी का पूर्णाङ्कन 0 98 पर होता है। कई समीकरण प्रकारो को पाना, जो इतने समान गुणाक प्रदान करते हो कि उनके बीच चयन की तनिक भी गुन्जायश न हो, प्राय असाधारण बात है। तथापि यह अवश्य

स्मरण रखना चाहिए कि, एक दृष्टि से, गुणाक पूरी तरह तुलना-योग्य नही हैं। द्वितीयाश वक्र ने Y मूल्य मे विचरण के 97 8 प्रतिशत ($r^2_{Y\ XX^2} = 0\ 978$) की व्याख्या की। लघुगणकीय आकलन समीकरण ने Y मूल्यो के लघुगणकों मे विचरण के 97 6 प्रतिशत (r^2लघु$_Y$ लघु$_X = 0\ 976$) की व्याख्या की। $\sqrt{Y}$ तथा X का प्रयोग करने वाले आकलन समीकरण ने Y मूल्यो के वर्गमूलों मे विचरण के 98 1 प्रतिशत ($r^2_{\sqrt{Y}X} = 0\ 981$) की व्याख्या की।

आकलन की तीन मानक त्रुटियो की परस्पर एक दूसर से तुलना नही की जा सकती, क्योंकि वे विभिन्न इकाइया मे हैं। द्वितीयाश वक्र के लिए आकलन की मानक त्रुटि सदैव 13 2 बोड फुट — 10 है। जब लघुगणकीय आकलन समीकरण का प्रयोग किया जाता है तो आकलन की मानक त्रुटि सदैव धनात्मक दिशा मे आकलन का 15 2 प्रतिशत है या ऋणात्मक दिशा मे आकलन का 13 2 प्रतिशत है। जैसा कि अध्याय 19 मे सकेत किया गया था आकलन की मानक त्रुटि आकलित मूल्यो से यथार्थ मूल्यो के प्रसार का एक समग्र माप है जो तिस पर भी विशेष आकलना पर लागू किया जाता है। जब $X =$ 18 30 तथा 40 हो, तो सारणी 20 5 तीन अरेखिक विधियों मे से प्रत्यक के द्वारा किए गए पांडरोसा देवदार वृक्षो के आयतन के आकलनो तथा प्रत्येक दिशा मे आकलन की एक मानक त्रुटि के द्वारा प्रस्तुत त्रुटि की मात्रा को प्रदर्शित करती है। द्वितीयाश वक्र तथा $\sqrt{Y}$ X सम्बन्ध द्वारा किए गए आकलन अधिक भिन्न नही हैं, जब $X = 18$, तो सभी तीना समीकरण आयतन का लगभग एकसा आकलन प्रदान करते है। जब द्वितीयाश समीकरण का प्रयोग किया जाता है तो निरपेक्ष दृष्टि से त्रुटि स्थिर रहती है चाहे X बडा हो या छोटा अन्य दो समीकरण प्रकारो मे से किसी एक के लिए जैसे ही X बढता जाता है त्रुटि भी बडी होती जाती है। X के छोटे मूल्यो के लिए लघुगणकीय सम्बन्ध अल्पतम त्रुटियो को प्रदर्शित करता है, जबकि X के बड मूल्यों के लिए, द्वितीयाश वक्र अल्पतम त्रुटियाँ प्रदर्शित करता है। $\sqrt{Y}$, X सम्बन्ध, इन दोनो के बीच प्राय मध्यवर्ती है।

एक कसौटी के अन्तर्गत जिसका विभिन्न समीकरण प्रकारो की उपयुक्तता की तुलना करने के लिए सुझाव दिया गया है, X के प्रत्येक प्रेक्षित मूल्य के लिए Y_c मूल्य का परिकलन और $\sqrt{\frac{\Sigma(Y-Y_c)^2}{N}}$ की गणना समाहित है। द्वितीयाश समीकरण के लिए यह $s_{Y\ XX^2}$ है, और क्योकि न्यूनतम वर्ग जोड ने $\Sigma(Y-Y_c)^2$ को अल्पतम कर दिया, अत $s_{Y\ XX^2} = 13\ 2$ का मूल्य अल्पतम होने की आशा की जाएगी। यह कुछ आश्चर्य की बात है कि $\sqrt{Y}$, X का सम्बन्ध, जिसके अन्तर्गत $\sqrt{Y}$ मूल्यो के साथ न्यूनतम वर्गो का जोड आता था, भी Y_c मूल्यों के चतुर्दिक् Y मूल्या के मानक विचलन के रूप मे 13 2 प्रदान करता है। लघुगणकीय सम्बन्ध के लिए, जिसके अन्तर्गत लघु Y मूल्यो के साथ न्यूनतम वर्गो का जोड आता था, Y_c मूल्यो के चतुर्दिक् Y मूल्यो का मानक विचलन 14 9 है। प्रत्येक उदाहरण मे इकाई बोर्ड फुटो के दशक हैं।

एक और कसौटी के अन्तगत आकलन समीकरण को जान लेना आता है, जिसके चतुर्दिक् Y मूल्य अधिकतर लगभग प्रसामान्य रूप से बँट हुए हैं। क्योंकि N केवल 20 है, अत यह इस उदाहरण के लिए कठिनता से समुचित दिखाई देता है।

सारणी 20 5

पोडरोसा देवदार वृक्षों के आयतन तथा जब $X = 18$ 30 एव 40 इच हो तो तीन समीकरण प्रकारों के लिए आकलन की $\pm$ एक मानक त्रुटि के क्षेत्रो के आकलन

(सारणी की रचना मे मूल्य बोड फुट – 10 हैं।)

आकलन समीकरण	$X = 18$ इच			$X = 30$ इच			$X = 40$ इच		
	ऋणात्मक त्रुटि	Y_c	धनात्मक त्रुटि	ऋणात्मक त्रुटि	Y_c	धनात्मक त्रुटि	ऋणात्मक त्रुटि	Y_c	धनात्मक त्रुटि
द्वितीयाश	13 2	22 5	13 2	13 2	122 1	13 2	13 2	268 9	13 2
लघुगणकीय	3 0	23 [illegible]	3 6	15 3	115 9	17 7	37 8	285 8	43 5
$\sqrt{Y}$ X	5 2	22 1	5 9	12 7	122 5	13 5	19 0	268	19 7

जैसा कि प्रारम्भ मे उल्लेख किया गया था तीन अरेखिक समीकरण प्रकारो मे चयन का बहुत कम आधार है। पृष्ठ 450– 451 पर वर्णित $\sqrt{Y}$ X सम्बन्ध के तार्किक निहित अर्थ के साथ कदाचित पूर्ववर्ती अनुच्छेदो मे प्रस्तुत जानकारी इसे चुनने के लिए व्यक्ति को बाध्य करे। जब कई प्रविधियाँ लगभग समान महत्त्व की हो तो परिकलन के लिए सुगमतम या सरलतम को चुनना अनुचित नही है। इस आधार पर भी हम $\sqrt{Y}$ X सम्बन्ध को चुन सकते है।

लघु Y X सम्बन्ध—जब Y मूल्यो के लघुगणको को X मूल्यो के साथ सहसबधित करते हैं तो आकलन समीकरण

$$(\text{लघु } Y)_c = \text{लघु } a + X \text{लघु } b$$

प्रकार का है। प्रसामान्य समीकरण

$$\text{I} \quad \Sigma \text{ लघु } Y = N \text{ लघु } a + \text{लघु } b \, \Sigma X$$

$$\text{II} \quad \Sigma(X \text{ लघु } Y) = \text{लघु } a \, \Sigma X + \text{लघु } b \, \Sigma X^2$$

है। कुल विचरण है[13]

$$\Sigma(\text{लघु } y)^2 = \Sigma(\text{लघु } Y)^2 - (\overline{\text{लघु } Y}) \Sigma \text{ लघु } Y$$

व्याख्यात विचरण है[14]

$$\Sigma(\text{लघु } y)^2_c = \text{लघु } a \, \Sigma \text{ लघु } Y + \text{लघु } b \, \Sigma(X \text{ लघु } Y) - (\overline{\text{लघु } Y}) \Sigma \text{लघु } Y$$

तथा अव्याख्यात विचरण

$$\Sigma(\text{लघु } y)^2_s = \Sigma(\text{लघु } y)^2 - \Sigma(\text{लघु } y)^2_c$$

है। निर्धारण के गुणाक को

$$r^2_{\text{लघु } YX} = \frac{\Sigma(\text{लघु } y)^2_c}{\Sigma(\text{लघु } y)^2}$$

13 देख टिप्पणी 10।

14 देख टिप्पणी 11।

से प्राप्त किया जा सकता है। वास्तव में, सहसम्बन्ध का गुणांक निर्धारण के गुणांक का वर्गमूल है। यदि लघु a तथा लघु b की आवश्यकता न हो, तो r लघु $_{Y.X}$ का परिकलन

$$r_{\text{लघु}\,Y\,X} = \frac{N\Sigma(X \cdot \text{लघु } Y) - (\Sigma X)(\Sigma \text{लघु } Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma(\text{लघु } Y)^2 - (\Sigma \text{ लघु } Y)^2]}}$$

से किया जा सकता है। आकलन की मानक त्रुटि है।

$$s_{\text{लघु}\,Y\,X} = \sqrt{\frac{\Sigma(\text{लघु } y)^2_s}{N}}$$

$\frac{1}{Y}$, X सम्बन्ध—इस सम्बन्ध के लिए, आकलन समीकरण

$$\left(\frac{1}{Y}\right)_c = a + bX$$

प्रकार का है। असामान्य समीकरण हैं।

$$\text{I} \qquad \Sigma\frac{1}{Y} = Na + b\Sigma X,$$

$$\text{II} \quad \Sigma\left(X \cdot \frac{1}{Y}\right) = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

कुल विचरण है[15]

$$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{1}{Y}\right)^2 - \left(\overline{\frac{1}{Y}}\right)\Sigma\frac{1}{Y},$$

जहाँ $\left(\overline{\frac{1}{Y}}\right) = \frac{\Sigma\frac{1}{Y}}{N}$

व्याख्यात विचरण

$$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2_c = a\Sigma\frac{1}{Y} + b\Sigma X\frac{1}{Y} - \left(\overline{\frac{1}{Y}}\right)\Sigma\frac{1}{Y},$$

है तथा अव्याख्यात विचरण

$$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2_s = \Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2 - \Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2_c$$

है।

$$r^2_{\frac{1}{Y}\cdot X} = \frac{\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2_c}{\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2}.$$

---

15 ध्यान दीजिए कि $\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2 = \Sigma\left[\frac{1}{Y} - \left(\overline{\frac{1}{Y}}\right)\right]^2 = \Sigma\left(\frac{1}{Y} - \frac{\Sigma\frac{1}{Y}}{N}\right)^2$ है। यह $\Sigma[1-(Y-\bar{Y})]^2$ नहीं है। इसी प्रकार, $\Sigma\left(\frac{1}{Y}\right)^2_c = \Sigma\left[\left(\frac{1}{Y}\right)_c - \left(\overline{\frac{1}{Y}}\right)\right]^2$ तथा $\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2_s = \Sigma\left[\frac{1}{Y} - \left(\frac{1}{Y}\right)_c\right]^2$.

से निर्धारण के गुणाक का परिकलन किया जा सकता है और $r_{\frac{1}{Y}X}$ वर्गमूल है। विकल्प से,

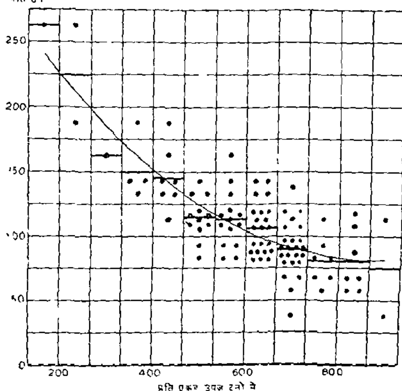
$$r_{\frac{1}{Y}X}=\frac{N\Sigma X\frac{1}{Y}-(\Sigma X)\left(\Sigma\frac{1}{Y}\right)}{\sqrt{\left[N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2\right]\left[N\Sigma\left(\frac{1}{Y}\right)^2-\left(\Sigma\frac{1}{Y}\right)^2\right]}},$$

से सहसम्बन्ध गुणाक को पाया जा सकता है जिसमे a तथा b के मूल्यो की आवश्यकता नही पड़ती। आयतन की मानक त्रुटि है।

$$s_{\frac{1}{Y}X}=\sqrt{\frac{\Sigma\left(\frac{1}{Y}\right)_s^2}{N}}$$

सहसम्बन्ध अनुपात, η

जब सहसम्बन्ध सारणी मे आँकडे इस प्रकार व्यवस्थित किए गए हो जैसे कि सारणी 20 6 मे, और जब अरेखिक सम्बन्ध विद्यमान हो, तो कई बार ऐसे सहसम्बन्ध गुणाक



चार्ट 20 10 पूर्व-मध्य इलिनॉयस मे भुट्टे अनाज को काटने के लिए आवश्यक प्रति टन मनुष्य घण्टे तथा प्रति एकड उपज। क्षैतिज रेखाएं प्रत्येक उपज के लिए प्रति टन औसत मनुष्य घण्टा का सकेत करती हैं जबकि वक्र समीकरण $Y_c=325\ 6794-0\ 5659420Y+0\ 0003275019Y^2$ म परिकलित मूल्या को प्रस्तुत करता है। इस समीकरण का परिकलन मूल प्रश्नों का पुस्तक के प्रथम सस्करण म पृष्ठ 721-725 पर किया गया था। आंकडे सारणी 20 6 के नीचे दिए गए स्रोत म।

का मूल्य जानना रुचिकर होता है, जो उस समय उत्पन्न होगा जब आकलन समीकरण की अपेक्षा स्तम्भो के समातर माध्यो का प्रयोग किया गया हो। चार्ट 20 10, क्षैतिज रेखाओ के प्रयोग से, सारणी 20 6 के स्तम्भ माध्यो को प्रदर्शित करता है। यह तुलना के उद्देश्यो के लिए आँकडो के साथ जुडे द्वितीयाश वक्र को भी दिखाता है। स्तम्भो के माध्यो पर आधारित, सहसम्बन्ध का माप, सहसम्बन्ध अनुपात $\eta_{Y X}$ है। यह उन सहसम्बन्ध गुणाको के समान है जिनकी व्याख्या हम पहले ही कर चुके है अर्थात् उसमे यह उस Y श्रेणी मे कुल विचरण के अनुपात का वर्गमूल है जिसे स्तम्भ माध्यो के विचरण द्वारा समझाया गया है।[16] अर्थात्

$$\eta_{Y X} = \sqrt{\frac{\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा व्याख्यात विचरण}}{Y \text{ श्रेणी का कुल विचरण}}},$$

या, चिह्नो मे[17],

$$\eta^2_{Y X} = \frac{\sum_1^k [N_c(\overline{Y}_c - \overline{Y})^2]}{\Sigma(Y-\overline{Y})^2} = \frac{\left[\sum_1^k \frac{\left(\sum_1^{N_c} Y\right)^2}{N_c}\right] - \overline{Y}\Sigma Y}{\Sigma Y^2 - \overline{Y}\Sigma Y},$$

$$= \frac{\sum_1^k \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} Y\right)^2}{N_c}\right] - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}}{\Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N}},$$

जहाँ $\overline{Y}_c$ एक स्तम्भ का समातर माध्य है,

N_c एक स्तम्भ मे मदो की सख्या है,

$\sum_1^{N_c}$ एक स्तम्भ मे N_c मदो के ऊपर जोड का सकेत करता है, तथा

$\sum_1^k$, k स्तम्भो के ऊपर जोड का सकेत करता है।

क्योंकि सहसम्बन्ध सारणी के आँकडे वर्ग-अन्तरालो के पदो मे हैं, अतः इस व्यजक को, बारम्बार बटन के समान या सहसम्बन्ध सारणी से परिकलित सहसम्बन्ध गुणाक के समान अवश्यमेव पुन लिखा जाना चाहिए। व्यजक

$$\eta^2_{Y X} = \frac{\sum_1^k \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} f_Y d'_Y\right)^2}{N_c}\right] - \frac{(\Sigma f_Y d'_Y)^2}{N}}{\Sigma f_Y (d'_Y)^2 - \frac{(\Sigma f_Y d'_Y)^2}{N}}$$

बन जाता है।

16 एक सहसम्बन्ध अनुपात $\eta_{X Y}$ भी है जो उस X श्रेणी मे कुल विचरण के अनुपात का वर्गमूल है जिसकी पंक्ति माध्यो के विचरण द्वारा व्याख्या की गई है।

17 तीन व्यजको मे से पहले तथा अन्तिम की समानता का प्रमाण उसका परिणाम है जिसे परिशिष्ट घ, अनुच्छेद 26.1 मे दिखाया गया है।

सारणी 20 6

पूर्व-मध्य इलिनॉयस मे कटाई के लिए आवश्यक प्रति टन मनुष्य घण्टा तथा भुट्टा अनाज की प्रति एकड उपज के बीच सहसम्बन्ध प्राप्त करने के लिए आवश्यक परिकलन

वर्ग	मध्यमान	d'	133 34–199 99 (166 67) fr	frd r	200 00–266 66 (233 33) fr	frd r	266 67–333 33 (300 00) fr	frd r	333 34–399 99 (366 67) fr	frd r	400 00–466 66 (433 33) fr	frd r	466 67–533 33 (500 00) fr	frd r
250 00–274 99	262 50	6	1	6	1	6								
225 00–249 99	237 50	5												
200 00–224 99	212 50	4												
175 00–199 99	187 50	3			1	3			1	3	1	3		
150 00–174 99	162 50	2					1	2			1	2		
125 00–149 99	137 50	1							3	3	4	4	3	3
100 00–124 99	112 50	-0									1	0	7	0
75 00–99 99	87 50	-1											2	-2
50 00–74 99	62 50	-2												
25 00–49 99	37 50	-3												
कतार का विवरण 1 योग			1	6	2	9	1	2	4	6	7	9	12	1
2 $\frac{\Sigma frd\,r}{N_c}$			6 0000000		4 5000000		2 0000000		1 5000000		1 2857142		0833333	
3 $\frac{\left(\Sigma frd\,r\right)^2}{N_c}$			36 00000		40 50000		4 00000		9 00000		11 57143		08333	

वर्ग	मध्यमान	d'	533 34–599 99 (566 67) fr	frd r	600 00–666 66 (633 33) fr	frd r	666 67–733 33 (700 00) fr	frd r	733 34–799 99 (766 67) fr	frd r	800 00–866 66 (833 33) fr	frd r	866 67–933 33 (900 00) fr	frd r	कुल वितरण fr	frd r	fr(d r)²
250 00–274 99	262 50	6													2	12	72
225 00–249 99	237 50	5															
200 00–224 99	212 50	4															
175 00–199 99	187 50	3													3	9	27
150 00–174 99	162 50	2	1	2											3	6	12
125 00–149 99	137 50	1	2	2	4	4	1	1							17	17	17
100 00–124 99	112 50	-0	7	0	8	0	5	0	1	0	2	0	1	0	32	0	0
75 00–99 99	87 50	-1	4	-4	10	-10	14	-14	3	-3	1	-1	[illegible]		34	-34	34
50 00–74 99	62 50	-2					3	-6	3	-6	4	-8			10	-20	40
25 00–49 99	37 50	-3					1	-3					1	-3	2	-6	18
कतार का विवरण 1 योग			14	0	22	-6	24	-21	7	-9	7	-9	2	-3	103	-15	220
2 $\frac{\Sigma frd\,r}{N_c}$			0000000		-2727273		-9166667		-1 2857142		-1 2857142		-1 5000000				
3 $\frac{\left(\Sigma frd\,r\right)^2}{N_c}$			00000		1 63636		20 16667		11 57143		11 57143		4 50000		150 60065		

संयुक्त राज्य अमरीका के कृषि विभाग के टैक्निकल बुलेटिन न० 349 म आर० एस० वाशबर्न तथा जे० एच० मार्टिन द्वारा लिखित एन ईकनामिक स्टडी ऑफ ग्रूम यार्न प्रोडक्शन के पृ० 27 पर दिए चार्ट से धारण किए गए आँकडे।

सारणी 20.6 से मूल्यों का प्रतिस्थापन

$$\eta^2_{Y\,X} = \frac{150.60065 - \frac{(16)^2}{103}}{220 - \frac{(16)}{103}} = \frac{148.115}{217.515},$$

$$= 0.681,$$

प्रदान करता है जो यह सकेत करता है कि मनुष्य घण्टो (Y चर) मे विचरण के 68 प्रतिशत की स्तम्भ माध्यों के प्रयोग द्वारा व्याख्या की गई है। सहसम्बन्ध अनुपात इस मूल्य का वर्गमूल है, अत

$$\eta_{Y\,X} = \sqrt{0.681} = 0.825$$

सहसम्बन्ध अनुपात का कोई चिह्न नही है क्योकि दो श्रेणियो के सभी मूल्यो के लिए जिनसे व्यक्ति का वास्ता पड सकता है, सम्बन्ध आवश्यक रूप से धनात्मक या ऋणात्मक नही है। आगे भी हो सकता है कि क्षैतिज अक्षाश सख्यात्मक मूल्यो की अपेक्षा गुणात्मक मूल्यो को प्रस्तुत करे।

वक्ररेखीय सहसम्बन्ध गुणाक के साथ अपने सम्बन्ध के कारण सहसम्बन्ध अनुपात मुख्य रूप से रुचिपूर्ण है। सहसम्बन्ध अनुपात सदैव उस सहसम्बन्ध गुणाक के समान *या उससे बडा होगा जिसे वर्गीकृत आँकडो के साथ वक्र के जोड का प्रयोग करके प्राप्त* किया गया है, यदि समीकरण मे स्थिराको की सख्या $\eta_{Y\,X}$ के परिकलन मे प्रयुक्त स्तम्भों की सख्या के बराबर या उससे कम हो। जैसे ही समीकरण मे स्तम्भों अथवा स्थिराको की *सख्या बढती है वैसे ही $\eta_{Y\,X}$ तथा वक्ररेखीय सहसम्बन्ध गुणाक दोनो ही बढते जाते हैं।*

सहसम्बन्ध अनुपात की उपयुक्तता की कई सीमाएँ है। प्रथम, आँकडो को अवश्यमेव वर्गीकृत किया जाना चाहिए, आवश्यक रूप से दोनो अक्षाशो पर नही, परन्तु स्वतन्त्र चर अवश्य ही वर्गीकृत होना चाहिए। दूसरे, यदि स्वतन्त्र चर के लिए वर्गों की सख्या बढाई जाती है तो सहसम्बन्ध अनुपात का मूल्य बढ कर 1.0 हो जाता है, यदि वर्ग इतने अधिक हो जाते है कि प्रत्येक वर्ग मे केवल एक प्रेक्षण होता है। तीसरे, कोई आकलन समीकरण नही है और इसीलिए आश्रित चर के आकलन का कोई सन्तोषजनक मार्ग नही है।

21

सहसंबन्ध III : अनेकधा और आंशिक सहसंबन्ध

प्रारम्भिक व्याख्या

सरल सहसम्बन्ध—अनेकधा और आंशिक सहसम्बन्ध का विवेचन प्रारम्भ करने से पूर्व, द्वि-चर रखिक सहसम्बन्ध के प्रारम्भिक सिद्धान्तों का संक्षेप में पुनर्विलोकन करना उपादेय होगा, क्योंकि अधिक परिष्कृत मापों में केवल पूर्वविवेचित क्रियाविधियों का प्रसार मात्र होता है। पहले,

$$Y = a + bX$$

प्रकार के आकलन समीकरण का परिकलन न्यूनतम वर्गों की विधि में हुआ था। इससे हमें स्वतन्त्र चर के मानों में आश्रित चर के मान का आकलन करना सुगम हो गया। फिर यह निरूपण किया गया कि आश्रित चर की पूर्ण घट-बढ़ (1) व्याख्यात घट-बढ़ और (2) अपनी परिकल्पना से जिस घट-बढ़ की व्याख्या करने में हम असमर्थ रहे थे—दोनों का योग थी, अर्थात्,

$$\Sigma y^2 = \Sigma y_c^2 + \Sigma y_s^2.$$

यह स्मरण रखना चाहिए कि हमने Σy^2 का परिकलन

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \overline{Y}\Sigma Y$$

सूत्र से किया था तथा Σy_c^2 का परिकलन अधोलिखित व्यंजक से किया गया था

$$\Sigma y_c^2 = \Sigma Y_c^2 - \overline{Y}\Sigma Y$$

जिसमें

$$\Sigma Y_c^2 = a\Sigma Y + b\Sigma XY$$

अथवा, अधिक सरलतापूर्वक,

$$\Sigma y_c^2 = b\Sigma xy$$

आकलन की मानक त्रुटि $s_{y \cdot x}$ ने, जो $\sqrt{\frac{\Sigma y_s^2}{N}}$ है, हमें आश्रित चर के अपने आकलनों की त्रुटि के परिसर की जाँच करने का सामर्थ्य प्रदान किया। पूर्ण घट-बढ़ से व्याख्यात घट-बढ़ को घटाने से Σy_s^2 की प्राप्ति हुई, अर्थात्

$$\Sigma y_s^2 = \Sigma y^2 - \Sigma y_c^2$$

अन्त मे, एक माप का परिकलन किया गया जिससे पूर्ण घट-बढ का अनुपात बताया जा सका जिसकी व्याख्या आश्रित चर के परिकलित मानो की घट-बढो से की गई थी। यह अनुपात,

$$r^2 = \frac{\Sigma y_c^2}{\Sigma y^2},$$

निर्धारण का गुणाक कहा गया, और इसके वर्गमूल को *सहसम्बन्ध का गुणाक* बताया गया।

अनेकधा सहसम्बन्ध—अनेकधा सहसम्बन्ध के सिद्धान्त ठीक वे ही हैं जो सरल सहसम्बन्ध के हैं, किन्तु कार्य विधि अधिक श्रमसाध्य है, क्योकि इसमे एक से अधिक स्वतन्त्र चर है। इसमे किंचित् भिन्न सकेतो का प्रयोग भी आवश्यक है। इस अध्याय का दृष्टात क्षेत्रीय माध्यिका आय, और इन्ही क्षेत्रो मे प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी एव सजातीय कर्मचारियो, पूर्ण किए माध्यिका स्कूल वर्ष तथा प्रतिशत प्रवासी के पारस्परिक सम्बन्ध का विवेचन करगा। माध्यिका आय आश्रित चर है तथा अन्य तीन स्वतन्त्र चर है।

परिकलनो को सरल करने के लिए जिससे कि वे इस अध्याय मे पूर्णतः दिखाए जा सके, सयुक्त राज्य अमरीका को लगभग समान जनसख्या वाले तथा न्यूनाधिक समाग विशेषताओ वाले 19 क्षेत्रो मे विभक्त किया गया है। न्यूयार्क राज्य के अपवाद को छोड कर, जिसे न्यूयार्क नगर तथा उत्तरी न्यूयार्क के दो भागो मे विभक्त किया गया है, शेष सब क्षेत्रो की सीमाएँ राज्य-सीमाओ के अनुसार है। विभिन्न क्षेत्रो का सयोजन अन्यत्र सारणी 21.1 से देखा जा सकता है। समान जनसख्या के समाग क्षेत्रो के चयन से सांख्यिकीय परिणाम इस सीमा तक अधिक सार्थक होते हैं कि गणना मे प्रत्येक क्षेत्र को उचित भार दिया जाता है। उधर 4 अचरो के समीकरण के साथ केवल 19 प्रेक्षणो के प्रयोग से स्वतन्त्रता के अंश निश्चय ही कुछ कम हो जाते हैं (अध्याय 26 मे वह परिच्छेद देखिए जहाँ अनेकधा-सहसम्बन्ध के गुणाकों के महत्त्व का विवेचन किया गया है)। अतः प्राप्त परिणाम प्रथमत निर्देशात्मक महत्त्व के समझने आवश्यक है।

यह सकेतनो को कुछ सरल कर देता है, यदि अधोलेखो से चरो का अन्तर प्रकट करते हुए, विभिन्न अक्षरो का प्रयोग करने के *स्थान* पर चरो मे से प्रत्येक को अक्षर X द्वारा निर्दिष्ट किया जाए। यदि चरो की सख्या अधिक है तो यह विशेष रूप से सत्य है। अतः हम अपने चरो को इस प्रकार निर्दिष्ट करेंगे :

आश्रित चर .

माध्यिका आय.................................... X_1

स्वतन्त्र चर :

प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी एव सजातीय कर्मचारी.. X_2

पूर्ण किए माध्यिका स्कूल वर्ष .... X_3

प्रतिशत प्रवासी.................................. X_4

सारणी 21 1

1960 मे सयुक्त राज्य अमरीका के लगभग समान जनसख्या वाले उन्नीस अपेक्षाकृत समाग क्षेत्र

क्षेत्र संख्या	जनसख्या (दस लाखों मे)	समाविष्ट राज्य
1	8 0	मेन, न्यू हैम्पशायर, वरमोन्ट, मसाचुसेट्स, रहोड द्वीप
2	8 6	कनैक्टीकट, न्यू जर्सी
3	7 8	न्यूयार्क नगर
4	9 0	न्ययार्क न्यूयार्क नगर को छोडकर
5	11 3	पेन्सिलवानिया
6	9 7	ओहियो
7	12 5	इडियाना मिशिगन
8	10 1	इलिनोइस
9	7 4	विसकन्सिन, मिनेसोटा
10	7 1	आयोवा मिस्सौरी
11	6 7	उत्तरी डकोटा, दक्षिणी डकोटा, नब्रास्का, कनास, कोलोरेडो
12	12 8	डेलावेयर मेरीलैंड, कोलबिया जिला, वर्जीनिया, उत्तरी कैरोलिना
13	11 3	दक्षिणी कैरोलिना, जॉर्जिया, फ्लोरिडा
14	8 5	पश्चिमी वर्जीनिया, केंटकी, टेनेसी
15	8 7	अलबामा, मिसीसीपी, लुइशियाना
16	6 4	एरिजोना न्यूमेक्सिको, अरकसास, ओकलाहोमा
17	7 5	माटाना, इडाहो, व्योमिंग, वाशिंगटन, ओरेगन, यूटाह, नेवादा
18	15.7	कैलिफोर्निया
19	9.6	टैक्सास

अगले पृष्ठो म हम 1, 2, और 3 चरो से प्रारम्भ करेंगे तथा मूल सकल्पनाओ और परिकलनों को समझने के बाद चर 4 का परिचय देंगे। सहसम्बन्ध कार्य-विधि मे प्रथम पग एक समीकरण प्राप्त करना है जिसम माध्यिका आय के आकलन के साधन-रूप मे दोनों स्वतन्त्र चरो का समावेश हो। आकलन चिह्न $X_{c1\ 23}$ से व्यक्त किया जाता है क्योकि यह चर Y_1 का आकलन है, जिसका परिकलन चर X_2 तथा X_3 से हुआ है। दो स्वतन्त्र चरों के होने के कारण b चिह्न भी दो होगे। समीकरण इस प्रकार का होगा

$$Y_{c1\ 23}=a_{1\ \cdot 3}+b_{13\ 3}X_2+b_{13\ 2}X_3$$

b'_s और उनके अधोलिखित अक्षरा के अर्थ के सम्बन्ध मे दो शब्द आवश्यक हैं। वे आकलन के शुद्ध गुणाक X_1 पर सहवर्ती स्वतन्त्र चर मे परिवर्तन के प्रभाव को सूचित

करते हैं, जब अन्य स्वतन्त्र चर का भी ध्यान रखा गया है ।[1] इस प्रकार, $b_{12\cdot3}$ पूर्ण हुए माध्यिका स्कूल वर्षों मे घट-बढ से स्वतन्त्र, प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियो मे घट-बढ से सम्बद्ध *माध्यिका आय मे घट-बढ का आकलन है । समाजशास्त्री "अन्य बातें समान रहने पर"* कहने का आदी है । इस दृष्टान्त मे, अन्य बात जो समान रखी गई है, वह है विभिन्न क्षेत्रो मे माध्यिका स्कूल शिक्षा । जहाँ तक उन क्षेत्रो का सम्बन्ध है जिनमे माध्यिका स्कूल शिक्षा तो समान है किन्तु प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियो के सम्बन्ध मे भिन्नता है, क्षेत्रो के बीच व्यावसायिक आदि कमचारियो मे एक प्रतिशत की प्रत्येक घट बढ माध्यिका आय मे $b_{12\cdot3}$ की घट-बढ के साथ सामान्यत. रहेगी । आकलन समीकरण मे अन्य b गुणाक की माप्यानुमान के आधार पर व्याख्या की जाती है और अधोलेख मे दशमलव बिन्दु के दाहिनी ओर का अक उस कारक की ओर सकेत करता है जिसे स्थिर रखा गया है । *हाँ, वास्तव मे केवल प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियो की आय पर प्रभाव जानने* के लिए हमे अन्य सब तत्वो को, न कि केवल पूर्ण हुए माध्यिका स्कूल वर्षों को, स्थिर रखना चाहिए । ज्यो-ज्यो हम अधिकाधिक चरो को प्रस्तुत करते है, यह अभीष्ट परिस्थिति अधिकाधिक गहरी सन्निकट होती जाती है । स्थिर $a_{1\cdot23}$ माध्यिका आय के लिए परिकल्पित मूल्य है जब अन्य विचारित तत्त्वो का मूल्य शून्य हो । किसी क्षेत्र के लिए माध्यिका आय का आकलन प्रत्येक स्वतन्त्र चर तथा a के मूल्य के योग से सम्बद्ध शुद्ध राशियो का योग होता है ।

यहाँ हम यह कह सकते है कि प्रकृति-विज्ञानी अपने प्रयोग की योजना प्राय इस प्रकार बना सकता है जिससे कई एक चरो पर नियन्त्रण किया जा सके, जैसे, उदाहरण के लिए, तापमान, आर्द्रता अथवा वायु दाब । जीव-विज्ञानी तथा कृषि-प्रयोगकर्ता अपने चरो पर पर्याप्त नियन्त्रण रख सकते है । दूसरी ओर, अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र तथा अधिकाश सामाजिक शास्त्रो को प्राय प्रयोगात्मक प्रणाली की अपेक्षा पर्यवेक्षणात्मक प्रणाली को अपनाना पडता है । इन क्षेत्रो मे काम करने वालो का प्रयुक्त सामग्री पर प्राय केवल अत्यन्त *सीमित नियन्त्रण रहने के कारण उन्हे इस अध्याय मे स्पष्ट की गई तकनीको द्वारा चरो मे से* कुछ को साख्यिकीय विधि से (प्रयोगात्मक विधि की अपेक्षा) स्थिर रखने का प्रयत्न करना पडेगा ।[2]

---

1 पारिभाषिक रूप मे किसी चर का ध्यान, अन्य चरो पर उसके प्रभाव को घटा कर रखा जाता है । इस प्रकार यदि

$$x_{s1\cdot2} = x_1 - x_{c1\cdot2},$$
$$x_{s3\cdot2} = x_3 - x_{c3\cdot2},$$
$$x_{s2\cdot3} = x_1 - x_{c1\cdot3},$$
$$x_{s2\cdot3} = x_2 - x_{c2\cdot3},$$

तो $b_{12\cdot3}$, $x_{s2\cdot3}$ पर $x_{s1\cdot3}$ का ढाल है तथा $b_{13\cdot2}$, $x_{s3\cdot2}$ पर $x_{s1\cdot2}$ का ढाल है । विशेष रूप से

$$b_{12} = \frac{\Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_2^2}, \text{ किन्तु } b_{12\cdot3} = \frac{\Sigma x_{s1\cdot3} x_{s2\cdot3}}{\Sigma x^2_{s2\cdot3}};$$

$$b_{13} = \frac{\Sigma x_1 x_3}{\Sigma x_3^2}, \text{ किन्तु } b_{13\cdot2} = \frac{\Sigma x_{s1\cdot2} x_{s3\cdot2}}{\Sigma x^2_{s3\cdot2}}.$$

2 अन्य विधि जो प्राय व्यावहारिक नही है, प्रेक्षित आँकडो से उन प्रेक्षणो का चयन करना है, जिनका अध्ययन के अन्तर्गत चर को छोडकर शेष सब स्वतन्त्र चरो के सम्बन्ध मे स्थिर मूल्य हो ।

जैसा पिछले उदाहरणों में दिखाया गया है, आश्रित श्रेणी की कुल विभिन्नता दो राशियों का योग होती है (1) उस श्रेणी के आकलित मूल्यों में उनके माध्य से विभिन्नता, तथा (2) आकलित मूल्यों से वास्तविक मूल्य की विभिन्नता, अर्थात्

$$\Sigma x_1^2 = \Sigma x^2_{c1.23} + \Sigma x^2_{s1.23}$$

सम्बन्ध-मापों की परिकलन-विधि अनिवार्यतः वही है जो सरल सहसम्बन्ध की है। आकलन की मानक त्रुटि है

$$s_{1.23} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2_{s1.23}}{N}},$$

तथा अनेकधा निर्धारण का गुणांक है

$$R^2_{1.23} = \frac{\Sigma x^2_{c1.23}}{\Sigma x_1^2}$$

$R^2_{1.23}$ कुल घट-बढ़ के अनुपात को व्यक्त करता है जो परिकलित या $X_{c1.23}$, मानों के घट-बढ़ों में उपस्थित है, तथा जिसकी स्वतन्त्र चरों की ओर संकेत द्वारा व्याख्या की गई है। अनेकधा सहसम्बन्ध का गुणांक $R_{1.23}$ अनेकधा निर्धारण के गुणांक का वर्गमूल है। R का कोई चिह्न नहीं है, क्योंकि एक स्वतन्त्र चर के साथ साहचर्य धनात्मक हो सकता है किन्तु दूसरे से ऋणात्मक या नकारात्मक। यहाँ इस बात पर ध्यान देना रुचिकर होगा कि जैसे-जैसे अतिरिक्त सहचर स्वतन्त्र चरों को एक समस्या में लाया जाता है, $R_{1.23...m}$ पहुँच जाता है 1.0 पर तथा $s_{1.23...m}$ पहुँच जाता है शून्य पर। यदि हम सब संगत स्वतन्त्र चरों को सम्मिलित कर पाते तो $R_{1.23...m}$ होगा 1.0, तथा हम X_1 के पूर्ण आकलन कर सकते थे।

आंशिक सहसम्बन्ध—हम देख चुके हैं कि चर X_2 का प्रयोग कुछ मात्रा में व्याख्यात घटबढ़ में प्रतिफलित हुआ जो $\Sigma x^2_{c1.2}$ द्वारा संकेतित है, किन्तु आश्रित चर की कुछ घटबढ़ की व्याख्या नहीं हुई, वह थी $\Sigma x^2_{s1.2}$। X_2 के अतिरिक्त X_3 के प्रवेश से $\Sigma x^2_{c1.23}$ द्वारा संकेतित व्याख्यात घटबढ़ प्राप्त हुई जो अवश्यमेव $\Sigma x^2_{c1.2}$ से अधिक होना चाहिए यदि चर X_3 समस्या से सम्बद्ध है। $\Sigma x^2_{c1.23}$ किसी भी दशा में $\Sigma x^2_{c1.2}$ से कम नहीं हो सकता।

अब, X_2 द्वारा अव्याख्यात घटबढ़ की मात्रा $\Sigma x^2_{s1.2}$ थी, किन्तु X_3 ने घटबढ़ की $\Sigma x^2_{c1.23} - \Sigma x^2_{c1.2}$ द्वारा संकेतित एक अतिरिक्त मात्रा की व्याख्या प्रस्तुत की। यदि हम लिखें

$$\frac{\Sigma x^2_{c1.23} - \Sigma x^2_{c1.2}}{\Sigma x^2_{s1.2}},$$

तो हमारे पास आंशिक निर्धारण का गुणांक $r^2_{13.2}$ होगा। उपर्युक्त व्यञ्जक को शब्दों में तथा अधिक सामान्य रूप में व्यक्त करने के लिए हम कह सकते हैं कि आंशिक निर्धारण का गुणांक (1) अन्य स्वतन्त्र चर के प्रवेश के परिणामस्वरूप होने वाले आश्रित चर के परिकलित मानों की घटबढ़ में वृद्धि का अनुपात का (2) नए चर के प्रवेश से पूर्व अव्याख्यात घटबढ़ के साथ अनुपात है।

क्योंकि

$$\Sigma x^2_{s1.2} = \Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{c1.2},$$

अतः $r^2_{13.2}$ के व्यञ्जक को निम्नलिखित दो विधियों में से किसी एक में लिखा जा सकता है

$$r^2_{13.2}=\frac{\Sigma x^2_{c1.23}-\Sigma x^2_{c1.2}}{\Sigma x^2_{s1.2}} \quad \text{अथवा} \quad \frac{\Sigma x^2_{c1.23}-\Sigma x^2_{c1.2}}{\Sigma x^2_1-\Sigma x^2_{c1.2}}.$$

यदि पिछले व्यञ्जक के भाज्य तथा हर का Σx_1^2 से भाग दिया जाए, तो हम पायेंगे

$$r^2_{13.2}=\frac{R^2_{1.23}-r^2_{12}}{1-r^2_{12}}$$

इस रूप में आंशिक निर्धारण के गुणांक को निम्नलिखित का अनुपात समझा जा सकता है (1) अन्य स्वतन्त्र चर के प्रवेश के परिणामस्वरूप आश्रित चर के परिकलित मानों की घटबढ़ के अनुपात में वृद्धि का (2) नए चर के प्रवेश से पूर्व अव्याख्यता घटबढ़ के अनुपात के साथ।

$r_{13.2}$, $r^2_{13.2}$ का वर्गमूल आंशिक सहसम्बन्ध का गुणांक है और यह आकलन समीकरण में $b_{13.2}$ का चिह्न ले लेता है। *आंशिक सहसम्बन्ध के गुणांक का अवलोकन* 13.2 हमारी समस्या के लिए संकेत करता है कि सहसम्बन्ध माध्यिका आय X_1, तथा माध्यिका स्कूल वर्ष X_3 में है, जब प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी तथा सजातीय कर्मचारियों X_2, को $\bar{X}_2$ के मान पर स्थिर रखा गया है। यदि हम ऐसे क्षेत्र चुन सकें जो व्यवसाय के विचार से नितान्त समान हों तो उन क्षेत्रों की माध्यिका आय तथा माध्यिका स्कूल वर्षों में सरल सहसम्बन्ध प्राय उपर्युक्त आंशिक सहसम्बन्ध के गुणांक के समान होगा। आंशिक (या निवल) सहसम्बन्ध गुणांकों का एक उद्देश्य आश्रित चर की घटबढ़ों की व्याख्या में किसी समस्या में विभिन्न स्वतन्त्र चरों के सापेक्ष महत्त्व की ओर संकेत करना है।

परिकलन विधि

योगफलों का परिकलन—क्योंकि इस अध्याय में चार चरों में सम्बन्ध के मापों की यथेष्ट संख्या की आवश्यकता पड़ेगी, अतः विभिन्न सूत्रों के लिए आवश्यक सभी मानों का एक साथ परिकलन करना सुविधाजनक होगा। चार श्रेणियों के लिए मूल आँकड़े, अपने योगफलों और अंकगणितीय माध्यों सहित सारणी 21.2 में दिए गए हैं। अलग-अलग वर्ग और गुणनफल तथा वर्गों और गुणनफलों के योगफल सारणी 21.3 में दिखाए गए हैं। इनसे हम वर्गीकृत विचलनों के योग तथा विचलनों के गुणनफलों के योग प्राप्त करते हैं। उदाहरण के लिए,[3]

3 इन समीकरणों की व्युत्पत्ति पर्याप्त स्पष्ट है।

$$\begin{aligned}
\Sigma x_1^2 &= \Sigma(X_1-\bar{X}_1)^2,\\
&= \Sigma(X_1^2-2\bar{X}_1X_1+\bar{X}_1^2),\\
&= \Sigma X_1^2-2\bar{X}_1\Sigma X_1+N\bar{X}_1^2,\\
&= \Sigma X_1^2-2\bar{X}_1\Sigma X_1+\bar{X}_1\Sigma X_1,\\
&= \Sigma X_1^2-\bar{X}_1\Sigma X_1\\
\Sigma x_1x_2 &= \Sigma[(X_1-\bar{X}_1)(X_2-\bar{X}_2)],\\
&= \Sigma(X_1X_2-\bar{X}_1X_2-\bar{X}_2X_1+\bar{X}_1\bar{X}_2),\\
&= \Sigma X_1X_2-\bar{X}_1\Sigma X_2-\bar{X}_2\Sigma X_1+N\bar{X}_1\bar{X}_2,\\
&= \Sigma X_1X_2-\bar{X}_1\Sigma X_2-\frac{\Sigma X_1\Sigma X_2}{N}+\frac{\Sigma X_1\Sigma X_2}{N},\\
&= \Sigma X_1X_2-\bar{X}_1\Sigma X_2
\end{aligned}$$

सारणी 21.2

1960 मे सयुक्त राज्य के 19 क्षेत्रों के लिए माध्यिका आय प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी, एव सजातीय कमचारी पूर्ण हुए मध्यिका स्कूल वर्ष तथा प्रतिशत प्रवासी

क्षत्र	माध्यिका आय (सहस्र डालरों मे) X_1	प्रतिशत व्यावसायिक तकनीकी एव सजातीय कमचारी X_2	पूर्ण हुए माध्यिका स्कूल वर्ष X_3	प्रतिशत प्रवासी X_4
1	5 9	11 7	11 3	12 9
2	6 8	12 5	10 7	15 8
3	6 1	11 1	10 1	11 2
4*	6 7	13 7	11 2	15 9
5	5 7	10 7	10 2	10 0
6	6 2	10 9	10 9	14 0
7	6 1	10 9	10 8	14 4
8	6 6	10 7	10 5	12 8
9	5 8	10 7	10 6	15 4
10	5 1	9 8	10 3	18 0
11	5 2	11 3	11 4	22 9
12	5 1	11 0	9 8	19 4
13	4 3	9 2	9 8	24 2
14	4 1	9 3	8 8	13 7
15	3 8	9 2	8 9	15 4
16	4 5	11 1	10 3	24 0
17	5 9	12 0	12 0	23 7
18	6 7	13 7	12 1	24 5
19	4 9	10 8	10 4	20 7
योग	105 5	210 3	200 1	328 9
माध्य	5 552632	11 068421	10 531579	17 310526

*न्यूयाक नगर को छोडकर शष न्यूयाक के लिए आकडो का निम्नलिखित सम्बध स परिकलन किया गया

$$N_{upstate}\ Med_{upstate} = N_{state}\ Med_{state} - N_{city}\ Med_{city}$$

माध्यिका आय प्रतिशत व्यावसायिक तकनीकी एव सजातीय कमचारिया पूण हुए माध्यिका स्कूल वर्षों तथा प्रतिशत प्रवासी को प्रत्येक राज्य का जनसख्या स भारित किया गया ताकि प्रत्यक राज्य के लिए भारित अकगणितीय माध्य प्राप्त किया जा सके।

आंकडे सयुक्त राज्य जनगणना ब्यरो द्वारा प्रकाशित यू० एस० सन्सस ऑफ पापूलेशन *1960*, ग्रथ 1 करैक्टिस्टिक्स ऑफ दि पापूलेशन भाग 1 युनाइटिड स्टटस समरी, पष्ठ 1—248, 1—249, 1—277 से।

सारणी 21 3

माध्यिका आय तथा तीन स्वतन्त्र चरो के मध्य सम्बन्ध के मापो के लिए वर्गो गुणनफलो और योगो का परिकलन

(संयुक्त राज्य के 19 क्षेत्रो के लिए 1960)

क्षेत्र	X_1^2	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2^2	X_2X_3	X_2X_4	X_3^2	X_3X_4	X_4^2
1	34 81	69 03	66 67	76 11	136 89	132 21	150 93	127 69	145 77	166 41
2	46 24	85 00	72 76	107 44	156 25	133 75	197 50	114 29	169 06	249 64
3	37 21	67 71	61 61	68 32	123 21	112 11	124 32	102 01	113 12	125 44
4	44 89	91 79	75 04	106 53	187 69	153 44	217 83	125 44	178 08	252 81
5	32 49	60 99	58 14	59 00	114 49	109 14	107 00	104 04	102 00	100 00
6	38 44	67 58	67 58	86 80	118 81	118 81	152 60	118 81	152 60	196 00
7	37 21	66 49	65 88	87 84	118 81	107 72	156 96	116 64	155 52	207 36
8	43 56	70 62	69 30	84 48	114 49	112 35	136 96	110 25	134 40	163 84
9	33 64	62 06	61 48	89 32	114 49	113 42	164 78	112 36	163 24	237 16
10	26 01	49 98	52 53	91 80	96 04	100 94	176 40	106 09	185 40	324 00
11	27 04	58 76	59 28	119 08	127 69	128 82	258 77	129 96	261 06	524 41
12	26 01	56 10	49 98	98 94	121 00	107 80	213 40	96 04	190 12	376 36
13	18 49	39 56	42 14	104 06	84 64	90 16	222 64	96 04	237 16	585 64
14	16 81	38 13	36 08	56 17	86 49	81 84	127 41	77 44	120 56	187 69
15	14 44	34 96	33 82	58 52	84 64	81 88	141 68	79 21	137 06	237 16
16	20 25	49 95	46 35	108 00	123 21	114 33	266 40	106 09	247 20	576 00
17	31 81	70 80	70 80	139 83	144 00	144 00	284 40	144 00	284 40	561 69
18	44 89	91 79	81 07	164 15	187 69	165 77	335 65	146 41	296 45	690 25
19	24 01	52 92	50 96	101 43	116 64	112 32	223 56	108 16	215 28	428 49
योग	601 25	1 184 22	1 121 47	1 805 82	2 357 17	2 230 81	3 659 19	2 121 17	3 488 48	6 100 35

सारणी 21 2 के आँकडो पर आधारित ।

$$\Sigma x_1^2 = \Sigma Y_1^2 - \bar{X}_1 \Sigma X_1$$
$$\Sigma x_2^2 = \Sigma Y_2^2 - \bar{X}_2 \Sigma X_2$$
$$\Sigma x_1 x_2 = \Sigma X_1 X_2 - \bar{X}_1 \Sigma X_2 \text{ अथवा } \Sigma Y_1 X_2 - \bar{X} \Sigma Y_1$$
$$\Sigma x_1 x_3 = \Sigma Y_1 X_3 - \bar{X}_1 \Sigma X_3 \text{ अथवा } \Sigma X_1 X_3 - \bar{X}_3 \Sigma X_1$$

अन्य योगफलों के लिए इन तथा समान सूत्रों के प्रयोग से प्राप्त होते है .[4]

$$\Sigma x_1^2 = 601\ 25 - (5\ 552632)\ (105\ 5) = 15\ 447$$
$$\Sigma x_2^2 = 2{,}357\ 17 - (11\ 068421)(210\ 3) = 29\ 481$$
$$\Sigma x_3^2 = 2{,}121\ 17 - (10\ 531579)(200\ 1) = 13\ 801$$
$$\Sigma x_4^2 = 6{,}100\ 35 - (17\ 310526)(328\ 9) = 406\ 918$$

$$\Sigma x_1 x_2 = 1{,}184\ 22 - (5\ 552632)(210\ 3) = 16\ 502$$
$$\Sigma x_1 x_3 = 1{,}121\ 47 - (5\ 552632)(200\ 1) = 10\ 388$$
$$\Sigma x_1 x_4 = 1{,}805\ 82 - (5\ 552632)(328\ 9) = -20\ 441$$

$$\Sigma x_2 x_3 = 2{,}230\ 81 - (11\ 068421)(200\ 1) = 16\ 019$$
$$\Sigma x_2 x_4 = 3\ 659\ 19 - (11\ 068421)(328\ 9) = 18\ 786$$
$$\Sigma x_3 x_4 = 3{,}488\ 48 - (10\ 531579)(328\ 9) = 24\ 644$$

सम्बन्ध के सकल माप—सरल सहसम्बध वास्तव मे सकल सहसबध है, क्योंकि यह दो चरो के मध्य सबध को, अन्य चरो के प्रभाव के लिए सहसबध तकनीक द्वारा बिना किसी समजन के, मापता है। परिचयात्मक अनुभाग मे विकसित प्रतीको का प्रयोग करते हुए, यदि हम माध्यिका आय X_1 का केवल प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी एव मजातीय कर्मचारियों X_2 से सहमबध स्थापित करना चाहे तो हम निम्नांकित मापो का परिकलन करते है

आकलन समीकरण :

$$X_{c1\cdot2} = a_{1\cdot2} + b_{12} Y_2 \quad \text{अथवा} \quad x_{c1\cdot2} + b_{12} x_2$$

प्रसामान्य समीकरण :

$$\text{I} \quad \Sigma Y_1 = Na_{1\cdot2} + b_{12} \Sigma Y_2 \text{ अथवा } \bar{X}_1 = a_{1\cdot2} + b_{12} \bar{X}_2$$
$$a_{1\cdot2} = \bar{X}_1 - b_{12} \bar{X}_2$$
$$\text{II} \quad \Sigma X_1 X_2 = a_{1\cdot2} \Sigma Y_2 + b_{12} \Sigma X_2^2 \text{ अथवा } \Sigma x_1 x_2 = b_{12} \Sigma x_2^2$$
$$b_{12} = \frac{\Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_2^2}$$

कुल घटवढ

$$\Sigma x_1^2 = \Sigma X_1^2 - \bar{X}_1 \Sigma X_1$$

परिकलित मानों के वर्गों का योगफल तथा व्याख्यात घटवढ

$$\Sigma X_{c1\cdot2}^2 = a_{1\cdot2} \Sigma Y_1 + b_{12} \Sigma Y_1 Y_2 \quad \text{(व्याख्यात वर्गों का योग)} \qquad \Sigma x_{c1\cdot2}^2 = b_{12} \Sigma x_1 x_2 \quad \text{(व्याख्यात घटवढ)}$$

4 सारणी 21.2 म प्रेक्षणा म दो या तीन महत्त्वपूर्ण अक है। अन सारणी 21 3 म गुणनफल प्राय चार या पाँच अका तक अकित किये गये हैं। इस अध्याय म इन मानो से परिकलित विभिन्न मापा म दो या तीन से अधिक महत्वपूर्ण अक नहीं हो सकते। फिर भी परिकलनों पर आन्तरिक जाच के निमित्त तथा मध्यवर्ती परिकलना पर आधारित अन्तिम परिणामा की परिशुद्धता म योगदान के निमित्त अधिक अक अकित किए गये हैं।

अव्याख्यात घटबढ

$$\Sigma x^2_{s1\ 2} = \Sigma X_1^2 - \Sigma X^2_{1\ 2} \quad \text{अथवा} \quad \Sigma X_1^2 - \Sigma x^2_{c1\ 2}$$

आकलन की मानक त्रुटि

$$s_{1\ 2} = \sqrt{\frac{\Sigma x_{s1}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma Y^2 \quad \Sigma X^2_{\ 2}}{N}} \quad \text{अथवा} \quad \sqrt{\frac{\Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{\ \ 2}}{N}},$$

सहसबध का गुणाक

$$r_{12} = \sqrt{\frac{\Sigma Y_1 \quad - A_1\Sigma X_1}{\Sigma Y_1^2 - A_1\Sigma X_1}} \quad \text{अथवा} \quad \sqrt{\frac{\Sigma x^2_{c1\ 2}}{\Sigma x_1^{\ 2}}}$$

पाठको का ध्यान पहले ही इस बात पर गया होगा कि हमने सरल सहसबध मे प्रयुक्त विभिन्न समाकरणों और सूत्रो को ही कुछ भिन्न प्रतीको के साथ प्रस्तुत किया है।

इन व्यञ्जकों पर आधारित परिकलनो के परिणाम नीचे दिए गए हैं। निरर्थक श्रम को बचाने के लिए माध्यो से विचलनो का उपयोग करते हुए, ऊपर दाहिनी ओर दिए गए सत्रों का प्रयोग किया गया है।

आकलन समीकरण के लिए स्थिराक

$$b_{12} = \frac{16\ 502}{29\ 481} = +0\ 55975$$

$$a_{1\ 2} = 5\ 5526 \quad (0\ 55975)(11\ 068421) = -0\ 6429.$$

आकलन समीकरण

$$X_{c1\ 2} = -0\ 6429 + 0\ 55975X_2$$
$$x_{c1\ 2} = +0\ 55975x_2$$

कुल घटबढ

$$\Sigma x_1^2 = -601\ 25 - (5\ 552632)(105\ 5) = 15\ 447$$

व्याख्यात घटबढ

$$\Sigma x^2_{c1\ 2} = (0\ 55975)(16\ 502) = 9\ 237$$

अव्याख्यात घटबढ

$$\Sigma x^2_{s1\ 2} = 15\ 447 - 9\ 257 = 6\ 210$$

आकलन की मानक त्रुटि

$$s^2_{1\ 2} = \frac{6\ 210}{19} = 0\ 3268$$

$$s_{1\ 2} = 0\ 571$$

सहसबध का गुणाक

$$r^2_{12} = \frac{9\ 237}{15\ 447} = 0\ 59798$$

$$r_{12} = 0\ 7733$$

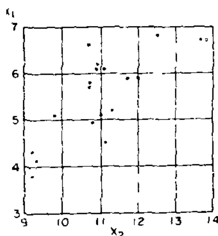
चर 3 के लिए समान विधि को अपनाते हुए, हम पाते हैं :

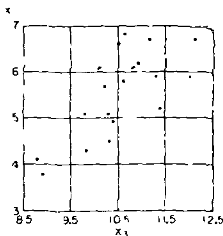
$$b_{13} = +0\ 75270,$$
$$a_{1\ 3} = -2\ 3715,$$
$$\Sigma x^2_{1\ 3} = 7.819$$
$$\Sigma x^2_{s1\ 3} = 7\ 628,$$
$$s_{1\ 3} = 0\ 634,$$
$$r'_{13} = 0\ 50618,$$
$$r_{13} = +0\ 7115$$

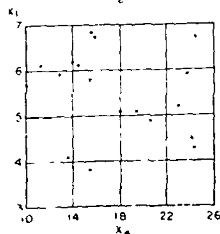
चार्ट 21 1 माध्यिका आय तथा विचाराधीन स्वतन्त्र चरो में से प्रत्येक के मध्य सरल सम्बन्ध के प्रकीर्ण आरेखों को प्रस्तुत करता है। इन तीन सम्बन्धों के लिए सहसम्बन्ध गुणाक तथा तीन स्वतन्त्र चरो के मध्य सहसबध के गुणाक है

$$r_{12} = +0\ 7733 \qquad r_{23} = +0\ 7942$$
$$r_{13} = +0\ 7115 \qquad r_{24} = +0\ 1715$$
$$r_{14} = -0\ 2578 \qquad r_{34} = +0\ 3289$$

यहाँ इस बात पर ध्यान देना रुचिकर होगा कि प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी एव सजातीय कर्मचारी, Y_2, ने माध्यिका आय के साथ उच्चतम सकल सहसंबध को व्यक्त







चार्ट 21 1 माध्यिका आय X_1 तथा तीन स्वतन्त्र चरो प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी, एव सजातीय कर्मचारी X_2, पूर्ण हुए माध्यिका स्कूल वर्ष X_3, और प्रतिशत प्रवासी X_4 मे से प्रत्येक के प्रकीर्ण आरेख। आँकड़े सारणी 21.2 से।

किया, तथा प्रतिशत प्रवासी, X_4, ने न्यूनतम का। आगे हम देखेंगे कि क्या अन्य चरो का प्रभाव हटा दिए जाने पर स्वतन्त्र चर महत्त्व की उसी कोटि को बनाए रखते है।

दो स्वतन्त्र चर अनेकधा सहसबध—निस्सन्देह, हम माध्यिका आय के अधिक परिशुद्धता के साथ आकलन की आशा कर सकते है, यदि हम केवल एक की अपेक्षा दो स्वतन्त्र चरो पर विचार करे। अत आइये हम प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियो तथा माध्यिका स्कूल वर्षो दोनो से आकलन करे। आकलन समीकरण इस प्रकार होगा

$$Y_{1\cdot 23}=a_{1\cdot 23}+b_{12\cdot 3}X_2+b_{13\cdot 2}X_3,$$

अथवा, विचलनो की दशा म,

$$x_{1\cdot 23}=b_{12\cdot 3}x_2+b_{13\cdot 2}x_3$$

X_c तथा a क पश्चात् 1 23 अधोलेख हम बताते हैं कि हम X (प्रतिशत व्यावसायिक आदि कमचारियो) तथा X_3 (माध्यिका स्कूल वर्षो)चरो से X_1 (माध्यिका आय) के मानो का आकलन कर रहे है। प्रथम b, समान माध्यिका स्कूल वर्ष सयोजन वाले क्षेत्रो के लिए प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियो म इकाई परिवतन के साथ सम्बद्ध माध्यिका आय मे प्रमामान्य परिवतन का परिचायक है, दूसरा b समान प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियो वाले क्षेत्रो क लिए माध्यिका स्कूल वर्षो मे इकाई परिवर्तन के साथ सम्बद्ध माध्यिका आय मे प्रमामान्य परिवतन को व्यक्त करता है।

आवश्यक प्रसामान्य समीकरण है

$$\text{I} \quad \Sigma X_1 = Na_{1\cdot 23}+b_{12\cdot 3}\Sigma X_2+b_{13\cdot 2}\Sigma X_3,$$

$$\text{II} \quad \Sigma X_1X_2 = a_{1\cdot 23}\Sigma X_2+b_{12\cdot 3}\Sigma X_2^2+b_{13\cdot 2}\Sigma X_2X_3,$$

$$\text{III} \quad \Sigma X_1X_3 = a_{1\cdot 23}\Sigma X_3+b_{12\cdot 3}\Sigma X_2X_3+b_{13\cdot 2}\Sigma X_3^2$$

यदि प्रमामान्य समीकरणो को माध्यो से विचलनो के रूप मे प्रस्तुत किया जाए तो पर्याप्त श्रम-निवारण किया जा सकता है। इस दशा म प्रथम समीकरण अदृश्य हो जाता हैं, क्योकि Σx_1 Σx_2, तथा Σx_3 प्रत्यक शून्य है। शेष दो समीकरण है .

$$\text{II} \quad \Sigma x_1x_2=b_{12\cdot 3}\Sigma x_2^2+b_{13\cdot 2}\Sigma x_2x_3,$$

$$\text{III} \quad \Sigma x_1x_3=b_{12\cdot 3}\Sigma x_2x_3+b_{13\cdot 2}\Sigma x_3^2$$

आवश्यक प्रतिस्थापन करने से, हम पाते है

$$\text{II} \quad 16\,502=29\,481b_{12\cdot 3}+16\,019b_{13\cdot 2},$$

$$\text{III} \quad 10\,388=16\,019b_{12\cdot 3}+13\,801b_{13\cdot 2}$$

इन युगपत् समीकरणो को हल करने पर प्राप्त होता है :

$$b_{12\cdot 3}=+0\,40820,$$

$$b_{13\cdot 2}=+0\,27889$$

$a_{1\cdot 23}$ प्राप्त करने के लिए, हम समीकरण I का प्रयोग करते हैं, इस N से भाग देने पर हम प्राप्त करते है

$$\bar{X}_1=a_{1\cdot 23}+b_{12\cdot 3}\bar{X}_2+b_{13\cdot 2}\bar{X}_3$$

$$a_{1.23} = \bar{X}_1 - b_{12.3}\bar{X}_2 - b_{13.2}\bar{X}_3,$$
$$= 5.552632 - (0.40820)(11.068421) - (0.27889)(10.531579),$$
$$= -1.9026$$

तब आकलन समीकरण है

$$X_{c1.23} = -1.903 - 0.408X_2 + 0.279X_3.$$

व्याख्यात घटबढ है[5]

$$\Sigma x^2_{c1.23} = b_{12.3}\Sigma x_1x_2 + b_{13.2}\Sigma x_1x_3,$$
$$= (0.40820)(16.502) + (0.27889)(10.388)$$
$$= 9.633$$

सम्बन्ध के अन्य मापों का परिकलन अब यथावत् उस ढग से किया जाता है जिससे केवल एक स्वतन्त्र चर होने पर होता है।

$$\Sigma x^2_{1.23} = \Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{c1.23}$$
$$= 15.447 - 9.633 = 5.814$$

$$s^2_{1.23} = \frac{\Sigma x^2_{1.23}}{N} = \frac{5.814}{19} = 0.3060,$$

$$s_{1.23} = 0.553$$

$$R^2_{1.23} = \frac{\Sigma x^2_{c1.23}}{\Sigma x_1^2} = \frac{9.633}{15.447} = 0.6236,$$

$$R_{1.23} = 0.7897$$

अनेकधा निर्धारण $R_{1.23}$ का गुणाक 0.6236 होने के कारण, हमने X_1 मे उपस्थित घटबढ की 62 प्रतिशत व्याख्या की है। ध्यान दीजिए कि r^2_{12} अथवा r^2_{13} से $R^2_{1.23}$ बृहत् है, जब r^2_{13} 0.50618 था, तब r^2_{12} का मान 0.59798 पाया गया।

आकलन की मानक त्रुटि $s_{1.23}$ 0.553 अभिनिश्चित की गई जो $s_{1.2} = 0.571$ अथवा $s_{1.3} = 0.634$ दोनों से लघु है। दो स्वतन्त्र चरों X_2 और X_3 के प्रयोग द्वारा X_1 के आकलन, केवल X_2 अथवा X_3 मे से किसी एक के प्रयोग द्वारा किये गये आकलनों की अपेक्षा अधिक सतोषजनक होगे। विशेष रूप से, X_1 मानों का मानक विचलन आकलन समीकरण

$$X_{c1.23} = a_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$$

के निकट मान ग्रहण करता है। यह X_1 मानों के मानक विचलन लगभग

$$X_{c1.2} = a_{1.2} + b_{12}X_2$$

अथवा, लगभग

$$X_{c1.3} = a_{1.3} + b_{13}X_3$$

से कम है।

5 साथ ही, $\Sigma x^2_{c1.23} = \Sigma X^2_{c1.23} - \bar{X}_1\Sigma X_1$, जहाँ $\Sigma X^2_{c1.23} = a_{1.23}\Sigma X_1 + b_{12.3}\Sigma X_1X_2 + b_{13.2}\Sigma X_1X_3$

दो स्वतंत्र चर : आंशिक सहसंबंध—जब केवल एक स्वतंत्र चर (प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी) पर विचार किया गया, तब व्याख्यात घटबढ़ थी $\Sigma x^2_{c1.2}=$ 9.237 जब दो स्वतंत्र चरों (प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी तथा माध्यिका स्कूल वर्ष) का प्रयोग किया गया तब व्याख्यात घटबढ़ बढ़ कर $\Sigma x^2_{c1.23}=9.633$ हो गई। अतएव, माध्यिका स्कूल वर्षों द्वारा व्याख्यात घटबढ़ में वृद्धि

$$\Sigma x^2_{c1.23}-\Sigma x^2_{c1.2}=9.633-9.237=0.396$$

हुई। केवल प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों पर विचार करने के बाद, जिस घटबढ़ की व्याख्या करना शेष है, वह

$$\Sigma x^2_{s1.2}=\Sigma x_1^2-\Sigma x^2_{c1.2},$$
$$=15.447-9.237=6.210$$

थी। तब पहले अव्याख्यात घटबढ़ का अनुपात, जिसकी व्याख्या माध्यिका स्कूल वर्षों को भी सम्मिलित करके की गई सानुपातिक है :

$$\frac{0.39616}{6.210}=0.06379$$

जैसा पहले नोट किया जा चुका है, यह अनुपात *आंशिक निर्धारण का गुणाक* कहलाता है, जिसका वर्गमूल *आंशिक सहसंबंध का गुणाक* है। अर्थात्

$$r^2_{13.2}=\frac{\Sigma x^2_{c1.23}-\Sigma x^2_{c1.2}}{\Sigma x_1^2-\Sigma x^2_{c1.2}}=\frac{\Sigma x^2_{c1.23}-\Sigma x^2_{c1.2}}{\Sigma x^2_{s1.2}}$$

$$=\frac{9.633-9.237}{6.210}=0.06379;$$

$$r_{13.2}=+0.2525$$

इस आंशिक सहसंबंध के गुणाक का चिह्न वही है, जो आकलन समीकरण में $b_{13.2}$ का है। यह गुणाक माध्यिका आय और माध्यिका स्कूल वर्षों में सम्बन्ध की सन्निकटता का माप है जब प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों को सांख्यिकीय रूप से स्थिर रखा गया हो, यह सरल सहसंबंध गुणाक है, जो समान प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों वाले क्षेत्रों के सम्बन्ध में प्रत्याशित होगा। जैसा पहले कहा जा चुका है, यदि $r^2_{13.2}$ के लिए उपर्युक्त व्यञ्जक के भाज्य और हर दोनों को Σx_1^2 से भाग दिया जाए तो हम आंशिक निर्धारण गुणाक तथा दो सकल निर्धारण गुणाकों के मध्य सम्बन्ध प्रदर्शित करने वाला सूत्र पायेंगे। इस प्रकार,

$$r^2_{13.2}=\frac{R^2_{1.23}-r^2_{12}}{1-r^2_{12}},$$

$$=\frac{0.62363-0.59798}{1-0.59798}=0.06379,$$

$$r_{13.2}=+0.2525$$

ध्यान दीजिए कि इस सूत्र में अंकित मानों में से प्रत्येक पिछले सूत्र का ही मान है जो 15.447 द्वारा विभाजित है (वास्तव में, $R^2_{1.23}$ तथा r^2_{12} को प्राप्त करने के लिए पहले ही यही विधि अपनाई गई है)। इस सूत्र का आगे $R^2_{1.23}$ तथा

r^2_{12} के परिकलन के लिए आवश्यक अन्तिम विभाजन की जांच-पड़ताल[6] के लिए प्रयोग किया जा सकता है। इसका प्रयोग उस समय भी किया जा सकता है, जब r^2_{12} का परिकलन $r^2_{12} = \frac{\Sigma x^2_{1\cdot 2}}{\Sigma x^2_1}$ से भिन्न किसी अन्य विधि से किया जाए, अथवा जब निर्धारण के गुणाक, अथवा सहसम्बध के गुणाक तो निर्दिष्ट हों, किन्तु मूल आँकड़े न हों।

$r_{13\cdot 2}$ के सहयोगी माप के रूप में हमें आंशिक गुणाक $r_{12\cdot 3}$ प्राप्त कर लेना चाहिए, जो माध्यिका आय तथा प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों के पारस्परिक सम्बन्ध को मापता है, जब कि माध्यिका स्कूल वर्षों को स्थिर रखा गया हो। हमारे आकलन समीकरण में प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों और माध्यिका स्कूल वर्षों के प्रयोग द्वारा, न कि अकेले माध्यिका स्कूल वर्षों के प्रयोग में, परिकलित मानों की घटबढ़ में वृद्धि मालूम करके हम ऐसा कर सकते हैं। इस प्रकार

$$r^2_{12\cdot 3} = \frac{\Sigma x^2_{1\cdot 23} - \Sigma x^2_{1\cdot 3}}{\Sigma x^2_{1\cdot 3}} = \frac{9\,633 - 7\,819}{7\,628},$$

$$= \frac{R^2_{1\cdot 23} - r^2_{13}}{1 - r^2_{13}} = \frac{0\,62363 - 0\,50619}{0\,49381},$$

$$= 0\,23782,$$

$$r_{12\cdot 3} = +0\,4877$$

आंशिक गुणाक, जैसे $r_{13\cdot 2}$ तथा $r_{12\cdot 3}$ को प्राय *प्रथम-क्रम गुणाक* कहा जाता है, क्योंकि एक चर स्थिर रखा गया है। सरल गुणाकों को *शून्य क्रम गुणाक* कहा जाता है क्योंकि उनमें कोई चर स्थिर नहीं रखा गया। इस अध्याय में आगे चल कर, हम $r_{12\cdot 34}$, $r_{13\cdot 24}$, तथा $r_{14\cdot 23}$ पर विचार करेंगे जो *द्वितीय क्रम गुणाक* है। साधारणतया कहा जाए तो क्रम अभिधान सांख्यिकीय रूप से स्थिर रखे गये चरों की संख्या का परिचायक है।

माध्यिका आय तथा प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी एवं सजातीय कर्मचारियों का पारस्परिक सकल सहसंबंध r_{12}, स्मरण करें +0 7733 था। दोनों चरों में माध्यिका स्कूल वर्षों की घटबढ़ों के प्रभाव को हटाने से सम्बन्ध में प्रचुर कमी हुई, क्योंकि $r_{12\cdot 3} = +0\,4877$ इसी प्रकार, r_{13}, माध्यिका आय और माध्यिका स्कूल वर्षों में सकल सहसंबंध +0 7115 था। प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों की घटबढ़ों के प्रभाव को हटाने का परिणाम हुआ $r_{13\cdot 2} = +0\,2525$ यहाँ भी स्पष्ट कमी हुई। उद्धृत दोनों कमियाँ प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारियों और माध्यिका समाप्त स्कूल वर्षों के बीच अति उच्च सहसंबंध +0 7942, के कारण है। पहले का और तब दूसरे का प्रभाव हटाने से आंशिक सहसंबंध गुणाकों पर ऋणात्मक प्रभाव पड़ा।

$R_{1\cdot 23}$ तथा सकल और आंशिक सहसंबंध के मापों में सम्बन्ध—पाठक को यह देख कर आश्चर्य होगा कि जब $r_{12} = +0\,7733$ तथा $r_{13} = +0\,7115$, तब $R_{1\cdot 23}$ केवल 0 7897 है। यह इन मापों का लक्षण नहीं है कि अनेकधा गुणाक दो सकल गुणाकों का

---

6 तथापि नोट कीजिए कि Σx^2_1 से भाग दिए जाने के कारण भाज्य और हर की प्रवृत्ति एक सार्थक अंक खो देने की है।

योग हो। सम्बन्ध उसकी अपेक्षा अधिक जटिल है।[7] तथापि, यह कहा जा सकता है कि समान चिह्न वाले r_{12} और r_{13} के निर्दिष्ट मानों के लिए, स्वतन्त्र चरों में जितनी ही द्विरावृत्ति कम होगी (अर्थात उनका धनात्मक सहसंबंध जितना कम या ऋणात्मक सहसंबंध जितना अधिक होगा) उतना ही अनेकधा सहसंबंध अधिक होगा। प्रस्तुत उदाहरण में, यह अत्यंत रुचिकर है कि $r_{23} = 0.7942$ और इसलिए इन दो चरों में काफी द्विरावृत्ति का परिचायक है। इसीलिए माध्यिका स्कूल वर्षों अथवा प्रतिशत व्यावसायिक, तकनीकी एवं सजातीय कर्मचारियों को जोड़ देने से किसी भी अकेले स्वतन्त्र चर के प्रयोग से प्राप्त सहसंबंध की अपेक्षा सहसम्बन्ध में कोई महत्त्वपूर्ण सुधार नहीं होता। इसके बिल्कुल उलट वास्तव में यह इसे कम कर देता है।[8]

सहसंबंध का अनेकधा गणांक दो आंशिक गुणांकों का योग भी नहीं है। तथापि, एक संयोज्य सम्बन्ध है ($r^2_{12.3}$ तथा r^2_{13} के लिए अभी-अभी निर्दिष्ट व्यञ्जकों से व्युत्पन्न) जो निम्नांकित दो रूपों में से किसी भी रूप में लिखा जा सकता है

$$R^2_{1.23} = r^2_{12} + r^2_{13.2}(1 - r^2_{12}),$$
$$= 0.5980 + (0.0638)(1 - 0.5980) = 0.6236, \text{ अथवा}$$
$$R^2_{1.23} = r^2_{13} + r^2_{12.3}(1 - r^2_{13}),$$
$$= 0.5062 + (0.2378)(1 - 0.5062) = 0.6236$$

इन समीकरणों के पीछे जो विचार है उस पर ध्यान देना रुचिकर होगा। उदाहरण के लिए प्रथम समीकरण में (1) एक स्वतन्त्र चर के प्रयोग द्वारा व्याख्यात घटबढ़ के अनुपात तथा (2) (क) उस स्वतन्त्र चर $1 - r^2_{12}$ द्वारा अव्याख्यात घटबढ़ के अनुपात, तथा (ख) प्रथम चर $r^2_{13.2}$ के अतिरिक्त अन्य स्वतन्त्र चर के प्रयोग के फलस्वरूप व्याख्यात (क) के अनुपात के गुणनफल का योग है।

तीन स्वतन्त्र चर अनेकधा सहसंबंध– पिछले अनुच्छेदों में हमने, दो स्वतन्त्र चरों, प्रतिशत व्यावसायिक तकनीकी एवं सजातीय कर्मचारियों, X_2 तथा माध्यिका समाप्त स्कूल-वर्षों X_3 पर विचार किया। यदि हम एक तीसरा स्वतन्त्र चर, प्रतिशत प्रवासी X_4 और जोड़ दें, तो हम निम्न प्रकार के आकलन समीकरण का प्रयोग करेंगे

$$X_{c1.234} = a_{1.234} + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4$$

---

7 सम्बन्ध निम्न प्रकार है

$$R^2_{1.23} = \frac{r^2_{12} + r^2_{13} - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r^2_{23}}$$

इस उदाहरण में,

$$R^2_{1.23} = \frac{0.5980 + 0.5062 - 2(0.7733)(0.7115)(0.7942)}{1 - 0.6307} = 0.6236,$$

$$R_{1.23} = 0.7897$$

8 एक ऐसी अधिक लौकिक स्थिति के लिए जिसमें किसी एक अकेले स्वतन्त्र चर के प्रयोग से प्राप्त सहसंबंध की अपेक्षा, एक और स्वतन्त्र चर को जोड़ने से सहसम्बन्ध में सुधार हो जाता है मूल अंग्रेजी पुस्तक का द्वितीय संस्करण, पृष्ठ 545—546 देखिए।

चार स्थिराको को प्राप्त करने के लिए यदि हम X-मानो का प्रयोग करें तो चार प्रसामान्य समीकरणों की आवश्यकता पडती है। वे है

$$\text{I} \quad \Sigma X_1 = Na_{1.234} + b_{12.34}\Sigma X_2 + b_{13.24}\Sigma X_3 + b_{14.23}\Sigma X_4$$

$$\text{II} \quad \Sigma X_1X_2 = a_{1.234}\Sigma X_2 + b_{12.34}\Sigma X_2^2 + b_{13.24}\Sigma X_2X_3 + b_{14.23}\Sigma X_2X_4$$

$$\text{III} \quad \Sigma X_1X_3 = a_{1.234}\Sigma X_3 + b_{12.34}\Sigma X_2X_3 + b_{13.24}\Sigma X_3^2 + b_{14.23}\Sigma X_3X_4,$$

$$\text{IV} \quad \Sigma X_1X_4 = a_{1.234}\Sigma X_4 + b_{12.34}\Sigma X_2X_4 + b_{13.24}\Sigma X_3X_4 + b_{14.23}\Sigma X_4^2$$

तथापि, X मानों के प्रयोग द्वारा हम पहले की भांति प्रसामान्य समीकरण I का निरसन कर देते हैं। तब शेष समीकरण ये होंगे

$$\text{II} \quad \Sigma x_1x_2 = b_{12.34}\Sigma x_2^2 + b_{13.24}\Sigma x_2x_3 + b_{14.23}\Sigma x_2x_4$$

$$\text{III} \quad \Sigma x_1x_3 = b_{12.34}\Sigma x_2x_3 + b_{13.24}\Sigma x_3^2 + b_{14.23}\Sigma x_3x_4$$

$$\text{IV} \quad \Sigma x_1x_4 = b_{12.34}\Sigma x_2x_4 + b_{13.24}\Sigma x_3x_4 + b_{14.23}\Sigma x_4^2$$

प्रसामान्य समीकरणों II III तथा IV में पूर्व प्राप्त वर्गीकृत विचलनों के योगों तथा विचलनों के गुणनफलों के योगों को प्रतिस्थापित करने से हम

$$\text{II} \quad 16.502 = 29.481b_{12.34} + 16.019b_{13.24} + 18.786b_{14.23}$$

$$\text{III} \quad 10.388 = 16.019b_{12.34} + 13.801b_{13.24} + 24.644b_{14.23}$$

$$\text{IV} \quad -20.441 = 18.786b_{12.34} + 24.644b_{13.24} + 406.918b_{14.23}$$

प्राप्त करते हैं।

तीन युगपत समीकरणों को हल करने की विधि क्योंकि पृष्ठ 438–440 पर दी गई है अत यहाँ उसकी पुनरावृत्ति नहीं की जाएगी। हल

$$b_{12.34} = +0.31911$$
$$b_{13.24} = +0.55874$$
$$b_{14.23} = -0.09880$$

प्रदान करता है।

यदि हम प्रसामान्य समीकरण I को इस प्रकार लिखें

$$a_{1.234} = \bar{X}_1 - b_{12.34}\bar{X}_2 - b_{13.24}\bar{X}_3 - b_{14.23}\bar{X}_4$$

तो हम सारणी 21.1 से समान्तर माध्यों के मानों तथा अभी दिए गए b मानों को प्रतिस्थापित करके पायेंगे

$$a_{1.234} = 5.552632 - (0.31911)(11.068421) - (0.55874)(10.531579) - (0.09880)(17.310526)$$

$$= -2.1535$$

तब, आकलन समीकरण है

$$X_{1.234} = -2.1535 + 0.31911X_2 + 0.55874X_3 - 0.09880X_4$$

व्याख्यात घटबढ है

$$\Sigma x^2_{e1.234} = b_{12.34}\Sigma x_1x_2 + b_{13.24}\Sigma x_1x_3 + b_{14.23}\Sigma x_1x_4,$$

$$= (0.31911)(16.502) + (0.55874)(10.388) + (-0.09880)(-20.441),$$

$$= 13.0897$$

तथा अव्याख्यात घटबढ है

$$\Sigma x^2_{e1.234} = \Sigma x^2_1 - \Sigma x^2_{c1.234},$$
$$= 15.447 - 13.0897 = 2.3573$$

अब हम आकलन की मानक त्रुटि का परिकलन कर सकते हैं जो है

$$s_{1.234} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2_{e1.234}}{N}} = \sqrt{\frac{2.3573}{19}} = 0.352$$

अनेकधा निर्धारण का गुणांक तथा अनेकधा सहसंबंध का गुणांक हैं

$$R^2_{1.234} = \frac{\Sigma x^2_{c1.234}}{\Sigma x^2_1} = \frac{13.0897}{15.447} = 0.8474,$$

$$R_{1.234} = 0.9205$$

आंशिक सहसंबंधों का परिकलन प्रारम्भ करने से पहले यह देखना वांछनीय है कि चर X_4 के प्रयोग से हमारे सम्बन्ध में क्या सुधार हुआ है। यह स्मरण करें कि $R^2_{1.23}$, 0.6236 था जिसका संकेत है कि X_2 तथा X_3 की ओर निर्देश द्वारा हमने X_1 में घटबढ के 62 प्रतिशत की व्याख्या प्रस्तुत की थी। हमने अभी $R^2_{1.234}$ को 0.8474 के बराबर पाया है। अब तीन स्वतन्त्र चरों के प्रयोग द्वारा हमने आश्रित चर में घटबढ के 85 प्रतिशत की व्याख्या की है।[9] $R_{1.234}$ न केवल $R^2_{1.23}$ से, वरन् यह $R^2_{1.24}$ अथवा $R^2_{1.34}$ से भी बड़ा है। इन अन्तिम दो गुणांकों में से किसी का भी पहले परिकलन नहीं हुआ है। वे

$$R^2_{1.24} = 0.7551 \text{ तथा } R^2_{1.34} = 0.7774$$

हैं। पहले (पृष्ठ 481) यह देखा गया था कि r^2_{12} अथवा r^2_{13} दोनों से $R^2_{1.23}$ बड़ा था। पाठक जाँच कर सकते हैं कि (1) r^2_{12} अथवा r^2_{14} दोनों से $R^2_{1.24}$ बढ जाता है, तथा (2) r^2_{13} अथवा r^2_{14} दोनों में से प्रत्येक की अपेक्षा $R^2_{1.34}$ बड़ा है।

समुचित स्वतन्त्र चरों के योग से R^2 अथवा R का मान जैसे बढता है वैसे आकलन की माप त्रुटि का मानक घटता है। पहले हमने $s_{1.23}$ को 0.553 के बराबर पाया था, अब हम देखते हैं कि $s_{1.234} = 0.352$ $s_{1.24}$ तथा $s_{1.34}$ (जिनमें से किसी का परिकलन पहले नहीं हुआ) के मानों में से प्रत्येक $s_{1.234}$ से बड़ा है, वे

$$s_{1.24} = 0.446 \text{ तथा } s_{1.34} = 0.425$$

हैं। यह स्पष्ट है कि तीन स्वतन्त्र चरों में किन्हीं दो के प्रयोग से प्राप्त आकलन की अपेक्षा

9 यह स्मरण रखना आवश्यक है कि अन्य स्वतन्त्र चर को जोड देने में स्वतन्त्रता के अतिरिक्त अंशांक की हानि हो जाती है। इस प्रकार कभी कभी यह हो सकता है कि R^2 के मान में वृद्धि हो सकती है किन्तु वृद्धि का सार्थक होना आवश्यक नहीं है। निर्धारण के आंशिक और अनेकधा गुणांकों की सार्थकता की परीक्षा की चर्चा अध्याय 26 के अन्तिम भाग में की गई है।

सभी तीनो स्वतंत्र चरो के प्रयोग द्वारा प्राप्त माध्यिका आय के आकलन अधिक सतोषजनक होंगे। अधिक यथार्थ रूप मे कहा जाए तो आकलन समीकरण

$$X_{c1.234} = a_{1.234} + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4$$

के लगभग होने पर X_1 मानो का मानक विचलन,

$$X_{c1.23} = a_{12.3} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$$

के लगभग अथवा

$$X_{c1.24} = a_{1.24} + b_{12.4}X_2 + b_{14.2}X_4$$

के लगभग अथवा

$$X_{c1.34} = a_{1.34} + b_{13.4}X_3 + b_{14.3}X_4$$

के लगभग X_1 मानो के मानक विचलन की अपेक्षा कम होगा।

तीन स्वतन्त्र चर : आंशिक सहसम्बन्ध—पहले प्रयुक्त विधि के समानान्तर,

$$r^2_{14.23} = \frac{\Sigma x^2_{c1.234} - \Sigma x^2_{c1.23}}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{c1.23}},$$

$$= \frac{13\,090 - 9\,633}{15\,447 - 9\,633} = 0.59454,$$

$$r_{14.23} = -0.7711$$

क्योंकि $r^2_{14.23} = 0.5945$, अत स्वतन्त्र चर X_4 के प्रयोग ने हमे घटबढ के 59 प्रतिशत की व्याख्या करने का सामर्थ्य प्रदान किया, जिसकी व्याख्या करने म X_2 तथा X_3 असफल रहे थे। $b_{14.23}$ के चिह्न से सहमति के लिए, $r_{14.23}$ का चिह्न ऋणात्मक है, और यह गुणाक माध्यिका आय X_1 तथा प्रतिशत प्रवासो X_4 मे सम्बन्ध को मापता है, जबकि X_2 तथा X_3 को सांख्यिकीय रीति मे स्थिर रखा गया है। आगे चल कर हम $r_{13.24}$ तथा $r_{12.34}$ के मानो को प्राप्त करेंगे, जो क्रमश चरो X_1 तथा X_3 मे सहसम्बन्ध के X_2 तथा X_4 को स्थिर रख कर और चरो X_1 तथा X_2 म सहसम्बन्ध के X_3 तथा X_4 को स्थिर रखते हुए माप है।

$r^2_{14.23}$ का मान निम्न व्यजक मे भी प्राप्त किया जा सकता है

$$r^2_{14.23} = \frac{R^2_{1.234} - R^2_{1.23}}{1 - R^2_{1.23}},$$

$$= \frac{0.84740 - 0.62363}{1 - 0.62363} = 0.59454,$$

$$r_{14.23} = -0.7711$$

चार या अधिक स्वतन्त्र चर—जब चार या अधिक स्वतन्त्र चर हो तो युगपत् समीकरणो के हल के लिए डूलिटल विधि (अथवा किसी अन्य व्यवस्थित विधि) का प्रयोग उचित है।[10]

---

10 प्रसामान्य समीकरण (तथा उनसे व्युत्पन्न अन्य व्यापकीकृत व्यजक) मूल अंग्रेजी पुस्तक के द्वितीय सस्करण म 549—551 पृष्ठो पर दिए गए है और डूलिटल विधि का वर्णन 498—503 पृष्ठो पर किया गया है।

अनेकधा आंशिक गुणांक—ठीक जिस प्रकार आंशिक निर्धारण का गुणांक मापता है (1) अन्य स्वतन्त्र चर के प्रवेश के परिणामस्वरूप आश्रित चर के परिकलित माना की घटबढ़ के परिमाण में वृद्धि (2) उस घटबढ़ के सापेक्ष में जिसकी नए चर के प्रवेश से पूर्व व्याख्या नहीं की गई थी उसी प्रकार निर्धारण का अनेकधा आंशिक गुणांक दो या अधिक नए स्वतन्त्र चरों के प्रवेश के परिणामस्वरूप होने वाली सापेक्ष वृद्धि को मापता है।

अनेकधा तथा आंशिक सहसम्बन्ध गुणांकों तक एक अन्य अभिगम

कभी कभी किसी अध्ययन के ऐसे परिणाम सामने आते हैं जो अनेक चरों के लिए केवल शून्य क्रम सहसम्बन्ध गुणांक प्रस्तुत करते हैं। यदि अनेकधा और आंशिक गुणांक ज्ञात करने हों तो शून्य क्रम गुणांकों से उन्हें प्राप्त करना सम्भव है। आंशिक गुणांकों के लिए हम जिन सूत्रों का प्रयोग करेंगे उनका उपयोग यह जानने के लिए भी होगा कि आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक कभी बड़े और कभी छोटे क्यों हो जाते हैं जब अधिक चरों को स्थिर रखा जाता है। पिछली चर्चा में हमने पहले अनेकधा सहसम्बन्ध गुणांकों और फिर आंशिक गुणांकों पर विचार किया था। वर्तमान विवेचन के लिए पहले आंशिक गुणांकों पर विचार करना उपयोगी होगा क्योंकि चार या अधिक चरों के लिए अनेकधा गुणांक आंशिक गुणांकों में से कुछ के प्रयोग द्वारा अत्यन्त सुगमता से प्राप्त हो जाते हैं।

प्रथम क्रम आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक—तीन शून्य क्रम गुणांकों के मानों से किसी भी प्रथम क्रम गुणांक का निर्धारण किया जा सकता है। उदाहरण के लिए,

$$r_{13.2}=\frac{r_{13}-r_{12}r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{12}}\sqrt{1-r^2_{23}}}$$

हम इन प्रथम क्रम गुणांकों में से कुछ का परिकलन करेंगे और क्योंकि पाठक अन्यों के मानों को जानने की इच्छा कर सकते हैं अतः नीचे शून्य क्रम r, r^2, $1-r^2$, तथा $\sqrt{1-r^2}$ के सभी मानों की सूची प्रस्तुत की जा रही है। अनेकधा गुणांकों के परिकलन के लिए हम $1-r^2$ मानों में से कुछ का प्रयोग करेंगे।

$r_{12}=+0.7753$, $r^2_{12}=0.5980$

$r_{13}=+0.7115$ $r^2_{13}=0.5062$,

$r_{14}=-0.2578$ $r^2_{14}=0.0665$

$r_{23}=+0.7942$ $r^2_{23}=0.6307$

$r_{24}=+0.1715$ $r^2_{24}=0.0294$,

$r_{34}=+0.3289$ $r^2_{34}=0.1081$

$1-r^2_{12}=0.4020$ $\sqrt{1-r^2_{12}}=0.6340$

$1-r^2_{13}=0.4938$, $\sqrt{1-r^2_{13}}=0.7027$

$1-r^2_{14}=0.9335$ $\sqrt{1-r^2_{14}}=0.9662$

$1-r^2_{23}=0.3693$ $\sqrt{1-r^2_{23}}=0.6077$,

$1-r^2_{24}=0.9706$, $\sqrt{1-r^2_{24}}=0.9852$,

$1-r^2_{34}=0.8919$ $\sqrt{1-r^2_{34}}=0.9444$

जब किसी सहसम्बन्ध समस्या में चार चर अन्तर्ग्रस्त हों, तब बारह प्रथम क्रम गुणाकों का होना सम्भव है।[11] अपने प्रयोजनों के लिए हम इनमें से केवल आठ का परिकलन करेंगे, छः का X_1 आश्रित चर होगा तथा दो अन्य के $r_{24.3}$ और $r_{34.2}$ जिनका प्रयोग द्वितीय-क्रम आंशिक गुणाकों को प्राप्त करने के लिए किया जाएगा। यदि हमारा उद्देश्य, अगले परिच्छेद में दिखाए गए केवल तीन द्वितीय क्रम गुणाकों को प्राप्त करना होता, तो हम X_1 आश्रित चर वाले छः प्रथम क्रम गुणाकों में से अन्तिम दो की आवश्यकता न पड़ती।

$$r_{13.2}=\frac{r_{13}-r_{12}r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{12}}\sqrt{1-r^2_{23}}}=\frac{0.7115-(0.7733)(0.7942)}{(0.6340)(0.6077)}=+0.2526$$

$$r_{14.2}=\frac{r_{14}-r_{12}r_{24}}{\sqrt{1-r^2_{12}}\sqrt{1-r^2_{24}}}=\frac{-0.2578-(0.7733)(0.1715)}{(0.6340)(0.9852)}=-0.6251$$

$$r_{14.3}=\frac{r_{14}-r_{13}r_{34}}{\sqrt{1-r^2_{13}}\sqrt{1-r^2_{34}}}=\frac{-0.2578-(0.7115)(0.3289)}{(0.7027)(0.9444)}=-0.7411$$

$$r_{12.3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r^2_{13}}\sqrt{1-r^2_{23}}}=\frac{0.7733-(0.7115)(0.7942)}{(0.7027)(0.6077)}=+0.4876$$

$$r_{13.4}=\frac{r_{13}-r_{14}r_{34}}{\sqrt{1-r^2_{14}}\sqrt{1-r^2_{34}}}=\frac{0.7115-(-70.2578)(0.3289)}{(0.9662)(0.9444)}=+0.8727$$

$$r_{12.4}=\frac{r_{12}-r_{14}r_{24}}{\sqrt{1-r^2_{14}}\sqrt{1-r^2_{24}}}=\frac{0.7733-(-0.2578)(0.1715)}{(0.9662)(0.9852)}=+0.8588$$

$$r_{24.3}=\frac{r_{24}-r_{23}r_{34}}{\sqrt{1-r^2_{23}}\sqrt{1-r^2_{34}}}=\frac{0.1715-(0.7942)(0.3289)}{(0.6077)(0.9444)}=-0.1563$$

$$r_{34.2}=\frac{r_{34}-r_{23}r_{24}}{\sqrt{1-r^2_{23}}\sqrt{1-r^2_{24}}}=\frac{0.3289-(0.7942)(0.1715)}{(0.6077)(0.9852)}=+2.3219$$

अब हम देख सकते है कि प्रथम क्रम गुणांक, शून्य क्रम गुणांकों से कभी बड़े और कभी छोटे क्या होते हैं। प्रथम क्रम गुणांकों में से तीन पर विचार कीजिए (1) $r_{13.2}$, r_{13} की अपेक्षा छोटा है। ध्यान दीजिए r_{12} तथा r_{23} के चिह्न समान हैं और दोनों धनात्मक है और $r_{13.2}$ के व्यञ्जक के भाज्य का मान r_{13} से बहुत छोटा है। यह तथ्य कि हर 1.0 से छोटा है परिणाम की वृद्धि में सहायक होता है। (2) $r_{14.2}$, r_{14} से बड़ा है, दोनों ऋणात्मक है। r_{12} और r_{24} का गुणनफल r_{14} से अधिक नहीं है। क्योंकि r_{12} तथा r_{24} के चिह्न समान है, और क्योंकि r_{14} ऋणात्मक है अत $r_{14.2}$ के व्यञ्जक के भाज्य का मान r_{14} से बड़ा है। हर 1.0 से कम है। अत यह इतना अधिक नहीं है कि परिणाम में पर्याप्त परिवर्तन करके इसे r_{14} के मान के समान या उससे कम कर सके। (3) $r_{34.2}$, r_{34} से केवल कुछ ही छोटा है (अर्थात् यह सहसम्बन्ध के निम्नतर दर्जे को व्यक्त करता है)।

11 इस बात का प्रमाण कि ये सूत्र उनके समकक्ष हैं, जिनका हम प्रयोग करते आ रहे हैं, परिशिष्ट घ, परिच्छेद 21.1 में दिया गया है। परिकलन का श्रम पर्याप्त कम किया जा सकता है, यदि $\sqrt{1-r}$ के मानों को जे० आर० माइनर के टेबल्स ऑफ $\sqrt{1-r^2}$ तथा $1-r$ फार यूज इन पार्शल कोरिलेशन एन्ड ट्रिगनामेट्री जान्स हाप्किन्स प्रेस, बाल्टीमोर, अथवा ट्रूमैन ला केली की, दि केली स्टैटिस्टिकल टेबल्स, संशोधित संस्करण, मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क, 1948 में देख लिया जाए।

r_{23} और r_{24} का गुणनफल क्योंकि r_{34} से अधिक नहीं है, क्योंकि r_{23} और r_{24} के चिह्न समान (धनात्मक) हैं, और क्योंकि r_{34} धनात्मक है अतः $r_{34.2}$ के व्यंजक में भाज्य का मान r_{34} से छोटा धनात्मक मान है। हर यद्यपि 1.0 से छोटा है, किन्तु इतना छोटा नहीं कि परिणाम में उस बिन्दु तक वृद्धि कर दे जहाँ यह r_{34} के समान या उससे अधिक हो जाए।

द्वितीय-क्रम आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक—द्वितीय-क्रम गुणांक प्रथम-क्रम गुणांकों से प्राप्त किए जा सकते हैं। हम केवल उन द्वितीय क्रम गुणांकों का परिकलन करेंगे जिनका X_1 आश्रित चर होगा। ये हैं

$$r_{14.23}=\frac{r_{14.2}-r_{13.2}r_{34.2}}{\sqrt{1-r^2_{13.2}}\sqrt{1-r^2_{34.2}}}=\frac{(-0.6251)-(0.2526)(0.3219)}{\sqrt{1-(0.2526)^2}\sqrt{1-(0.3219)^2}}$$

$$=-0.7711$$

$$r_{13.24}=\frac{r_{13.2}-r_{14.2}r_{34.2}}{\sqrt{1-r^2_{14.2}}\sqrt{1-r^2_{34.2}}}=\frac{(0.2526)-(-0.6251)(0.3219)}{\sqrt{1-(-0.6251)^2}\sqrt{1-(0.3219)^2}}$$

$$=+0.6141$$

$$r_{12.34}=\frac{r_{12.3}-r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{1-r^2_{14.3}}\sqrt{1-r^2_{24.3}}}=\frac{0.4876-(0.7411)(-0.1563)}{\sqrt{1-(-0.7411)^2}\sqrt{1-(-0.1563)^2}}$$

$$=+0.5606$$

द्वितीय क्रम गुणांकों में से तीनों के लिए समान परिणाम प्रस्तुत करने वाले, वैकल्पिक सूत्र उपलब्ध हैं। वे हैं

$$r_{14.23}=\frac{r_{14.3}-r_{12.3}r_{24.3}}{\sqrt{1-r^2_{12.3}}\sqrt{1-r^2_{24.3}}},$$

$$r_{13.24}=\frac{r_{13.4}-r_{12.4}r_{23.4}}{\sqrt{1-r^2_{12.4}}\sqrt{1-r^2_{23.4}}},$$

$$r_{12.34}=\frac{r_{12.4}-r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{1-r^2_{13.4}}\sqrt{1-r^2_{23.4}}}$$

ध्यान दीजिए कि $r_{13.24}$ $r_{13.2}$ से बड़ा है। दूसरी ओर $r_{13.24}$, $r_{13.4}$ की अपेक्षा छोटा है। इसी प्रकार अन्य द्वितीय नम गुणांकों और उचित प्रथम नम गुणांकों में तुलना की जा सकती है।

m चरों के लिए मामा य रूप[12] है

$$r_{1m.23\ldots(m-1)}=\frac{r_{1m.23\ldots(m-2)}-r_{1(m-1).23\ldots(m-2)}r_{m(m-1).23\ldots(m-2)}}{\sqrt{1-r^2_{1(m-1).23\ldots(m-2)}}\sqrt{1-r^2_{m(m-1).23\ldots(m-2)}}}$$

12 अन्य रूप भी लिखे जा सकते हैं। तथापि, यह सर्वाधिक तर्कसम्मत रूप है, क्योंकि आंशिक गुणांक निम्न क्रम वालों से, क्रमशः X_2, X_3, X_4, ..., X_m चरों का प्रयोग करते हुए निर्मित किए जा रहे हैं। भाज्य में प्रथम r के अधोलेख $(m-1)$ को नहीं, जैसा यहाँ किया गया, वरन् 1 अथवा m के अतिरिक्त किसी भी अधोलेख का त्याग करना सम्भव होगा। उदाहरण के लिए यदि 3 का त्याग कर दिया जाए, तो तीन गुणांकों के अधोलेख होंगे

$r_{1m.24\ldots(m-1)}$, $r_{13.24\ldots(m-1)}$ तथा $r_{m3.24\ldots(m-1)}$)

यहां रुक कर अपने परिकलनों के कुछ परिणामों का निरीक्षण करना रुचिकर होगा। X_1 आश्रित चर से परिवेष्टित शून्य क्रम प्रथम क्रम और द्वितीय क्रम गुणांक नीचे दिखाए गए हैं

$$r_{12} = +0\ 7733 \qquad r_{12\cdot3} = +0\ 4876 \qquad r_{12\cdot34} = +0\ 5606$$
$$r_{12\cdot4} = +0\ 8588$$
$$r_{13} = +0\ 7115 \qquad r_{13\cdot2} = +0\ 2526 \qquad r_{13\cdot24} = +0\ 6141$$
$$r_{13\cdot4} = +0\ 8727$$
$$r_{14} = -0\ 2578 \qquad r_{14\cdot2} = -0\ 6251 \qquad r_{14\cdot23} = -0\ 7711$$
$$r_{14\cdot3} = -0\ 7411$$

जब अन्य चरों के प्रभाव के लिए कोई छूट नहीं दी गई थी, तब X_2 (प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी) प्रथम कोटि में तथा X_4 (प्रतिशत प्रवासी) अन्तिम कोटि में थे। जब X_4 के लिए समजन किया गया तब माध्यिका स्कूल वर्ष X_3 प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी X_2 से आगे की कोटि में आ गया जब X_3 के लिए समजन किया गया तब प्रतिशत प्रवासी X_4 प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी X से आगे था जब X_2 के लिए समजन किया गया तब प्रतिशत प्रवासी X_4 माध्यिका स्कूल वर्ष X_3 से ऊपर की कोटि में था। अन्त में जब दो स्वतन्त्र चरों को स्थिर रखा गया तब प्रतिशत प्रवासी X_4 प्रथम था और प्रतिशत व्यावसायिक आदि कर्मचारी X_2 अन्तिम था।

अनेकधा गुणांक—पाद टिप्पणी 7 में यह पहले ही संकेत किया जा चुका है कि तीन चर अनेकधा गुणांकों को शून्य क्रम गुणांकों से प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार

$$R_{1\cdot23} = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}$$
$$= \frac{0\ 5980 + 0\ 5062 - 2(0\ 7733)(0\ 7115)(0\ 7942)}{0\ 3693}$$
$$= 0\ 6236$$
$$R_{1\cdot23} = 0\ 7897$$
$$R_{1\cdot24} = \frac{r_{12}^2 + r_{14}^2 - 2r_{12}r_{14}r_{24}}{1 - r_{24}^2}$$
$$= \frac{0\ 5980 + 0\ 0665 - 2(0\ 7733)(-0\ 2578)(0\ 1715)}{1 - 0\ 0294}$$
$$= 0\ 7551$$
$$R_{1\cdot24} = 0\ 8689$$
$$R_{1\cdot34} = \frac{r_{13}^2 + r_{14}^2 - 2r_{13}r_{14}r_{34}}{1 - r_{34}^2}$$
$$= \frac{0\ 5062 + 0\ 0665 - 2(0\ 7115)(-0\ 2578)(0\ 3289)}{1 - 0\ 1081},$$
$$= 0\ 7774$$
$$R_{1\cdot34} = 0\ 8817$$

पृष्ठ 484 पर दिए सूत्रों के समान सूत्र का प्रयोग करके

$R^2_{1.23} = r^2_{12} + r^2_{13.2}(1 - r^2_{12}) = 0.5980 + (0.0638)(0.4020) = 0.6236.$

$R_{1.23} = 0.7897$

$R^2_{1.24} = r^2_{12} + r^2_{14.2}(1 - r^2_{12}) = 0.5980 + (0.3908)(0.4020) = 0.7551.$

$R_{1.24} = 0.8689$

$R^2_{1.34} = r^2_{13} + r^2_{14.3}(1 - r^2_{13}) = 0.5062 + (0.5492)(0.4938) = 0.7774$

$R_{1.34} = 0.8817$

$$R^2_{1.234} = r^2_{12} + r^2_{13.2}(1 - r^2_{12}) + r^2_{14.23}(1 - R^2_{1.23}),$$
$$= 0.5980 + (0.0638)(0.4020) + (0.5946)(0.3764)$$
$$= 0.8474$$

$R_{1.234} = 0.9205$

$r_{13.2}$ के लिए पृष्ठ 482 पर निर्दिष्ट सूत्र को पुन व्यवस्थित करके हम इस प्रकार भी लिख सकते है

$$1 - R^2_{1.23} = (1 - r^2_{12})(1 - r^2_{13.2})$$
$$R^2_{1.23} = 1 - [(1 - r^2_{12})(1 - r^2_{13.2})]$$

इस व्यजक को m चरो के लिए सामान्य रूप मे इस प्रकार लिखा जा सकता है ·

$$R^2_{1.24\ldots m} = 1 - [(1 - r^2_{12})(1 - r^2_{13.2})(1 - r^2_{14.23}) \ldots (1 - r^2_{1m.23\ldots(m-1)})]$$

इस व्यञ्जक का एक भिन्न रूप है

$$R^2_{1.234\ldots m} = 1 - [(1 - R^2_{1.234\ldots(m-1)})(1 - r^2_{1m.23\ldots(m-1)})].$$

आकलन के गुणाक तथा आकलन की मानक त्रुटियाँ—जब केवल शून्य-क्रम गुणाको के ही मान ज्ञात हो, तब विभिन्न b मानो तथा आकलन की मानक त्रुटि को ज्ञात करने का भार उठाना सम्भाव्य नहीं होता । फिर भी, यदि s_1, अथवा Σx_1^2 तथा N, ज्ञात हो, तो हम आकलन की मानक त्रुटि निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं :

$$s_{1.234\ldots m} = s_1\sqrt{1 - R^2_{1.234\ldots m}}\,.$$

m प्रसामान्य समीकरणो का हल किए बिना (देखिए पादटिप्पणी 10), आकलन के गुणाक निम्न से प्राप्त किए जा सकते है

$$b_{1m.23\ldots(m-1)} = r_{1m.23\ldots(m-1)} \frac{s_{1.234\ldots m}}{s_{m.123\ldots(m-1)}}\,.$$

स्वतन्त्र चरों के अलग-अलग महत्त्व के अन्य माप—हम आशिक निर्धारण या सहसम्बन्ध के गुणाको के बारे मे तीन स्वतन्त्र चरो के अलग-अलग महत्त्व के मापो के रूप मे पहले ही विचार कर चुके है । स्वतन्त्र चरो के अलग अलग महत्त्व के दो अन्य मापो का यदाकदा प्रयोग होता है । ये हैं : (1) बीटा गुणाक, तथा (2) अलग निर्धारण के

गुणाक। बीटा गुणाकों की β_1 तथा β_2, जिनका बारबारता बंटन के वर्णन के लिए प्रयोग होता है, के साथ भ्रान्ति नहीं होनी चाहिए। माप के दोनों समुच्चय स्वभाव से बिल्कुल भिन्न है।[13]

अनेकधा वक्ररेखीय सहसंबंध

दो चरों में पारस्परिक सबंध के ही समान, एक आश्रित चर और एक या अधिक स्वतन्त्र चरों में पारस्परिक सम्बन्ध कभी-कभी अरेखिक होता है। जब यह सत्य हो, तब हम एक बहुपद का प्रयोग कर सकते है अथवा हम एक या अधिक चरों का लघुगणकों, व्युत्क्रमों, मूलों या घातों में रूपान्तरण कर सकते हैं अथवा किसी अन्य ढग से परिवर्तित कर सकते है।

बहुपद—यदि X_1 और X_2 में अरेखिक सम्बन्ध प्रतीत होता हो, जबकि X_1 और X_3 मे रेखिक सबन्ध हो तब इस ढग के समीकरण

$$X_{c1.22\,3} = a_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{12'.23}X_2^2 + b_{13.22'}X_3$$

का प्रयोग किया जा सकता है। इस समीकरण के फलस्वरूप व्याख्यात घटबढ अनुमानतः अधिक परिमाण में प्रकट होगी, अपेक्षाकृत निम्न समीकरण के प्रयोग द्वारा

$$X_{c1.23} = a_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$$

व्याख्यात घटबढ के परिमाण मे वृद्धि की सार्थकता के लिए, अध्याय 26 मे वर्णित निर्धारण के आंशिक गुणाकों की विधियों से जाँच की जा सकती है। मूल अंग्रेजी पुस्तक के प्रथम संस्करण के पृष्ठ 779—784 पर अरेखिक अनेकधा सहसबध के विश्लेषण के लिए बहुपद का प्रयोग किया गया था।

रूपान्तरण—लघुगणकों व्युत्क्रमों, मूलों, घातों, अथवा श्रेणियों मे से एक (या अधिक) में मानों के किसी अन्य फलन के प्रयोग का परिणाम अरेखिक सम्बन्ध का रेखिक रूप मे लघुकरण हो सकता है। उदाहरण के लिए, एक आकलन समीकरण निम्नलिखित मे से किसी एक प्रकार का हो सकता है

$$X_{c1.23} = a_{1.23} + b_{12.3}\text{ लघु }X_2 + b_{13.2}X_3,$$
$$X_{c1.23} = a_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}\sqrt{X_3},$$
$$X_{c1.23} = a_{1.23} + b_{12.3}\frac{1}{X_2} + b_{13.2}X_3,$$
$$\text{लघु }X_{c1.23} = a_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$$

विभिन्न सचय भी सम्भव हैं। रूपान्तरण का प्रयोग करते समय, यदि सम्भव हो तो, चरों के पारस्परिक सम्बन्ध की प्रकृति की एक परिकल्पना बनानी चाहिए, जैसा अध्याय 20 मे पोंडरोसा देवदार वृक्षों के आंकडों के लिए प्रयुक्त निम्न रूपान्तरण के सम्बन्ध मे किया गया था :

$$(\sqrt{Y})_c = a + bX$$

लेखाचित्रीय विधि—सयुक्त राज्य अमरीका के कृषि विभाग मे सांख्यिकीविदों ने एक नितान्त नम्य प्रविधि का विकास किया हैं, जिससे निवल सम्बन्ध के वक्र तथा अनेकधा सहसबध के गुणाक के चार्टों और गणित (सरल अंकगणित से अधिक विकसित नहीं) के प्रयोग

13. बीटा गुणाकों और अलग निर्धारण के गुणाकों के प्रयोगों के विवरण और दृष्टान्त के लिए मूल अंग्रेजी पुस्तक का द्वितीय संस्करण, पृष्ठ 557—559 देखिए।

द्वारा, क्रमिक सन्निकटीकरण प्राप्त किये जा सकते हैं। जहाँ इस विधि की स्पष्ट सीमाएँ है, वहाँ गणितीय विधियो से, उपयुक्त प्रकार के समीकरण के निर्धारण में समान्वेषी साधन के रूप मे यह उपयोगी है।

यद्यपि लेखाचित्रीय विधि अत्यधिक नम्य है, किन्तु यह अत्यन्त आत्मनिष्ठ भी है। समान आंकडो से प्राप्त दो सांख्यिकीविदो के वक्र विरल ही बिल्कुल एकसमान होगे। अत. अच्छे परिणाम अनुभवी एव उत्तम विवेकशील व्यक्तियो द्वारा ही प्राप्त किये जा सकते हैं। यह उस गणितीय प्रक्रिया के विरोध मे है, जो न्यूनतम वर्गों की विधि पर आधारित है, जिस दशा मे (त्रुटियो को छोडकर) एक निर्दिष्ट प्रकार के समीकरण के लिए केवल एक सभव परिणाम प्राप्त किया जा सकता है। जब चरो की अधिक सख्या का प्रयोग किया जाए तब लेखाचित्रीय विधि मे एक व्यावहारिक कठिनाई भी निहित रहती है। इस पुस्तक के इस सस्करण मे लेखाचित्रीय विधि की व्याख्या नही की गई है, किन्तु जिन पाठको की रुचि हो वे मूल अग्रेजी पुस्तक के प्रथम सस्करण के पृष्ठ 784—789 देखे।

22

सहसंबंध IV : काल-श्रेणी का सहसम्बन्ध

दो या दो से अधिक काल-श्रेणियों की चक्रीय घटबढ़ को सहसंबधित करने की समस्या मूलभूत रूप से वही है जो कालक्रम रहित श्रेणी को सहसंबधित करने की है। तथापि, काल श्रेणी को सहसंबधित करते समय, हमें इस तथ्य पर विचार करना चाहिए कि वार्षिक आँकड़ों में उपनति प्राय विद्यमान रहती है तथा मासिक आँकड़ों में उपनति और ऋतु-विभिन्नता दोनों के साथ-साथ अनियमित घटबढ़ भी पाई जा सकती है।

वार्षिक आँकड़े

सारणी 22 1 में संयुक्त राज्य के 1952 से 1963 तक प्रत्येक वर्ष के यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेके के निर्माण में औसत वार्षिक कर्मचारी संख्या के आँकड़े निर्दिष्ट हैं। संख्यात्मक आँकड़ों से, दो श्रेणियों के व्यवहार के सम्बध में बहुत कम समझ में आ सकता है किन्तु जब दो श्रेणियों को चार्ट 22 1 तथा 22 2 पर लेखाचित्रीय रीति से प्रदर्शित किया जाता है, तब यह स्पष्ट हो जाता है कि : (1) यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं में रोजगार की उपनति निम्नमुखी है, (2) ठेके के निर्माण में रोजगार की उपनति ऊर्ध्वमुखी है, तथा (3) दो श्रेणियों की घटबढ़ों में धनात्मक सहसंबध है।

उपनति के लिए असमंजित आँकड़ों का सहसंबध—दो काल श्रेणियों में सहसंबध स्थापित करते समय हम यह जानने के इच्छुक होते हैं कि श्रेणियों की घटबढ़ समान दिशा में चलती है या विपरीत दिशाओं में, तथा साहचर्य उच्च है या निम्न। यदि हमारा सम्बन्ध घटबढ़ की अपेक्षा दो श्रेणियों की उपनति से है तो हम दो उपनतियों में सहसंबध स्थापित नहीं करेंगे क्योंकि वे आवश्यक रूप से पूर्ण रेखिक या अरेखिक सहसंबध प्रकट करेंगी। उपनतियों की तुलना या तो लेखाचित्रीय रीति से की जाती है या उपनति समीकरणों की परीक्षा द्वारा। जब उपनति के लिए असमंजित काल श्रेणी के आँकड़ों को सहसंबधित किया जाता है तो परिणामी गुणांक, घटबढ़ों तथा दो उपनतियों दोनों के मध्य स्थित सम्बन्ध को प्रकट करता है। यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेके के निर्माण में रोजगार के आँकड़े प्रकीर्ण आरेख के रूप में चार्ट 22 3 में निर्दिष्ट हैं तथा सहसंबध गुणांक का मान सारणी 22 1 में मिलेगा जो—0 373 है। चार्ट 22 1 तथा 22 2 में निर्दिष्ट दो श्रेणियों की घटबढ़ के अन्वय की दृष्टि से यह गुणांक निम्न दिखाई देता है। कठिनाई यह है कि दोनों उपनतियाँ विपरीत दिशाओं में हैं। मूल आँकड़ों को सहसंबधित करने की अपेक्षा उपनति प्रतिशतताओं को सहसंबधित करके उपनति के प्रभाव का निरसन किया जा सकता है। विकल्पत, हम आंशिक सहसंबध गुणांक का परिकलन कर

सारणी 22 1

सयुक्त राज्य अमरीका मे 1952—1963 मे यातायात एव सावजनिक उपयोगिताश्रो तथा ठके के निर्माण मे रोजगार का सहसबध

(कमचारी हजारो मे)

	कमचारी				
वष	यातायात एव सावजनिक उपयागिताश्रा मे X	ठके क निमाण म Y	XY	X	Y^2
1952	4 248	2 634	11 189 232	18 045 504	6 937 956
1953	4 290	623	11 252 670	18 404 100	6 880 129
1954	4 084	2 6 2	10 667 408	16 679 056	6 822 544
1955	4 141	2 802	11 603 082	17 147 881	7 851 204
1956	4 244	2 999	12 27 756	18 011 536	8 994 001
1957	4 241	2 9 3	12 3 6 443	17 986 081	8 543 929
1958	3 976	2 78	11 045 328	15 808 576	7 717 284
1959	4 011	2 960	11 872 560	16 088 121	8 761,600
1960	4 004	2 885	11 551 540	16 032 016	8 323 225
1961	3 9 3	2 816	10 990 848	15 233 409	7 929 856
1962	3 903	2 909	11 353 827	15 233 409	8 462 281
1963	3 913	3 029	11 852 477	15 311 569	9 174 841
योग	48 958	3 970	138 503 171	199 981 258	96 398 850

आंकड स्टनिस्टिकल ए स्ट क्ट आफ दि युनाइटिड स्टटस *1964* पष्ठ 220 से।

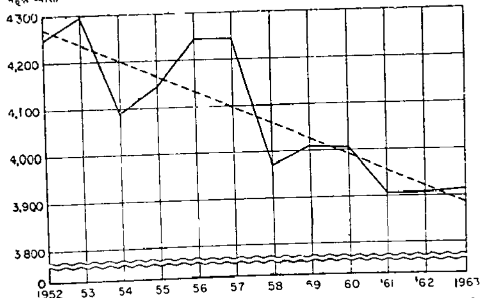
$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y \quad (\Sigma Y)^2]}}$$

$$= \frac{12(138\ 503\ 171) - (48\ 958)(33\ 970)}{\sqrt{[12(199\ 981\ 258) - (48\ 998)^2][12(96\ 398\ 850) - (33\ 970)^2]}}$$

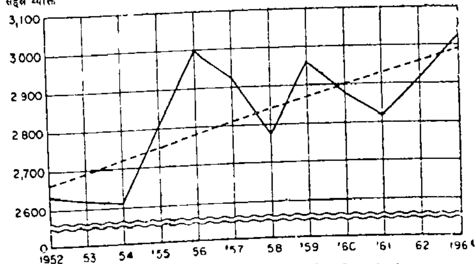
$$= -0\ 373$$

सकते है जहा दो श्रेणिया X_1 तथा X_2 हो श्रौर जहा समय X_3 हो। कभी कभी (1) दो श्रेणिया के लिए प्रत्यक वष से अगले वष तक परिवतन के परिणामो अथवा (2) दो श्रेणियो कि लिए प्रत्येक वष से अगने वष तक परिवतन की प्रतिशतताश्रो को सहसम्बंधित करके उपनति के प्रभाव का घटाया जाता है। हम इनमे से प्रत्येक प्रक्रिया की क्रमश परीक्षा करगे।

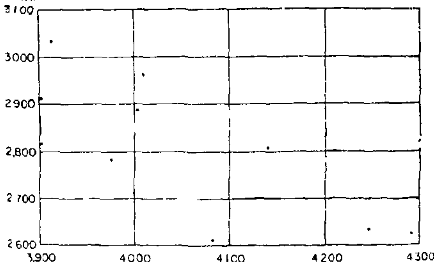
उपनति की प्रतिशतताश्रों का सहसबध—स्पष्ट है कि प्रथम पग प्रत्येक श्रेणी की उचित उपनति के निर्धारण का है। निदशनाथ रेखिक उपनतियाँ पर्याप्त होगी तथा सारणी 22 2 यातायात एव सावजनिक उपयोगिताश्रो म कमचारियो की सख्या के उपनति समीकरण उपनति मानो तथा उपनति की प्रतिशतताश्रो के परिकलन को दिखाती है। इसी प्रकार के परिकलन ठके के निर्माण म कमचारियो की सख्या के लिए सारणी 22 3 मे



चार्ट 22 1 सयुक्त राज्य अमरीका मे यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिताओ मे कर्मचारियो की सख्या तथा सरल रखा उपनति, 1952—1963। आकड़े सारणी 22 2 से।



चार्ट 22 2 सयुक्त राज्य अमरीका मे ठेके के निर्माण मे कर्मचारियों की सख्या तथा सरल रेखा उपनति, 1952—1963। आकड़े सारणी 22 3 म।



चार्ट 22 3 यातायात एव सावजनिक उपयोगिताम्रो तथा ठेके के निर्माण मे कर्मचारियो की सख्या 1952—1963 का प्रकीर्ण आरेख । आक्डे सारणी 22 1 से ।

सारणी 22 2

यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिताओं मे रोजगार, 1952—1963, के लिए उपनति का निर्धारण तथा उपनति मानो के प्रतिशत का परिकलन

वर्ष	X	कर्मचारी (सहस्रो मे) Y	XY	उपनति मान Y_c	उपनति का प्रतिशत $\left[\frac{Y}{Y_c}\right]$
1952	−11	4 248	−46,728	4,273 7	99.40
1953	− 9	4 290	−38,610	4,238 5	101 22
1954	− 7	4 084	−28,588	4 203 2	97 16
1955	− 5	4 141	−20,705	4,168 0	99 35
1956	− 3	4 244	−12,732	4,132 7	102 69
1957	− 1	4,241	− 4,241	4 097 4	103 50
1958	1	3 976	3 976	4,062 2	97 88
1959	3	4 011	12,033	4,026 9	99 61
1960	5	4 004	20,020	3,991 7	100 31
1961	7	3,903	27 321	3,956 4	98 65
1962	9	3 903	35,127	3,921 1	99 54
1963	11	3,913	43 043	3,885 9	100 70
योग	0	48 958	−10,084	...	...

आँकड सारणी 22 1 के नीचे दिये गये स्रोतो से ।

$$N = 12 \quad \Sigma X^2 = 2(286) = 572$$

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{48,958}{12} = 4,079\ 8$$

$$b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{-10,084}{572} = -17\ 63$$

$$Y_c = 4,079\ 8 - 17\ 63X$$

मूल, 1957 तथा 1958 के मध्य ।

सारणी 22 3

ठेका निर्माण मे रोजगार, 1952—1963, की उपनति का निर्धारण तथा उपनति-मानो के प्रतिशत का परिकलन

वर्ष	X	कर्मचारी (सहस्र) Y	XY	उपनति मान Y_c	उपनति-प्रतिशत $[Y - Y_c]$
1952	−11	2,634	−28,974	2,667 4	98.75
1953	− 9	2,623	−23,607	2,697 1	97 25
1954	− 7	2 612	− 18,284	2 726 8	95 79
1955	− 5	2,802	−14,010	2,756 5	101.65
1956	− 3	2 999	− 8,997	2,786 3	107.63
1957	1	2,923	− 2,923	2,816 0	103 80
1958	1	2,778	2,778	2,845 7	97 62
1959	3	2,960	8,880	2 875 4	102.94
1960	5	2,885	14,425	2,905 1	99.31
1961	7	2,816	19,712	2,934 8	95 95
1962	9	2 909	26,181	2,964 5	98.13
1963	11	3,029	33,319	2 994 3	101 16
योग	0	33,970	8,500	...	...

आकडे सारणी 22 1 के नीचे दिए गए स्रोतो से।

$$N = 12 \quad \Sigma X^2 = 2(286) = 572.$$

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{33,970}{12} = 2,830\ 8$$

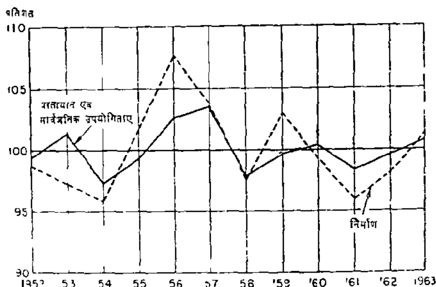
$$b = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{8,500}{572} = 14\ 86$$

$$Y_c = 2,830\ 8 + 14\ 86X.$$

मूल, 1957 तथा 1958 के मध्य।

X इकाइयाँ, ½ वर्ष।

दिखाए गए हैं। उपनति प्रतिशत के आँकडो के दो समुच्चय चार्ट 22 4 मे आलेखित किये गये है, जहाँ यह देखा जा सकता है कि जब कोई श्रेणी अपनी उपनति-रेखा से ऊपर (या नीचे) होती है, तब दूसरी श्रेणी भी प्राय अपनी उपनति-रेखा से ऊपर (या नीचे) होती है। चार्ट 22 4 मे हमे सम्बन्ध की घनिष्ठता का समुचित चित्र प्राप्त होता है; तथापि इस



चार्ट 22 4 यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में कर्मचारियों की सख्या, 1952—1963, की उपनति की प्रतिशतताएँ। आकडे सारणी 22 2 तथा 22 3 व।

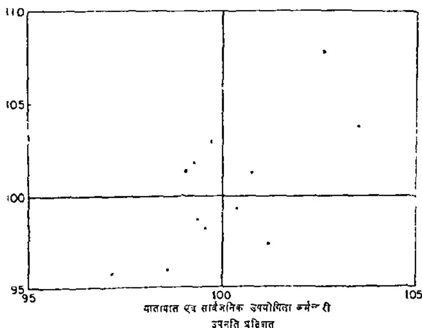
उद्देश्य की सिद्धि चार्ट 22 5 से अधिक अच्छी प्रकार से होती है जो उपनति प्रतिशतताओं की दो श्रेणियों का प्रकीर्ण आरेख है। इस प्रकीर्ण आरेख से यह स्पष्ट है कि दो श्रेणियों की उपनति की प्रतिशतताओं में काफी उच्च धनात्मक सहसबंध विद्यमान है तथा r का मान सारणी 22 4 में $+0\ 739$ पाया गया है।

पहले की सारणियों तथा चार्टों में चित्रित परिस्थिति चार सम्भावनाओं में से एक है।[1] वे हैं

1 दो काल श्रेणियों मे घटबढ का धनात्मक सहसम्बन्ध हो सकता है, किन्तु उपनतियाँ विपरीत दिशा में हो सकती हैं। उपनति की प्रतिशतताओं को सहसम्बन्धित करने

1 इस अध्याय के सम्पूर्ण विवेचन में, हमने केवल रैखिक उपनतियों और रैखिक सहसबंध पर विचार किया है। अरैखिक उपनतियों तथा/अथवा घटबढ के अरैखिक सहसम्बन्ध पर विचार करते हुए उपनति का निरसन न करने का परिणाम इतना सरलता से नहीं बताया जा सकता, जितना उस अवस्था में जब केवल रैखिक सम्बन्ध अन्तर्ग्रस्त हो। तथापि, यदि कोई उपनति अरैखिक है तो इसके प्रभाव का निरसन उतना ही महत्वपूर्ण है जितना रैखिक उपनति की दशा में।

के स्थान पर, उपनति के लिए समजन किए बिना आँकड़ों को सहसम्बन्धित करने के परिणामस्वरूप धनात्मक सहसम्बन्ध गुणाक नीचे चला जाएगा अथवा यह ऋणात्मक गुणाक



चार्ट 22 5 1952—1963 में यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में कर्मचारियों की संख्या की उपनति की प्रतिशतताओं का प्रकीर्ण आरेख।
आँकड़े सारणी 22 4 से।

में भी परिवर्तित हो सकता है, यदि उपनतियाँ घटबढ़ के परिप्रेक्ष्य में अंकित की जायें जैसा कि हमारे आँकड़ों में है। निदर्शन में, $r = +0\ 739$ उपनति के प्रतिशत आँकड़ों के लिए है, जबकि $r = -0\ 373$ असमजित रोजगार आँकड़ों के लिए है।

2 दो काल-श्रेणियों की घटबढ़ों को धनात्मक रूप में सहसम्बन्धित किया जा सकता है तथा उपनतियाँ उसी दिशा में हो सकती हैं। उपनति की प्रतिशतताओं को सहसम्बन्धित करने की अपेक्षा, उपनति के लिए समजन किए बिना आँकड़ों को सहसम्बन्धित करने का परिणाम धनात्मक सहसम्बन्ध गुणाक में वृद्धि होगा। (यदि उपनति की प्रतिशतताएँ दिखातीं कि $r = +1\ 0$, तो उपनतियों की उपेक्षा तथा असमजित आँकड़ों में सहसंबंध स्थापित करने से r का मान उच्चतर नहीं हो सकता था।) यद्यपि आँकड़ों में अत्यल्प काल को ही व्याप्ति मिली है, तथापि 1958—1964 में ढलवाँ लोहे के उत्पादन तथा इस्पात की सिल्लियों और ढलाई के इस्पात के उत्पादन अन्तर्ग्रस्त सिद्धांत के निदर्शन का काम करेंगे

सारणी 22.4

1952—1963 यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में रोजगार की उपनति की प्रतिशतताओं का सहसम्बन्ध

वर्ष	यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताएँ X	निर्माण Y	XY	X^2	Y^2
1952	99 40	98 75	9,815 7590	9,880 3600	9,751 5625
1953	101 22	97 25	9 843 6450	10,245 4884	9,457 5625
1954	97 16	95 79	9,306 9564	9,440 0656	9,175 7241
1955	99 35	101 65	10,098 9275	9,870 4225	10,332.7225
1956	102 69	107 63	11,052 5247	10,545 2361	11,584 2169
1957	103 50	103 80	10,743 3000	10,712 2500	10,774 4400
1958	97 88	97 62	9,555 0456	9,580 4944	9,529 6644
1959	99 61	102 94	10 253 8543	9,922 1521	10,596 6436
1960	100 31	99 31	9,961 7861	10,062 0961	9,862 4761
1961	98 65	95 95	9,465 4675	9,731 8225	9,206 4025
1962	99 54	98 13	9,767 8602	9,908.2116	9,629 4969
1963	100 70	101 16	10,186 8120	10,140 4900	10,233 3456
योग	1 200 01	1,199 98	120,051 9284	120,039 0893	120,134 2576

आँकड़े सारणी 22.2 तथा 22.3 से।

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}},$$

$$= \frac{12(120,051\ 9284) - (1,200\ 01)(1,199\ 98)}{\sqrt{[12(120,039\ 0893) - (1200\ 01)^2][12(120,134\ 2576) - (1,199\ 98)^2]}},$$

$$= +0\ 739$$

सारणी 22.5 में आँकड़े प्रस्तुत किए गए हैं, जिनका व्यवहार चार्ट 22.6 में देखा जा सकता है। चार्ट 22.6 में दो श्रेणियों की उपनतियाँ भी दिखाई गई हैं जो दोनों ऊर्ध्वमुखी हैं। चार्ट से यह स्पष्ट है कि अपनी उपनतियों के गिर्द दो श्रेणियों की घटबढ़ों का उच्च धनात्मक सहसम्बन्ध है। पहले, असमजित आँकड़ों को सहसम्बन्धित करने में, हम सारणी 22.5 में पाते हैं कि $r = +0\ 995$। जब दो श्रेणियों में से प्रत्येक को उपनति-प्रतिशतताओं के रूप में रखा जाता है, तब जो मान प्राप्त होते हैं वे सारणी 22.6 में दिखाए गए हैं। इस सारणी से यह भी प्रकट होता है कि उपनति के प्रतिशत आँकड़ों का सहसम्बन्ध करने में $r = +0\ 965$ प्राप्त होता है। उपनति के प्रतिशत आँकड़े इतने घनिष्ठ रूप से सम्बन्धित हैं कि उपनतियों की उपेक्षा करने से गुणांक में बहुत अधिक वृद्धि नहीं हो सकती।

3. दो काल-श्रेणियों की घटबढ़ें ऋणात्मक रूप में सहसम्बन्धित हो सकती हैं, किन्तु उपनतियाँ उसी दिशा में हो सकती हैं। उपनति की प्रतिशतताओं को सहसम्बन्धित

सारणी 22 5

1958—1964 में ढलुआँ लोहे के उत्पादन तथा इस्पात की सिल्लियों और ढलाई के इस्पात के उत्पादन का सहसम्बन्ध

(दस लाख शार्ट टनों में)

वर्ष	ढलुआँ लोहा X	इस्पात की सिल्लियाँ तथा ढलाई का इस्पात Y	XY	X^2	Y^2
1958	57 2	85 3	4,879 16	3,271 84	7,276 09
1959	60 2	93 4	5,622 68	3,624 04	8,723 56
1960	66 5	99 3	6,603 45	4,422 25	9,860 49
1961	64 6	98 0	6,630 80	4,173 16	9,604 00
1962	65 6	98 3	6,448 48	4,303 36	9,662 89
1963	71 8	109 3	7,847 74	5 155 24	11,946 49
1964	85 6	126 9	10,862 64	7,327 36	16,103 61
योग	471 5	710 5	48,594 95	32,277 25	73,177 13

आँकड़े स्टैटिस्टिकल एब्स्ट्रैक्ट ऑफ दि युनाइटिड स्टेट्स के विभिन्न अंकों तथा सर्वे ऑफ करन्ट बिज़नेस, फरवरी 1965, पृष्ठ S-32 से।

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}},$$

$$= \frac{7(48\ 594\ 95) - (471\ 5)(710\ 5)}{\sqrt{[7(32,277\ 25) - (471\ 5)^2][7(73,177\ 13) - (710\ 5)^2]}},$$

$$= +0\ 995$$

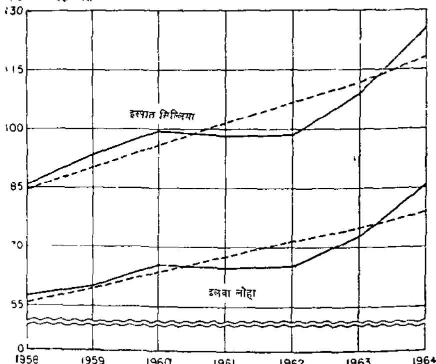
करने की अपेक्षा, उपनति के लिए समजन किए बिना आँकड़ों को सहसम्बन्धित करने का परिणाम ऋणात्मक सहसम्बन्ध गुणांक में कमी होगा अथवा धनात्मक गुणांक में इसका परिवर्तन भी हो सकता है, यदि उपनतियाँ घटबढ़ के सम्बन्ध में उद्घोषित हैं।

4 दो काल श्रेणियों की घटबढ़ें ऋणात्मक रूप में सहसम्बन्धित हो सकती हैं तथा उपनतियाँ विपरीत दिशा में हो सकती हैं। उपनति की प्रतिशतताओं को सहसम्बन्धित करने की अपेक्षा, उपनति के लिए समजन किए बिना आँकड़ों को सहसम्बन्धित करने के फलस्वरूप ऋणात्मक सहसम्बन्ध गुणांक में वृद्धि होगी। (यदि उपनति की प्रतिशतताएँ दिखाती कि $r = -1\ 0$, तो उपनतियों की उपेक्षा तथा असमजित आँकड़ों में सहसम्बन्ध स्थापित करने से r का मान उच्चतर नहीं हो सकता था।)

यदि दो काल-श्रेणियों में सहसम्बन्ध स्थापित करना हो, और यदि दोनों श्रेणियों की उपनतियाँ समस्तर हों, तो निस्सन्देह आँकड़ों को उपनति की प्रतिशतताओं के रूप में व्यक्त करना आवश्यक नहीं है। तथापि, यदि दो श्रेणियों में से एक की उपनति ऊर्ध्वमुखी या

अधोमुखी हो, तो दो श्रेणियों की घटबढ़ों का उपयुक्त सहसम्बन्ध तब तक प्राप्त नहीं होगा जब तक उपनति को व्यक्त करने वाली श्रेणी से उपनति का निरसन न कर दिया जाए।

कभी-कभी ऐसा होता है कि एक श्रेणी के वार्षिक आँकड़े अन्य घनिष्ठत सहसबंधित श्रेणी के लिए सगत वार्षिक अक से पूर्व, नियमित रूप से ज्ञात होते हैं, अथवा



चार्ट 22 6 1958—1964 मे ढलुआँ लोहे का उत्पादन तथा इस्पात की सिल्लियों और ढलाई के इस्पात का उत्पादन, सरल रेखा उपनतियों सहित। उत्पादन के आँकडे सारणी 22 5 से। उपनतियाँ इन अकों से परिकलित की गई।

उपलब्ध कराए जाते हैं। ऐसी परिस्थिति मे, यदि सहसम्बन्ध उच्च है, तो श्रेणी के लिए उपयोगी आकलन प्रस्तुत किया जा सकता है जो इतनी शीघ्रता से उपलब्ध नहीं होता। प्रक्रिया मे तीन बाते हैं—(1) उस श्रेणी के लिए प्रवर्धित उपनति की प्रतिशतता के रूप मे प्रथम उपलब्ध अक को अभिव्यक्त करना, (2) सारणी 22 4 जैसी सारणी से प्राप्त आकलन समीकरण के प्रयोग द्वारा अन्य श्रेणी के लिए उपनति-प्रतिशत के अक का आकलन करना, तथा (3) इस आकलित उपनति-प्रतिशत के अक को उस श्रेणी के लिए प्रवर्धित उपनति के आकलित उपनति-प्रतिशत को लेकर उसके द्वारा उन इकाइयों मे बदलना जिसमे श्रेणी अभिव्यक्त हो (टन, डालर, सूचकाक आदि)। हम पूर्ववर्ती विवरण के आकिक निदर्शन प्रस्तुत नहीं करेंगे, क्योंकि अधिकाश श्रेणियाँ मासिक आधार पर उपलब्ध है, तथा जब वर्ष के ग्यारह महीनों के आँकडे पहले से ज्ञात हो, तो अन्य श्रेणी के लिए केवल वार्षिक योग पर आधारित उसके श्रेणी वार्षिक योग का आकलन बहुत

सारणी 22 6

1958—1964 मे ढलुआं लोहे के उत्पादन तथा इस्पात की सिल्लियो एव ढलाई के इस्पात के उत्पादन की उपनति की प्रतिशतताओ का सहसम्बन्ध

वर्ष	ढलुआँ लोहा X	इस्पात की सिल्लियाँ तथा ढलाई का इस्पात Y	XY	X^2	Y^2
1958	102 4	100 6	10,301 44	10,485 76	10,120 36
1959	100 9	103 3	10,422 97	10,180 81	10,670 89
1960	104 7	103 5	10,836 45	10,962 09	10,712 25
1961	95 9	96 6	9 263 94	9,196 81	9,331 56
1962	92 1	91 8	8,454 78	8,482 41	8,427 24
1963	95 7	97 1	9,292 47	9,158 49	9,428 41
1964	108 5	107 7	11 652 90	11,772 25	11,534 76
योग	700 2	700 3	70,224 95	70,238 62	70,225 47

उपनति प्रतिशत के अक सारणी 22 5 के उत्पादन आकडा मे प्राप्त किए गए तथा चार्ट 22 6 मे दिखाई गई उपनतियो का उपयोग किया गया।

$$r=\frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2]}},$$

$$=\frac{7(70\ 224\ 95)-(700\ 2)(700\ 3)}{\sqrt{[7(70\ 238\ 62)-(700\ 2)^2][7(70{,}225\ 47)-(700\ 3)^2]}},$$

$$=+0\ 965$$

कम उपादेय हो सकता है। यह स्पष्ट होना चाहिए कि प्रक्रिया घटबढो के दो समुच्चया के बीच वतमान सम्बन्ध के तथा दो उपनति-रेखाओ के भी सातत्य का ग्रहण करती है।

घटबढों का सहसम्बन्ध जब आँकडे s से विभाजित किए गए हों—अध्याय 16 मे सह सकेत किया गया था कि काल-श्रेणियो की, जिनमे घटबढो के कोणाक अलग-अलग हो, लेखाचित्रीय विधि से तुलना करना सुगम है, यदि समजित आँकडा का प्रत्यक समुच्चय इसके मानक विचलन से विभाजित किया जाये। जब विचलनो की दो श्रेणियाँ अपने क्रमिक मानक विचलना के रूप मे प्रस्तुत की गई हैं, तो सहसम्बन्ध गुणाक के लिए गुणनफल-घूण सूत्र

$$r=\frac{\Sigma xy}{Ns_xs_y}=\frac{1}{N}\ \Sigma\left(\frac{x}{s_x}\ \frac{y}{s_y}\right)$$

2 श्रेणी कालानुक्रमी हो सकती है अथवा अकालानुक्रमी। उदाहरण के लिए, अपन माध्यो से विचलनो के रूप मे तथा अपन मानक विचलनो (जो कभी-कभी मानक अक कहलाते हैं) से सम्बन्ध म अभिव्यक्त युग्मित ग्रेडो के दो समुच्चय सहसम्बन्धित किए जा सकते हैं, जैसा कि सारणी 22 7 म दिखाया गया है।

सारणी 22 7

1952—1963 मे यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिताओ तथा ठेका निर्माण मे रोजगार के लिए s के रूप मे अभिव्यक्त उपनति से प्रतिशतता विचलनो का सहसम्बन्ध

वर्ष	यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिताए			ठेका निर्माण			$\frac{x}{s_x} \times \frac{y}{s_y}$
	x	x^2	$\frac{x}{s_x}$	y	y^2	$\frac{y}{s_y}$	
1952	−0 60	0 3600	−0 341	−1 25	1 5625	−0 368	+0 125488
1953	+1 22	1 4884	+0 694	−2 75	7 5625	−0 810	−0 562140
1954	−2 84	8 0656	−1 615	−4 21	17 7241	−1 240	+2 002600
1955	−0 65	0 4225	0 370	+1 65	2 7225	+0 486	−0 179820
1956	+2 69	7 2361	+1 530	+7 63	58 2169	+2 248	+3 439440
1957	+3 50	12 2500	+1 991	+3 80	14 4400	+1 120	+2 229920
1958	−2 12	4 4944	−1 206	−2 38	5 6644	−0 701	+0 845406
1959	−0 39	0 1521	−0 222	+2 94	8 6436	+0 866	−0 192252
1960	+0 31	0 0961	+0 176	−0 69	0 4761	−0 203	−0 035728
1961	−1 35	1 8225	−0 768	−4 05	16 4025	−1 193	+0 916224
1962	−0 46	0 2116	−0 262	−1 87	3 4969	−0 551	+0 144362
1963	+0 70	0 4900	+0 398	+1 16	1 3456	+0 342	+0 136116
योग		37 0893			138 2576		+8 869616

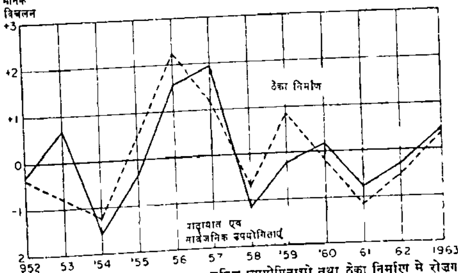
x तथा y मान सारणी 22 2 तथा सारणी 22 3 के अतिम स्तम्भो मे 100 00 से विचलनो के रूप मे अभिव्यक्त मान है। उपनति रेखा से प्रतिशतता विचलनो का योगफल साधारणत ठीक शून्य नही होता। फिर भी, यदि उपनति न्यूनतम वर्गो द्वारा विचाराधीन काल के आँकडो म ठीक बैठाई गई है तो इतनी नगण्य असगति की सभावना है कि उसकी उपेक्षा की जा सकती है। नीचे सहसम्बन्ध कारक $\left(\frac{\Sigma x}{N}\right)^2$ तथा $\left(\frac{\Sigma y}{N}\right)^2$ को सम्मिलित करने से s_x तथा s_y के लिए दशमलव के तीसरे स्थान पर अक नही बदलते।

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}} = \sqrt{\frac{37\ 0893}{12}} = 1\ 758$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}} = \sqrt{\frac{138\ 2576}{12}} = 3\ 394$$

$$r = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{x}{s_x} \quad \frac{y}{s_y}\right) = \frac{1}{12} \ (+8\ 869616) = +0\ 739$$

होता है। इस प्रकार हम । प्राप्त करते हैं केवल (1) युग्मित मानो को गुणा करके, (2) जोडकर, तथा (3) V म भाग देकर। (ध्यान दीजिए कि $sx = s_x$ तथा $sy = s_y$, क्योंकि जोडने, या घटाने से एक स्थिर मानो की श्रेणी मे s के मान को परिवर्तित नही करता।) यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिताओ तथा ठेका निर्माण मे रोजगार के आंकडे अच्छा निदर्शन प्रस्तुत करते है क्योकि चार्ट 22 4 मे यह स्पष्ट है कि निर्माण रोजगार की घटबढे उपनति-प्रतिशतनाओ के रूप मे अन्य श्रेणियो की घटबढो की अपेक्षा अधिक सुनिश्चित हैं। वास्तव मे, चार्ट 22 4 मे प्रदर्शित सभी 12 वर्षो मे, निर्माण रोजगार के उपनति प्रतिशत मान, यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिता रोजगार मानो की अपेक्षा 100 रेखा से आगे हटे हुए है। सारणी 22 7 मे उपर्युक्त दो श्रेणियाँ उपनति से प्रतिशत विचलनो के रूप मे व्यक्त की गई है तथा मानक विचलनो के निर्धारण के लिए आवश्यक परिकलन किए गए है। सारणी के नीचे यह द्रष्टव्य है कि यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिता रोजगार के लिए मानक विचलन s_x है 1 758 तथा ठेका निर्माण रोजगार के लिए मानक विचलन s_y है 3 394। सारणी 22 7 $\frac{x}{s_x}$ तथा $\frac{y}{s_y}$ मानो को भी दिखाती है। मानो के ये दो समुच्चय काल-श्रेणी के रूप मे, चार्ट 22 7 मे दिखाए गए है। प्रत्येक श्रेणी को उसके



चार्ट 22 7 यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिताओ तथा ठेका निर्माण मे रोजगार 1952—1963 रूप मे अपने मानक विचलनो के रूप मे तथा उपनति से प्रतिशत विचलनो के रूप मे व्यक्त किया गया है। आंकडे सारणी 22 7 से।

मानक विचलन मे भाग देकर जो कुछ निष्पन्न हुआ, वह चार्ट 22 7 तथा 22 4 की तुलना करके देखा जा सकता है। यदि $\frac{x}{s_x}$ तथा $\frac{y}{s_y}$ मानो का प्रकीर्ण आलेख प्रस्तुत करना हो तो यह चार्ट 22 5 के यथार्थत समान होगा, सिवाय इसके कि मापक्रम भिन्न होंगे। सारणी 22 7 मे $\frac{x}{s_x}$ तथा $\frac{y}{s_y}$ मानो के लिए r का परिकलन दिखाया गया है और यह $+0\ 739$ प्राप्त हुआ जो सारणी 22 4 मे प्राप्त मान के समरूप है।

सारणी 22.8

1952—1963 मे यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं मे रोजगार, X_1, ठेका निर्माण मे रोजगार, X_2, तथा समय, X_3, के आंशिक तथा अनेकधा सहसंबंध के परिकलन

(रोजगार के आंकड़े सहस्रों में)

वर्ष	यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिता कर्मचारी X_1	ठेका निर्माण कर्मचारी X_2	समय X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	X_1^2	X_2^2
1952	4 248	2,634	−11	11,189,232	−46,428	−28,974	18,045,504	6,937,956
1953	4,290	2,623	−9	11,252,670	−38,610	−23,607	18,404,100	6,820,129
1954	4,084	2,612	−7	10,667,408	−28,588	−18 284	16,679,056	6,882,544
1955	4,141	2,802	−5	11,603,082	−20,705	−14,010	17,147,881	7,851,204
1956	4,244	2,999	−3	12,727,756	−12,732	−8,997	18,011,536	8,994,001
1957	4,241	2,923	−1	12,396,443	−4,241	−2,923	17 986,081	8,543,929
1958	3,976	2,778	1	11,045,328	3,976	2,778	15,808,576	7,717,284
1959	4,011	2,960	3	11,872,560	12,033	8,880	16,088,121	8,761,600
1960	4 004	2,885	5	11,551,540	20,020	14,425	16,032,016	8,323,225
1961	3,903	2 816	7	10,990,848	27,321	19,712	15,233,409	7,929,856
1962	3,903	2 909	9	11,353 827	35,127	26,181	15,233,409	8,462,281
1963	3,913	3,029	11	11,852 477	43,043	33,319	15 311,569	9,174,841
योग	48,958	33 970	0	138,503,171	−10,084	8,500	199,981,258	96 398,850

आंकड़े सारणी 22 1 के नीचे दिए गए स्रोतों से।

$\Sigma X_3^2 = 2(286) = 572.$

$$r_{12} = \frac{N\Sigma X_1X_2 - (\Sigma X_1)(\Sigma X^2)}{\sqrt{[N\Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2][N\Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2]}}$$

$$= \frac{12(133\,503,171) - (48,958)(33,970)}{\sqrt{[12(199,981,258) \quad (48,958)^2][12(96,398,850) - (33,970)^2]}}$$

$$= -0.372824$$

$$r_{13} = \frac{N\Sigma X_1X_3 - (\Sigma X_1)(\Sigma X_3)}{\sqrt{[N\Sigma X_1^2 - (\Sigma X_1)^2][N\Sigma X_3^2 - (\Sigma X_3)^2]}}$$

$$= \frac{12(-10,084) - (48\,958)(0)}{\sqrt{[12(199\,981,258) - (48,958)^2][12(572) - (0)^2]}}$$

$$= -0.859264$$

$$r_{23} = \frac{N\Sigma X_2X_3 - (\Sigma X_2)(\Sigma X_3)}{\sqrt{[N\Sigma X_2^2 - (\Sigma X_2)^2][N\Sigma X_3^2 - (\Sigma X_3)^2]}}$$

$$= \frac{12(8,500) - (33,970)(0)}{\sqrt{[12(96,398,850) - (33,970)^2][12(572 - (0)^2]}}$$

$$= +0.732452$$

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{1 - r^2_{13}}\sqrt{1 - r^2_{23}}} = \frac{-0.372824 - (-0.859264)(0.732452)}{\sqrt{1 - (-0.859264)^2}\sqrt{1 - (0.732452)^2}}$$

$$= +0.737$$

तृतीय चर के रूप में समय के साथ असमंजित आंकड़ों का सहसंबंध—दो काल-श्रेणियों की घटबढ़ों को सहसंबंधित करने की एक अन्य प्रक्रिया यह है कि समय को स्थिर रख कर दो श्रेणियों में विद्यमान आंशिक सहसंबंध का निर्धारण किया जाए। परिकलित आंशिक सहसंबंध गुणांक $r_{12.3}$ है, जहाँ X_1 तथा X_2 दो काल-श्रेणियाँ हैं तथा X_3 वर्षों का प्रतिनिधित्व करता है, जो सुविधा के लिए काल के मध्य में मूल बिन्दु से लिए गए हैं। सारणी 22.8 में r_{12}, r_{13}, तथा r_{23} और उनसे $r_{12.3}$ के निर्धारण के लिए आवश्यक योगफल दिए गये हैं। ध्यान दें कि सारणी 22.8 में दिखाए गए सब योगफल सारणी 22.1, 22.2, तथा 22.3 से प्राप्त किए जा सकते थे। सारणी 22.8 के नीचे दिए गए परिकलन से हम देखते हैं कि $r_{12.3} = +0.737$

यदि तीन चरों के मध्य स्थित सम्बन्ध को अध्याय 21 में प्रयुक्त समीकरण के समान एक अनेकधा आकलन समीकरण द्वारा व्यक्त करना अभीष्ट होता, और यदि यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं में कर्मचारियों की संख्या आश्रित[3] चर X_1 होता तो हम

$$X_{1.23} = a_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$$

प्रकार के समीकरण का प्रयोग करेंगे जहाँ, सारणी 22.8 के समान, X_2 ठेका निर्माण में कर्मचारियों की ओर संकेत करता है तथा 1957 और 1958 के मध्य X_3 के लिए मूल के साथ X_3 समय है तथा X_3 इकाइयाँ एक वर्ष। एक श्रेणी के लिए वार्षिक अंक का, अन्य श्रेणी के लिए अधिक तत्परतापूर्वक उपलब्ध आंकड़ों से आकलन करने के लिए यदि इस प्रकार के समीकरण का प्रयोग किया जाए, तो यह दोनों श्रेणियों के लिए सरल-रेखा उपनति के सातत्य की तथा दो श्रेणियों की घटबढ़ों में समान सम्बन्ध के सातत्य की कल्पना करता है।

यह सामान्य से अधिक रुचि की बात है कि सारणी 22.8 में प्रस्तुत आंशिक और अनेकधा सहसंबंध विश्लेषण यथार्थतः वही है, मानो हमें सारणी 22.2 तथा 22.3 में उपनतियों से विचलन की राशियों का सहसंबंध करना होता। इसे प्रमाणित करने के लिए, सारणी 22.9 बनाई गई है जो यातायात एवं सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण में रोजगार के लिए उपनति से निरपेक्ष विचलनों को दिखाती है। सारणी 22.9 के नीचे यह द्रष्टव्य है कि उपनति से निरपेक्ष विचलनों को सहसंबंधित करने की स्थिति में, $r = +0.737$। यह वही मान है जो सारणी 22.8 में $r_{12.3}$ के लिए प्राप्त हुआ।

अनेकधा तथा आंशिक सहसंबंध की प्रक्रिया से क्योंकि वही परिणाम प्राप्त होते हैं जो उपनति से निरपेक्ष अंतरों को सहसंबंधित करके प्राप्त होते हैं, अतः दोनों प्रक्रियाओं में समान कमी है। यह कमी पृष्ठ 328—330 पर अंकित की गई थी, जहाँ यह संकेत किया गया था कि उपनति से सापेक्ष विचलन, उपनति से निरपेक्ष विचलनों की अपेक्षा प्रायः अधिक साधक है। कभी-कभी उपनति से निरपेक्ष विचलनों के लिए प्राप्त r का मान, उपनति-प्रतिशतताओं के लिए प्राप्त मान से तनिक बड़ा है, परन्तु इसे उपनति से निरपेक्ष विचलनों के प्रयोग के पक्ष में तर्कस्वरूप ग्रहण नहीं किया जाना चाहिए। एक या कुछ बड़े निरपेक्ष विचलनों का r के मान पर विशिष्ट प्रभाव पड़ेगा, जैसा अध्याय 19 में अंकित है (देखिए चार्ट 19.9 तथा 19.10 और सहवर्ती विवेचन)।

3. यदि ठेका निर्माण रोजगार आश्रित चर होता, तो समीकरण

$$X_{2.13} = a_{2.13} + b_{21.3}X_1 + b_{23.1}X_3,$$

होता या X_1 और X_2 चरों की पहचान परस्पर बदली जा सकती थी तथा उपर्युक्त समीकरण का प्रयोग किया जा सकता था।

परिवर्तन-राशियो अथवा परिवर्तन-प्रतिशतताओ का सहसबध—कभी कभी, दो काल-श्रेणियो की घटबढो के मध्य सम्बन्ध का अध्ययन दोनो श्रेणियों के लिए प्रत्यक वर्ष से अगले वर्ष के परिवर्तन की राशि का परिकलन करके और बाद मे परिवर्तन की युग्मित राशिया को सहसबधित करके किया जा सकता है, जिसके मान धनात्मक तथा ऋणात्मक होंगे। यह प्रक्रिया सस्तुति के योग्य नही ह क्योकि (1) परिवतन की राशियो का प्रयोग मानो के एक युग्म को हानि मे प्रतिफलित होगा तथा (2) यदि उपनति अरेखिक है तो उस उपनति के चतुर्दिक् घटन-बढन वाले मानो के प्रथम अन्तरो मे उपनति तत्त्व फिर भी रहेगा। यह उपनति तत्त्व मूल उपनति की विपरीत दिशा मे भी हो सकता था।

विकल्पस्वरूप, दोनों श्रेणिया म से प्रत्यक के लिए परिवतन की प्रतिशतताओ का परिकलन किया जा सकता है और युग्मित प्रतिशतताओ को सहसबधित किया जा सकता है। यहाँ पुन अन्तर्ग्रस्त वर्षों की सख्या की अपेक्षा हम मानो का एक कम युग्म पायेंगे। साथ ही उपनति की प्रतिशतताओ मे उपनति तत्त्व फिर भी रहेगा यदि श्रेणी के लिए उपनति घातीय वक्र न हुई (पृष्ठ 262)।

ध्यान दें कि इन दोनो प्रक्रियाओ मे पहले विवेचित फलनो की अपेक्षा मूल आंकडो के भिन्न फलनो को सहसबधित किया जायेगा।

सारणी 22.9

1952—1963 मे यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिताओं तथा ठेका निर्माण मे रोजगार की उपनति से निरपेक्ष विचलनो का सहसबध

(सहस्रो मे)

वर्ष	यातायात एव सार्वजनिक उपयोगिताएँ X	ठेका निर्माण Y	XY	X^2	Y^2
1952	25.7	− 33.4	+ 858.38	660.49	1 115.56
1953	+ 51.5	− 74.1	− 3 816.15	2 652.25	5,490.81
1954	− 119.2	114.8	+ 13 684.16	14,208.64	13,179.04
1955	27.0	+ 45.5	− 1,228.50	729.00	2,070.25
1956	+ 111.3	+ 212.7	+ 23,673.51	12 387.69	45,241.29
1957	+ 143.6	+ 107.0	+ 15,365.20	20,620.96	11,449.00
1958	− 86.2	− 67.7	+ 5,835.74	7,430.44	4 583.29
1959	− 15.9	+ 84.6	− 1,345.14	252.81	7,157.16
1960	+ 12.3	− 20.1	− 247.23	151.29	404.01
1961	− 53.4	− 118.8	+ 6,343.92	2,851.56	14 113.44
1962	− 18.1	− 55.5	+ 1 004.55	327.61	3,080.25
1963	+ 27.1	+ 34.7	+ 940.37	734.41	1 204.09
योग	+ 0.3	+ 0.1	+ 61 068.81	63 007.15	109,088.19

विचलन सारणी 22.2 तथा 22.3 के रोजगार एव उपनति-आंकडो स प्राप्त किए गए थे।

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}},$$

$$= \frac{12(61,068.81) - (0.3)(0.1)}{\sqrt{[12(63\,007.15) - (0.3)^2][12(109,088.19) - (0.1)^2]}},$$

$$= +0.737$$

काल-श्रेणी को सहसंबंधित करने मे समस्याएँ—यह स्पष्ट होना चाहिए कि सहसंबंध गुणाक का मान आँकडो मे उपयुक्त उपनति के प्रकार से तथा समय से, जिसमे वह बैठाया गया है, प्रभावित होता है। यदि 10 वर्षों का समय सहसंबंधित किया जा रहा है तो एक श्रेणी के लिए 100 वर्ष के समय म आसजित उपनति के एक अनुभाग का प्रयोग तथा दूसरी श्रेणी के लिए केवल 10 वर्षों के समय के आँकडो मे उपयुक्त उपनति का प्रयोग तर्कसगत नही होगा। प्रत्यक चक्र के आनुमानिक केन्द्र से गुजरने मे प्रथम उपनति के असफल होने को पूरी सभावना रहेगी, तथा यह भी सभव है कि कुछ चक्रो का स्पर्श तक न हो सके। परिणामस्वरूप सहसबध गुणाक दो श्रेणियो के चक्रो मे सम्बन्ध की मात्रा को घटा या बढा कर व्यक्त कर सकना है। यह भी स्पष्ट होना चाहिए कि एक श्रेणी के लिए अनम्य उपनति और दूसरी श्रेणी के लिए नम्य उपनति के प्रयोग के परिणाम समान होंगे। यदि हम चक्रीय गतियो को सहसबधित करना चाहते हैं, तो ऐसी उपनति का प्रयोग, जो प्रत्यक चक्र के लगभग केन्द्र से गुजरती हो, सर्वोत्तम प्रतीत होता है। हो सकता है कि कोई भी सरल गणितीय वक्र सन्तोषजनक सिद्ध न हो और अपेक्षाकृत आत्मनिष्ठ-विधि को, कम से कम प्रथम सन्निकट मान के रूप मे, अपनाना पडे।

अन्य विचारणीय समस्या यह है कि द्वितीय घूर्णो पर आधारित, सहसबध की विपर्सन की विधि कालश्रेणी को सहसबधित करने के लिए उपयुक्त है अथवा नही। किसी कालश्रेणी की घटबटो का सामान्यत उपनतिरेखा के चतुर्दिक् प्रायश. बटन नहीं किया जाता। कभी कभी कुछ चरम विचलन होते हैं, जो वर्गीकृत होने पर r के मान का अधिकतर निर्धारण करते हैं। इस समस्या को ध्यान मे रखते हुए, कुछ अधिकारी विद्वान्, चरम विचलनो के विशेष रूप से बडे होने की दशा मे, कोटि-विधि (रैंक मैथड) के प्रयोग का सुझाव देते हैं। एक अन्य हल यह है कि द्वितीय घूर्णो की बजाय प्रथम घूर्णो पर आधारित सूत्र का प्रयोग किया जावे।[4] इस तथ्य को ध्यान मे रखते हुए कि रुचि बहुधा इस बात पर केन्द्रित रहती है कि, उनके स्तर अथवा परिवर्तन के परिमाण पर विचार किए बिना, दो श्रेणियाँ एक ही समय, एक ही समान सामान्य दिशा (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) की ओर गतिशील हैं अथवा नही, यह हो सकता है कि 2×2 सारणियो (देखिए पृष्ठ 434—436) मे प्रयोज्य विधि सर्वथा उपयुक्त हो।

काल-श्रेणी को सहसबधित करने मे एक अन्य कठिनाई यह है कि सहसबंध के गुणाक की विश्वसनीयता के आकलन के लिए हमारे पास कोई तर्कसगत आधार नही है। काल-श्रेणी के निमित्त r की किसी विश्वसनीयता परीक्षा के प्रयोग मे मुख्य आपत्ति यह है कि विभिन्न प्रेक्षणो का यादृच्छिक बटन नहीं

4. अन्य रोचक सूत्र है

$$C_2 = \frac{\Sigma s(2N - \Sigma|s|)}{N^2},$$

जहा s मदो के प्रत्येक युग्म मे से छोटे का द्योतक है जब प्रत्येक श्रेणी औसत विचलनो $\left(\frac{x}{AD_x} \text{ तथा } \frac{y}{AD_y}\right)$ के सम्बन्ध मे माध्य से विचलना के रूप म व्यक्त हो। जब बीजगणित के ढग से योग करते हैं तो s धनात्मक है यदि युग्मित विचलनो के चिह्न समान है, तथा उनके असमान होने की दशा मे ऋणात्मक है।

होता—काल-श्रेणी मे प्रत्येक प्रेक्षण पूर्व और पश्चात् काल-बिन्दुओ के लिए उस श्रेणी मे मानो से सम्बन्धित रहता है। इसके अतिरिक्त, इस पारस्परिक सम्बन्ध की निश्चित प्रकृति के सम्बन्ध मे हम साधारणतया सामान्यीकरण नही कर सकते। कदाचित् यह कठिनाई तब और भी स्पष्ट हो जाएगी जब हम यह पूछें कि सारणी 22 7 मे प्रयुक्त चक्रीय सम्बन्धो मे कितने स्वतत्र प्रेक्षण सम्मिलित हैं। यद्यपि वहाँ 12 वर्ष हैं किन्तु 12 स्वतत्र प्रेक्षण नही है। वहाँ लगभग तीन पूर्ण चक्र हे (गर्त से गर्त तक मापते हुए)। तब, क्या वहा केवल तीन स्वतत्र प्रेक्षण है ? नही, वहाँ तीन स अधिक प्रेक्षण हैं, क्योकि चक्र मे प्रत्येक प्रेक्षण पूर्व मानो पर पूर्णत आश्रित नही होता। यदि अब हमारे पास मासिक आँकडे होते तो क्या 12 वर्षों के लिए हमारे पास 144 स्वतत्र प्रेक्षण होते ? स्वभावतः नही। किन्तु कितने स्वतत्र प्रेक्षण होगे यह कहना असम्भव है। यहाँ जो कुछ कहा गया है, वह और भी स्पष्ट हो जाएगा जब पाठक "स्वतत्रता की मात्रा" की धारणा को समझ लेंगे। इसका विवेचन अध्याय 24 मे तथा फिर, सहसबध के विशेष सन्दर्भ मे, अध्याय 26 मे किया गया है।

पिछले सब निदर्शो मे कालानुक्रमी श्रेणियों को भौतिक शब्दावली मे व्यक्त किया गया है। उनम से कोई भी मौद्रिक इकाइयो मे नही थी। जब कोई श्रेणी डालरो की शक्ल मे है, तो इसे साधारणत उपयुक्त मूल्य सूचकाक द्वारा विभाजित करके मूल्य-परिवर्तनो के लिए समजित कर लेना चाहिए। ऐसी परिस्थिति तब आती है जब हम मूल्य और जई, भूसा, गेहूं, या आलू फलादि जैसी कृषि-उपज के उत्पादन मे सम्बन्ध की परीक्षा करते है। विद्यमान सहसबध समान वर्षों के मूल्य और उत्पादन म अथवा प्रत्येक वर्ष के मूल्य और अगले वर्ष के उत्पादन मे हो सकता है।

पहले का विवेचन केवल दो काल-श्रेणियो के सहसबध के विषय मे है, यद्यपि प्रारम्भ मे यह कहा गया था कि हम दो या अधिक काल-श्रेणियो को सहसबधित कर सकते हैं। यदि कोई व्यक्ति सुअर के मास के मूल्य मे वार्षिक घटबढ की साख्यिकीय ढग से व्याख्या करने का दायित्व अपने ऊपर लेता है तो निस्सन्देह वह अपने विश्लेषण म न केवल सुअर के मास के उत्पादन को लाएगा वरन् मक्का के मूल्य और उत्पादन, तथा शायद बकरे के तथा अन्य प्रकार के मास के मूल्य और उत्पादन पर भी विचार करेगा। इस प्रकार की समस्या उनकी अपेक्षा जिन पर हमने यहाँ विचार किया है, और भी जटिल है, क्योकि इसमे कई चरो का अनेकधा सहसबध अन्तर्ग्रस्त है। फिर भी, प्रक्रियाएँ ठीक वही है जो अध्याय 21 मे अनेकधा तथा आशिक सहसम्बन्ध के लिए बताई गई है। विचारणीय चरो की सख्या कितनी भी क्यो न हो, किन्तु प्रत्यक श्रेणी की उपनति के लिए उपयुक्त समजन करना चाहिए।

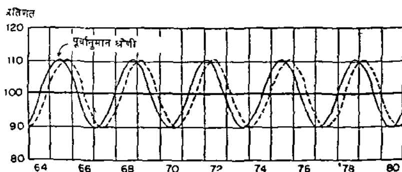
मासिक आँकड़े

मासिक काल-श्रेणियो को सहसबंधित करते समय न केवल यह आवश्यक है कि उपनति के लिए समजन किया जाए वरन् आँकडो को ऋतुनिष्ठता रहित करना भी आवश्यक है। यदि आँकडो को ऋतुनिष्ठता रहित न किया गया तो हम अधिकतर चक्रीय गतियो के स्थान पर केवल ऋतुजन्य घटबढो को सहसबधित करेंगे। इनके अतिरिक्त, प्राय. यह भी वाछनीय है कि समजित आँकडो का अल्पकालिक गतिमान औसत द्वारा (जैसे अध्याय 16

म समझाया गया है) सरलन किया जाए ताकि आकस्मिक गतियों के कारण हुई अनियमितताओं को दूर किया जा सके।

तुल्यकालिक सम्बन्ध—कभी-कभी यह जानने के लिए कि क्या दो काल श्रेणियाँ साथ-साथ गतिमान होती हैं, दो मासिक काल-श्रेणियों को सहसम्बन्धित करने की इच्छा होती है। इस प्रकार, ऐसा सहसम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है यदि दो संस्थाएँ आर्थिक क्रियाकलाप के समान पक्ष का मापन के अभिप्राय से सूचकांक प्रदान करें। अथवा, कोई शोध-विभाग यह जानने में रुचि ले सकता है कि कुछ संघटक श्रेणियों के आधार पर परिकलित *व्यवसाय-स्थितियों का सूचकांक, चक्रीय गतियों को व्यक्त करने में अधिक* व्यापक सूचकांक के साथ, जिसकी रचना अधिक खर्चीली भी है, पर्याप्त निकटता से मेल खाता है अथवा नहीं। फिर, कोई व्यक्ति बारह फेडरल रिज़र्व ज़िलों में से दो, अथवा अधिक के लिए, काल-श्रेणियों (उदाहरणार्थ विभागीय भंडार बिक्रियाँ) की तुलना करने में रुचि ले सकता है।

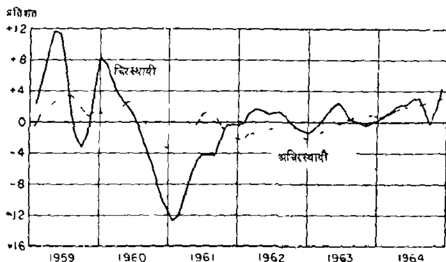
पश्चता और अग्रता—बहुधा ऐसी मासिक काल-श्रेणी ज्ञात करने की इच्छा होती है जो एक द्वितीय श्रेणी से आगे चलती हो और इसी कारण जिसका प्रयोग द्वितीय श्रेणी का *पूर्वानुमान करने में किया जा सके। वह सम्बन्ध* जिसे ज्ञात करने की आशा होती है, कुछ-कुछ चार्ट 22.8 में निर्दिष्ट आदर्श सम्बन्ध जैसा है, यद्यपि इस चार्ट में दिखाई गई नियमितता चक्रों में लगभग कभी नहीं होगी। चार्ट 22.8 में पूर्वानुमान सूचकांक उस श्रेणी से निरन्तर आगे चलता हुआ दिखाई देता है जिसका पूर्वानुमान करना है। जब ऐसी स्थिति होती है तो पूर्व-गतिशील श्रेणी (अर्थात् पूर्वानुमान सूचकांक) अन्य श्रेणी की *"अग्रता" करती हुई कही जाती है। उत्तर-गतिशील श्रेणी को भी पूर्व-गतिशील श्रेणी की*



चार्ट 22.8 एक श्रेणी को नियमित रूप से दूसरी से पूर्वगामी दिखाते हुए दो निदर्शी श्रेणियाँ।

"पश्चता" करती हुई कहा जाता है। पश्चता-अग्रता सम्बन्ध इतना एकरूप अत्यन्त विरल ही मिलेगा जितना चार्ट 22.8 में दिखाया गया है। वास्तव में, सन् 1941 से, आर्थिक काल श्रेणियों में पश्चता सम्बन्ध, पहले तो द्वितीय विश्वयुद्ध के कारण और फिर कारियाई युद्ध तथा सुरक्षा उत्पादन के कारण, बिल्कुल सुस्पष्ट नहीं रहे हैं।

चार्ट 22 9, फरवरी 1959 से दिसम्बर 1964 तक के स्थायी तथा अस्थायी निर्माणों और उत्पादन के फेडरल रिज़र्व सूचकांकों को प्रकट करता है। ये सूचकांक फेडरल रिज़र्व बोर्ड द्वारा सामयिक ऋतुजन्य गतियों के लिए समजित किए गए थे। लेखकों ने उपनति को दूर किया तथा अनियमित गतियों को 1, 2, 1 भारित त्रैमासिक गतिमान औसत द्वारा सरल बनाया। चार्ट 22 9 में व्यक्त यथार्थ स्थिति चार्ट 22 8 में प्रस्तुत निदर्शी स्थिति से पर्याप्त भिन्न है, जहाँ एक श्रेणी दूसरी से नियमित रूप से



चार्ट 22 9 1959 से 1964 तक स्थायी तथा अस्थायी निर्माणों के उत्पादन के फेडरल रिज़र्व सूचकांकों की चक्रीय गतियां। आकड़े सारणी 22 10 से तथा उस सारणी में छोड़ हुए वर्षों की कार्यसूचियों (अनिर्दिष्ट) से। दोनों सूचकांक उपनति और ऋतुजन्य तथा अनियमित गतियों के लिए समजित किए गए थे, तथा प्रतिशतता विचलनों के रूप में अभिव्यक्त किए गए थ।

पुरोगामी थी। चार्ट 22 9 की परीक्षा कतिपय रुचिकर बातों को प्रकट करती है: 1961 और 1963 में अस्थायी निर्माणों के सूचकांक में निम्न बिन्दुओं का स्थायी निर्माणों के सूचकांक में वैसे ही निम्न बिन्दुओं से सपात प्रतीत होता है, 1959, 1960 और 1961 में स्थायी निर्माणों के सूचकांक में उच्च बिन्दु अन्य सूचकांक में उच्च बिन्दुओं से कुछ महीने पुरोगामी प्रतीत होते है।

सामान्यत, स्थायी निर्माणों का सूचकांक अन्य सूचकांक से पुरोगामी प्रतीत होता है। यह जानने के लिए कि निकटतम एकरूपता कब विद्यमान रहती है, हम कई सहसंबंध गुणांकों का परिकलन करेंगे। पहले, तुल्यकालिक रूप से दो श्रेणियों को सहसंबंधित करने से हम $r = +0\ 670$ पाते हैं। फिर, स्थायी निर्माणों के सूचकांक के मुकाबले अस्थायी निर्माणों के सूचकांक को एक मास की अग्रता प्रदान करके, आंकों को युग्मित करके, हम $r = +0\ 519$ प्राप्त करते हैं। यहाँ अस्थायी निर्माणों के सूचकांक के लिए फरवरी 1959 को स्थायी निर्माणों के सूचकांक के लिए मार्च 1959 के साथ युग्मित करके युग्म बनाना प्रारम्भ होता है और अन्य श्रेणियों के लिए

नवम्बर 1964 का पश्च श्रेणियो के लिए दिसम्बर 1964 के साथ युग्मित करके समाप्त होता है। चार्ट 22 9 म दो श्रेणियो मे पश्चता बहुत स्पष्ट न होने क कारण, हम स्थायी निर्माणो के सूचकाक का एक मास की अग्रता प्रदान करके युग्मित करने की चेष्टा करते है जिसके लिए परिकलनो का सकेत सारणी 22 10 म है। इससे $r = +0.628$ प्राप्त होता है जो प्रथम प्राप्त मान की अपेक्षा अधिक है। अत इस दिशा मे हम इस निदश का आगे अनुगमन करेग।

अब स्थायी निर्माणो के सूचकाक के लिए दो मास की अग्रता का यत्न करते हुए हम $r = +0.608$ प्राप्त करते है जो उस सूचकाक की एक मास की अग्रता के लिए गुणाक की अपेक्षा कम है। फिर हम सहसबध गुणाक को स्थायी निर्माणो के सूचकाक के साथ तीन मास की अग्रता सहित परिकलित करते हैं और $r = +0.555$ प्राप्त करते हैं जो दो मास की अग्रता क लिए अभी अभी प्राप्त मान की अपेक्षा कम है। इस निदश के लिए r के अतिरिक्त मानो के परिकलन द्वारा शायद ही कोई उपलब्धि हो अत हम परिणामो का सार निम्न प्रकार से प्रस्तुत करेंगे

अग्रगामी श्रेणिया	r का मान
अस्थायी निर्माणो का सूचकाक निम्न अग्रता ग्रहण करता है	
एक मास	+0 519
दो मास	+0 416
तीन मास	+0 328
तुल्यकालिक	+0 600
स्थायी निर्माणो का सूचकाक निम्न अग्रता ग्रहण करता है	
एक मास	+0 628
दो मास	+0 608
तीन मास	+0 555

उच्चतम सहसबध गुणाक उस समय पाया गया जब स्थायी निर्माणो के सूचकाक मे एक मास क अग्रता थी। फिर भी वह सूचकाक अस्थायी निर्माणो के सूचकाक के लिए बहुत सन्तोषजनक पूर्वानुमान श्रेणी के रूप मे काम नही करेगा क्योकि r का मान पर्याप्त निकट समरूपता का व्यक्त नही करता।

दूसरी श्रेणी के व्यवहार के परिचायक के रूप म उपादेय होने के लिए एक काल श्रेणी का दूसरी म अग्रता ग्रहण करना सदा आवश्यक नही है। मेरीलैंड विश्वविद्यालय के व्यवसाय तथा आर्थिक शोध ब्यूरो की रिपोर्ट है कि बाल्टीमोर बैंक ऋण मेरीलैंड बैंक ऋणो के साथ +0 9998 स सहसबधित है और मेरीलैंड बैंक ऋण सयुक्त राज्य म बैंक ऋणो के साथ +0 9853 से सहसबधित है। ब्यूरो की टिप्पणी है कि बाल्टीमोर श्रेणी की दिशा मे वतन या झुकाव से राज्य और राष्ट्र म झुकाव क सकेत की आशा की जा

5 मेरीलैंड विश्वविद्यालय व्यवसाय एव आर्थिक शोध ब्यूरो *स्टडीज इन बिज़नेस एण्ड ईकनामिक्स*, खण्ड 6 न० 3 मरीलैंड ईकनामिक इडिसेज पृष्ठ 10

सकती है।" इस सम्बन्ध का उपादेयता इस तथ्य मे है कि बाल्टीमोर के लिए आंकडे नेदरलैंड अथवा संयुक्त राज्य के लिए आंकडो की अपेक्षा अधिक शीघ्रता से उपलब्ध हो सकेगे।

सारणी 22 10

फरवरी 1959 से दिसम्बर 1964 तक स्थायी निर्माणो के फडरल रिज़र्व सूचकाक और अस्थायी निर्माणों के सूचकाक के मध्य सहसबध निर्धारण स्थायी निर्माणो के सूचकाक मे एक मास की अग्रता के साथ

(अक्तूबर 1961 तक 1957 100 तथा उस तिथि के बाद 1957 1959 = 100 दोनो सूचकांको का आधार है। दोनों सूचकांक ऋतुज व उपनति और अनियमित गतियों के लिए समजित किए गए हैं तथा प्रतिशतता विचलनों के रूप म अभिव्यक्त किए गए हैं।)

वर्ष तथा मास	स्थायी निर्माणो का सूचकांक X	युग्म संकेत	अस्थायी निर्माणो का सूचकांक Y	XY	Y	Y^2
1959 फरवरी	+ 3 [illegible]		0 7		11 [illegible]4	
मार्च	+ 5 7		+ 0 1	+ 0 32	3[illegible] 49	0 01
अप्रैल	+ 9 0		+ 1 4	+ 7 98	81 00	1 96
मई	+ 11 7		+ 2 3	+ [illegible]0 70	136 89	5 29
जून	+ 11 4		+ 2 6	+ 30 42	129 96	6 76
जुलाई	+ 6 7		+ 3 2	+ 36 48	44 89	10 24
अगस्त	+ 1 0		+ 3 3	+ 22 11	1 00	10 89
सितम्बर	2 1		+ 2 5	+ [illegible] 50	4 41	6 25
अक्तूबर	3 4		+ 1 3	2 73	11 56	1 69
नवम्बर	1 4		+ 0 7	2 38	1 96	0 49
दिसम्बर	+ 4 5		+ 1 1	− 1 [illegible]4	2 25	1 21
1964 जुलाई	+ [illegible] 8		+ 1 8	+ 3 9[illegible]	7 84	3 [illegible]4
अगस्त	+ [illegible] 9		+ [illegible] 0	+ 5 60	8 41	4 00
सितम्बर	+ 1 2		− 2 2	+ 6 38	1 44	4 84
अक्तूबर	− 0 2		+ 2 5	+ 3 10	0 04	6 25
नवम्बर	+ 1 8		+ 2 [illegible]	− 0 52	3 24	6 76
दिसम्बर	+ 4 2		+ 2 9	+ 5 22		8 41
योग	− 2 9		2 3	+ 376 04	1 607 97	223 07

ऋतुनिष्ठता रहित आंकड फडरल रिज़र्व बुलेटिन के विभिन्न अंको से।

$$r = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

$$= \frac{70(376\ 04) - (-2\ 9)(2\ 3)}{\sqrt{[70(1\ 607\ 97) - (-2\ 9)^2][70(223\ 07 - 2\ 3)]}} = +0\ 628$$

4 किसी अन्य श्रेणी के लिए जो उन श्रेणी की अग्रगामी हो जिनके लिए पूर्वानुमान अभीष्ट न माना जाए को दोहराएं।

5 जब कोई ऐसी श्रेणी मिल जाए जो नियमित रूप से पश्च श्रेणी की पुरोगामी प्रतीत हो तो इन दो श्रेणियों की उपनति तथा अनियमित गतियों के लिए समंजित करें और इन समंजित श्रेणियों के लेखाचित्रों द्वारा प्रदर्शित अग्रता के सर्वोत्तम दृश्य आकलन के लिए r का मान परिकलित करें।

6 मापान म प्रदत्त अग्रता का अपना महत्तम तथा लघुतर अग्रता के लिए r के मानों का परिकलन करें ताकि r उच्चतम मान तक पहुँचा जा सके। पिछले निदेश में यह दो मास था।

7 यदि r का मान ऐसा करने के लिए पर्याप्त ऊँचा हो तो इस प्रकार का आकलन समीकरण

$$Y = a + bY$$

अथवा सम्भवत एक अरैखिक समीकरण परिकलित किया जा सकता है। यहाँ Y पश्च श्रेणी के लिए आकलित चनात्र मान है तथा Y अग्र श्रेणी का प्रेक्षित चक्रीय मान है। यदि मापान तथा 4 के परीक्षण द्वारा एक से अधिक अग्र श्रेणियों का पता चले तो अनेकधा सहसम्बन्ध (अध्याय 21) के समान एक पूर्वानुमानकारी समीकरण का प्रयोग किया जाएगा।

एक निवेश सलाहकार सेवा न माल के मूल्य निर्धारण करने के लिए एक वर्ष का अग्रता द्वारा एक स्वतन्त्र चर के साथ अनेकधा सहसम्बन्ध का प्रयोग किया है। इस विश्लेषण में आश्रित चर माल का औसत वार्षिक मूल्य है जबकि स्वतन्त्र चर हैं—वार्षिक लाभांश प्रति शेयर वार्षिक आय प्रति शेयर माल का पिछले वर्ष का औसत मासिक मूल्य बाजार की हवा या विचार और समय का एक माप। बाजार की हवा स्वयं अनेकधा सहसम्बन्ध की प्रक्रिया से प्राप्त होता है और आय लाभांश तथा समय पर आधारित माल के संयुक्त मूल्य औसत तथा उस औसत के आकलनों के मध्य दीर्घकालिक अन्तर का प्रतिनिधित्व करते हैं।

अधिकांश आर्थिक और व्यावसायिक आंकड़े जिस दर्घसूचना में प्राप्त होते हैं और एक मास से कम के आधार पर काल-श्रेणी का अभाव ऐसे तत्त्व हैं जो पूर्वानुमान की विधि के रूप में सहसम्बन्ध की उपयोगिता को क्षीण करते हैं। बहुत कुछ सम्भव है कि साप्ताहिक दैनिक अथवा प्रति घण्टे के आंकड़े ऐसे सम्बन्धों को प्रकाश में लाएं जो ज्ञात हों और केवल कुछ अन्तरंगियों द्वारा उपयोग में लाए जाते हों। सिद्धान्तशास्त्री का तर्क होता है कि सभी आर्थिक प्रक्रियाएँ परस्पर सम्बन्धित होती हैं। यह तर्कपूर्ण प्रतीत नहीं होता कि हमारे चतुर्दिक व्याप्त कल्पित कार्य कारण सम्बन्ध अपने विकास में सदा एक मास या अधिक समय अवश्य लेंगे। अनेक सम्बन्ध ऐसे अन्य होंगे जो कुछ दिनों कुछ घण्टों या लगभग तत्काल हल हो जाते हों। यदि बाजार को यह पता चले कि अकस्मात् नाव के एक

---

6 मान रेखा निवेश पर्यवेक्षण।

नवीन औद्योगिक प्रयोग की घोषणा हुई है तो मूल्याधार में अपनी प्रतिक्रिया प्रकट करने में वह कुछ सप्ताह अथवा कुछ घण्टो तक भी नही रुकता। जैसे ही साप्ताहिक, दैनिक अथवा उससे भी कम समय के आँकडे प्राप्त हो तो यह सम्भव है कि अत्यन्त उपादेय पश्च-अग्र सम्बन्ध प्राप्त किए जा सकें।

कुछ चेतावनियाँ – इस बात पर ध्यान गया होगा कि पिछले अनुभाग के शीर्षक में पूर्वानुमान के सहायक के रूप में अग्र तथा पश्च के प्रयोग का सकेत किया गया है। विगत अनेक वर्षो मे निरन्तर प्रक्षित अग्रगामी सहसम्बन्ध आगामी मासो पर तब तक लागू नही होगा जब तक श्रेणीगत सम्बन्ध पूर्ववत् न बना रहे। यदि आधारभूत आर्थिक (अथवा अन्य) परिस्थितियाँ बदल जाती है, तो सम्बन्ध बदल सकते है। इस, या किसी भी अन्य प्रक्रिया द्वारा केवल विचाराधीन श्रेणी की सम्पूर्ण जानकारी के सिलसिले मे तथा उन एव सम्बन्धित श्रेणियो को प्रभावित करने वाली स्थितियो के पूर्वानुमान का प्रयत्न किया जाना चाहिए।

पूर्वानुमान में *अग्र-पश्च सहसम्बन्धो का प्रयोग भी अन्य आपत्तियो तथा दोषो* के अधीन है। जिनमे से मुख्य हैं—

1 अध्याय 19 के सकेतानुसार, r का मान एक या कुछ चरम मानो से अनुचित रूप मे प्रभावित हो सकता है। कुछ सांख्यिकीविदो का तर्क यह भी है कि अग्रता की मात्रा के सम्बन्ध मे अपनी दृश्य छाप अधिमान्य होती है।

2 तेजी के समय जो पश्चता विद्यमान हो, मन्दी के समय वह उससे भिन्न हो सकती है।

3 रुचि अधिकतर परावर्तन बिन्दुओ पर केन्द्रित रहती है, जबकि r चक्र के सब पक्षो मे अग्रता और पश्चता को एक-सा महत्त्व प्रदान करता है। केवल यह पूर्वानुमान कर सकना *लाभदायक हो सकता है कि दिशा में परिवर्तन की आशा कब की जाए, भले ही परिवर्तन की मात्रा का पूर्वानुमान नही किया जा सकता।*

4 बहुसख्यक अग्र-पश्च अनुमान के लिए r के परिकलन की प्रक्रिया श्रम-साध्य है।

5 काल-श्रेणी के लिए सम्बन्ध के माप के रूप मे सहसम्बन्ध के गुणाक की आलोचनाओ के अतिरिक्त सहसम्बन्धित विचरणो की प्रकृति की भी आलोचना की जा सकती है। इसके लिए *यह तर्क दिया जा सकता है कि व्यक्ति वर्तमान की तुलना मे भविष्य का पूर्वा*नुमान, किसी असामान्य की अपेक्षा जिसका ठीक-ठीक आकलन प्राय कठिन होता है, अधिक परिशुद्धता से कर सकता है।

अध्याय 26 मे, *यादृच्छिक प्रतिदर्शो से परिकलित सहसम्बन्ध गुणाको की विश्वसनीयता* पर ध्यान दिया जायेगा। अग्र-पश्च सम्बन्धो से जो गुणाक प्राप्त किए गए है, वे क्योकि यादृच्छिक प्रतिदर्शो के लिए नही हैं, अत अध्याय 26 की प्रक्रियाएँ अग्रगामी एव पश्चगामी *श्रेणियो के लिए सहसम्बन्ध गुणाको पर लागू नही होगी।*

23

आसंजित वक्र के द्वारा वारंवारता वंटन का चित्रण

वारवारता बटन प्राय बहुत बडी जनसख्या अथवा समष्टि मे से लिए गए प्रतिदर्श को व्यक्त करता है। प्रतिदर्श चाहे कुछ सौ अथवा कुछ कार्डो मदो का ही हो, किन्तु यह व्यापक समष्टि का जिसमे से यह लिया गया है, यथोचित प्रतिनिधि हो सकता है। हमे एक प्रतिदर्श के अध्ययन से अपेक्षाकृत बड वर्ग का विचार धारण करना चाहिए, क्योंकि समष्टि की सभी मदो या व्यक्तियो की गणना करना प्राय कभी सम्भव नही होता। अत हम वारवारता बटन के वक्रो के अनेक प्रकारो मे से किसी एक को आसजित कर सकते है ताकि सम्पूर्ण समष्टि के वक्र के प्रतीत होने वाले सामान्य रूप का चित्रण करने का प्रयत्न किया जा सके।

वारवारता बटन के वक्र के आसजन म निम्नलिखित उद्देश्यो म से कोई एक हो सकता है

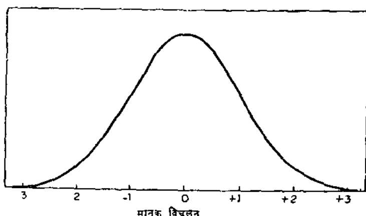
(1) हमारी यह जानने की इच्छा हो सकती है कि कोई निर्दिष्ट वक्र बटन के सामान्य रूप का चित्रण करता है अथवा नही। उदाहरणार्थ, हमारी यह सिद्ध करने की इच्छा हो सकती है कि एक ही वस्तु अथवा तथ्य के प्रावृत्त्यात्मक माप करते समय होने वाली आकस्मिक त्रुटियो का चित्रण प्रसामान्य वक्र द्वारा किया जा सकता है। चार्ट 23 1 एक प्रसामान्य वक्र है तथा चार्ट 23 2 ऐसे वक्र को आवृत्त्यात्मक मापो की श्रेणी मे आसजित करके प्रस्तुत करता है।

(2) एक ही जनसख्या मे बार बार लिए गए प्रतिदर्शो से प्राप्त मानो को वक्र मे आसजित करना उपर्युक्त प्रक्रिया क कुछ कुछ समान है। इसका एक उदाहरण इस पुस्तक के साथ पढने के लिए अभिकल्पित वर्कबुक[1] के पचम सस्करण मे अभ्यास 27 तथा 28 के रूप म सम्मिलित है। उन अभ्यासो मे, यादृच्छिक प्रतिदर्शो से परिकलित समातर माध्यो के वारवारता बटन को प्रसामान्य वक्र मे आसजित किया गया है। समातर माध्यो का प्रतिदर्श जहाँ समष्टि के समातर मा य के चतुर्दिक् एक प्रसामान्य वक्र निर्माण मे प्रवृत्त होता है, वहाँ अन्य माख्यिकीय मान अन्य प्रकार के वक्रो का निर्माण कर सकते है। प्रतिदर्शो से परिकलित मानो के व्यवहार पर अध्याय 24, 25 तथा 26 मे और अधिक विचार किया जाएगा।

---

1 एफ० ई० क्राक्सटन तथा सिडनी क्लेन, वर्कबुक इन एप्लाइड जनरल स्टैटिस्टिक्स, पचम सस्करण, प्रेंटिस हाल, इन्का० एगलवुड क्लिफ्स, एन० जे० 1967।

(3) मदो के अनुपातो के सम्बन्ध म जिनकी कुछ मानो के ऊपर, नीचे या मध्य में पडने की आशा की जानी चाहिए सामान्य-नियम निर्धारण की इच्छा हो सकती है। उदाहरण के लिए, हम बिजली के बल्बों की जीवन अवधि के वारवारता बटन को वक्र म आसजित करने का मामला ले सकते हैं इस प्रविधि से हम इस परिणाम तक पहुँचने के योग्य बन सकते है कि सामान्यत 1,500 घण्ट या अधिक जलने के लिए (अथवा कितने ही निर्दिष्ट घण्टा से अधिक या कम) कितने अनुपात की आशा की जा सकती है। इसी प्रकार, चार्ट 23 5 तथा 23 6 म निर्दिष्ट आकडो के विषय मे, हम मदो की सख्या निर्धारित कर सकते हैं, जिनकी किन्ही दो X माना के ऊपर नीचे, या मध्य मे पडने को सामान्यत आशा की



चार्ट 23 1 प्रसामान्य वक्र।

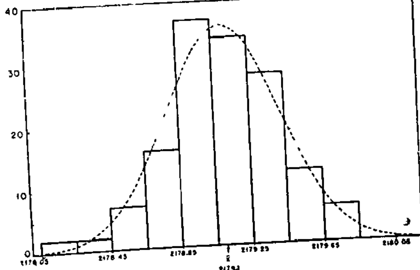
जाएगी। उसी प्रकार जीवन बीमाविज्ञ, आयु द्वारा वर्गीकृत मौतों से सम्बन्धित आंकडो को श्रेणीबद्ध कर सकता है अथवा वक्र म आसजित कर सकता है और इस प्रकार आय के प्रत्येक वर्ष मे मरने वाले अथवा निर्दिष्ट आयुओं मे जीवित रहने वाले व्यक्तियो की प्रत्याशित सख्या का निर्धारण कर सकता है।

(4) कभी कभी निर्दिष्ट बटन पर आसजित किए गए वक्र से, घनिष्ठ रूप से सबद्ध श्रेणी मे मानों के सम्भाव्य बटन को निर्धारित करना सभव है। उदाहरण के लिए, मनुष्यो के गलो के घेरो के मापो पर आसजित किया गया प्रसामान्य वक्र, प्रत्येक आकार के कालरो की, जिनकी आवश्यकता पडेगी सभाव्य सख्या का पता लगाने मे सुविधा प्रदान करता है। ऐसा चार्ट 23 8 तथा सारणी 23 5 मे किया गया है।

इस अध्याय मे वारवारता वक्र आसजित करने के विषय के विस्तृत विवेचन का प्रयत्न नही किया जाएगा। हम केवल सममित वक्र पर विचार करेंगे जिसे प्रसामान्य वक्र कहते हैं, और फिर सक्षेप मे द्विपद तथा सरलतर वैषम्य वक्रो मे से दो पर विचार किया जाएगा।

प्रसामान्य वक्र

प्रसामान्य वक्र का विकास—प्रसामान्य वक्र (चार्ट 23 1 मे प्रदर्शित) की सकल्पना मूलत. अब्राहम डी मावरे द्वारा विकसित तथा सन् 1733 मे एक गणितीय निबन्ध[2] मे व्याख्यात प्रतीत होती है। बाद मे गास ने खगोलीय पिंडो के परिक्रमा-पथो की गणना मे सम्मिलित



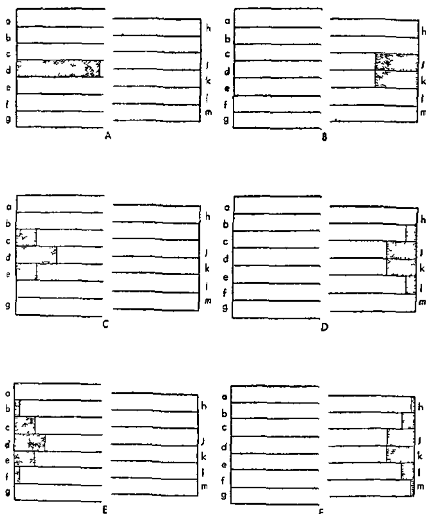
चार्ट 23 2 एक रेखा की लम्बाई के 144 मापो पर आसंजित प्रसामान्य वक्र।
माप एल० डी० वेल्ड थ्योरि ऑफ एरर्ज एड लीस्ट स्क्वेयर्ज, दि मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क, पृष्ठ 147 से लिए गए।

मापो मे आकस्मिक त्रुटियो के सिद्धात का वर्णन करने के लिए इस वक्र का प्रयोग किया। गौस के कार्य के कारण इस वक्र को कभी-कभी गौसियन वक्र कहा जाता है।

चार्ट 23 2 मे एक रेखा के 144 मापो का एक स्तम्भ आरेख तथा इन मापो पर आसजित त्रुटि का एक प्रसामान्य वक्र प्रदर्शित किया गया है। प्रसामान्य वक्र के सम्बन्ध मे यह प्रेक्षित होता है कि (1) छोटी त्रुटियाँ, बडी त्रुटियो की अपेक्षा, अधिक बहुल होती हैं, (2) बहुत बडी त्रुटियाँ होना असभावित होता है, तथा (3) समान सख्यात्मक परिमाण की धनात्मक और ऋणात्मक त्रुटियाँ समान रूप से होनी सभव है। माप की त्रुटियो का

---

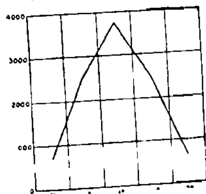
2 एप्रोक्सिमेशो ऐड सुमाम टरमिनोरम बिनोमी $(a+b)^n$ इन सेरियम एक्सपैंसी, नवम्बर 12, 1733 मे, जो मिसलेनिया एनेलिटिका, 1730 का द्वितीय सपूरक है। देखिए कार्ल पियर्सन, हिस्टारिकल नोट ग्रान दि ओरिजिन ऑफ दि नार्मल कर्व ऑफ एरर्ज, बायोमीट्रिका, खण्ड 16 (1924), पृष्ठ 402–404, तथा, हेलेन एम० वाकर, स्टडीज इन दि हिस्ट्री ऑफ स्टैटिस्टिकल मैथड, पृ० 13—17, 22—23, विलियम्स एड विल्किन्स, बाल्टीमोर, 1929।



चार्ट 23 3 द्विपद $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$ क प्रसार को प्रदर्शित करने क लिए उपकरण ।

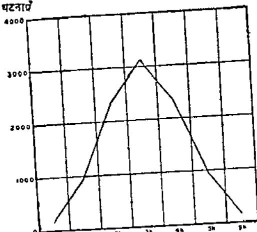
चित्रण करने के लिए प्रसामा य वक्र का व्यापक प्रयोग होने के कारण इसे कभी कभी त्रुटि का प्रसामान्य वक्र कहा जाता है । तथापि यह शब्द भ्रामक है क्योंकि माप की त्रुटियाँ चाहे वे अनभिनत त्रुटियाँ ही क्यो न हो सदा प्रसामा य वक्र का अनुसरण नही करती ।

सूत्र की व्याख्या—चार्ट 23 3 एक उपकरण को चित्रित करता है जो हमे प्रसामान्य वक्र के सूत्र को समझने मे सहायता प्रदान करेगा । उपकरण मे अनेक द्रोणिकाएँ हैं जो एक ओर से खुली हुई हैं और चार्ट 23 3 के खण्ड A मे प्रदर्शित ढग से रखी हुई है । द्रोणिका d रेत या उसी के समान किसी दानेदार पदार्थ से भरी हुई है । यदि उपकरण को इस प्रकार झुकाया जाए कि बायी ओर का भाग ऊपर उठ जाए (चार्ट 23 3 का खड B) तो द्रोणिका d मे से $\frac{1}{2}$ रेत द्रोणिका j मे और $\frac{1}{2}$ द्रोणिका k मे गिरेगा । यह द्विपद $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$ का परिचायक है । यदि फिर मशीन का दाहिना भाग उठा दिया जाए (चार्ट 23 3 का खण्ड C), तो रेत j मे से $\frac{1}{2}$ द्रोणिका c मे और $\frac{1}{2}$ द्रोणिका d मे गिरेगा, जबकि द्रोणिका k मे से रेत $\frac{1}{2}$ द्रोणिका d मे और $\frac{1}{2}$ द्रोणिका e मे गिरेगा । अब, हमारे पास कुल रेत का $\frac{1}{4}$ द्रोणिका c मे, $\frac{1}{2}$ द्रोणिका d मे और $\frac{1}{4}$ द्रोणिका e मे है, जो द्विपद $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^2$ के प्रसार का परिचायक है । उपकरण को पुनः झुकाने पर, जैसा चार्ट 23 3 के खण्ड D मे किया गया है, c से रेत का $\frac{1}{2}$ भाग i मे और $\frac{1}{2}$ भाग j मे गिरेगा, d मे से रेत का $\frac{1}{2}$ भाग j मे गिरेगा और $\frac{1}{2}$ भाग k मे, तथा e से रेत का $\frac{1}{2}$ भाग k मे जाएगा, और $\frac{1}{2}$ भाग l मे । परिणाम यह होगा कि कुल रेत का $\frac{1}{8}$ भाग i मे, $\frac{3}{8}$ भाग j मे, $\frac{3}{8}$ भाग k मे और $\frac{1}{8}$ भाग l मे होगा जो द्विपद $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^3$ के प्रसार का परिचायक है । चार्ट 23 3 के खण्ड E के अनुसार उपकरण को झुकाने से रेत का $\frac{1}{16}$ भाग b मे, $\frac{4}{16}$ भाग c मे, $\frac{6}{16}$ भाग d मे, $\frac{4}{16}$ भाग e मे और $\frac{1}{16}$ भाग f मे पहुँचेगा, जो द्विपद $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^4$ के प्रसार का परिचायक है । एक बार फिर मशीन को झुकाने (चार्ट 23 3 का खण्ड F) के परिणामस्वरूप कुल रेत का $\frac{1}{32}$ भाग h मे, $\frac{5}{32}$ भाग i मे, $\frac{10}{32}$ भाग j मे, $\frac{10}{32}$ भाग k मे, $\frac{5}{32}$ भाग l मे और $\frac{1}{32}$ भाग m मे जाएगा, जो $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^5$ का प्रसार है ।



$$\frac{1}{16}t^4+\frac{4}{16}ht^3+\frac{6}{16}h^2t^2+\frac{4}{16}h^3t+\frac{1}{16}h^4$$

चार्ट 23 4 A चार सिक्कों को 10,000 बार उछालने के प्रत्याशित परिणाम ।

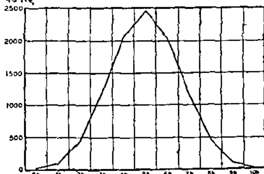


$$\frac{1}{64}t^6+\frac{6}{64}ht^5+\frac{15}{64}h^2t^4+\frac{20}{64}h^3t^3+\frac{15}{64}h^4t^2+\frac{6}{64}h^5t+\frac{1}{64}h^6.$$

चार्ट 23 4 B छः सिक्को को 10,000 बार उछालने के प्रत्याशित परिणाम ।

यदि हम द्विपद के प्रसार को बहुत दूर तक ले जाने का प्रयत्न करेंगे तो उपकरण बेकार या बेढंगा सिद्ध होगा। इसी प्रकार के परिणाम हम सिक्को को उछाल कर प्राप्त कर सकते हैं—इस प्रविधि मे किसी उपकरण निर्माण की भी आवश्यकता नही पडती। यह मान लिया जाता है कि हम सुडौल सिक्को को उछाल रहे हैं जो समान रूप से संतुलित हैं और जो कोर या किनारे के बल खडे नही होगे। ऐसे सिक्के से चित या पट उछालने के अवसर एक जैसे होगे और $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}h$ द्वारा अभिव्यक्त किए जा सकते हैं।

यदि दो सिक्के एक साथ उछाले जाएँ तो हम दो पट (कोई चित या चेहरे नही), एक पट और एक चित या दो चित या चेहरे प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए कि कोई चित प्रकट न हो, नीचे गिरने पर दोनो सिक्को का पट या बिना चेहरे वाला भाग ऊपर होना चाहिए। एक चित प्राप्त करने के लिए, एक सिक्के का पट या बिना चेहरे वाला भाग और दूसरे का चित या चेहरे वाला भाग दिखाई देना चाहिए, अथवा प्रथम सिक्के का चित भाग और दूसरे का पट भाग प्रकट होना चाहिए। दो चित केवल तभी प्रकट हो सकते है, जब दोनो सिक्को का चेहरे वाला भाग ऊपर हो। एक चित क्योंकि दो रूपों में उपस्थित हो सकता है, जबकि कोई भी चित केवल एक रूप मे उपस्थित नही हो सकता, अत इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि एक चित को उछालने को, कोई चित न उछालने की अपेक्षा दुगनी अधिक सम्भावना है। इसी प्रकार दो चितो को उछालने का जितना अवसर है उससे दुगना अधिक अवसर एक चित को उछालने का है। दो सिक्को को उछालने से उत्पन्न सम्भावनाओ को हम $(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}h)^2$ के द्वारा अभिव्यक्ति कर सकते हे, जिसमे घातांक 2 उछाले जाने वाले सिक्को की सख्या को इगित करता है। इस द्विपद के प्रसार से



$$\tfrac{1}{1024}t^{10}+\tfrac{10}{1024}ht^9+\tfrac{45}{1024}h^2t^8+\tfrac{120}{1024}h^3t^7+\tfrac{210}{1024}h^4t^6+\tfrac{252}{1024}h^5t^5+\tfrac{210}{1024}h^6t^4+\tfrac{120}{1024}h^7t^3+\tfrac{45}{1024}h^8t^2+\tfrac{10}{1024}h^9t+\tfrac{1}{1024}h^{10}$$

चार्ट 23 4 C 10 सिक्को को 10,000 बार उछालने का प्रत्याशित परिणाम। प्रत्येक सम्मुच्चय की सम्भावना द्विपद प्रसार द्वारा सकेतित है जो चार्ट 23 4 के प्रत्येक भाग के नीचे दिखाई गई है।

$$\tfrac{1}{4}t^2+\tfrac{1}{2}th+\tfrac{1}{4}h^2$$

प्राप्त होता है। अत यदि दो सुडौल सिक्के 1,200 बार उछाले जाएँ तो हम t^2 (कोई चित नही) की 300 बार, th (एक चित) की 600 बार, और h^2 (दो चित) की 300 बार प्राप्ति की आशा कर सकते है।

यदि तीन सिक्के उछाले जाएँ, तो व्यंजक होगा

$$(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}h)^3=\tfrac{1}{8}t^3+\tfrac{3}{8}t^2h+\tfrac{3}{8}th^2+\tfrac{1}{8}h^3,$$

जो यह सकेत करता है कि यदि सिक्के 1,200 बार उछाले जाएँ तो 150 बार कोई चित प्राप्त नही होगा, एक चित 450 बार प्राप्त होगा, दो चित 450 बार, और तीन चित 150 बार प्राप्त होगे ।

चार सिक्कों को उछालने से प्रत्याशित परिणाम चार्ट 23 4 के खण्ड A मे दिखाए गए है, जबकि 6 और 10 सिक्के उछालने से प्रत्याशित परिणाम क्रमश खण्ड B तथा C मे दिखाए गए है । य सभी वक्र सममित है, तथा ज्यो-ज्यो उछाले जाने वाले सिक्को की सख्या बढती जाती है, त्यो-त्यो वक्र निष्कोण होता जाता है । जब 10 सिक्के उछाले जाते हैं, तब ग्यारह बिन्दु आलेखित करने पड़ते है (देखिए खण्ड C), किन्तु यदि 100 सिक्के उछाले जाते तो 101 बिन्दु आलेखित करने पडते और वक्र प्राय वैसा ही प्रतीत होगा जैसा चार्ट 23 1 मे । जैसे ही N अनन्तता पर पहुँचता है तो $(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}h)^N$

$$Y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

सीमा[3] तक पहुँच जाता है जो प्रसामान्य वक्र का व्यजक है । सकेत निम्न प्रकार है ·

Y_c = समातर माध्य से x दूरी पर एक कोटि की परिकलित ऊँचाई,

σ = जनसख्या का मानक विचलन,

π = अचर, 3 14159, $\sqrt{2\pi}=2\ 5066$,

e = अचर, 2 71828, लघुगणको की नैपेरियन विधि का आधार, तथा

x = समातर माध्य से चुना हुआ विचलन ।

उपर्युक्त दो अचरो को प्रतिस्थापित करके, हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$Y_c=\frac{1}{2\ 5066\sigma}\ 2\ 71828^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

प्रसामान्य वक्र को आसजित करना

चार्ट 23 2 म एक प्रसामान्य वक्र एक रेखा के मापो की श्रेणी पर आसजित करके दिखाया गया था । यह दिखाई दता कि वे आँकडे उसी वस्तु के पुनरावृत्त माप थे । चार्ट 23 5 मे हमारे पास भिन्न प्रकार के आँकडे हैं, जो सजातीय समूह से अनेक व्यक्तियो के मापो के परिचायक है । उसी वस्तु के पुनरावृत्त मापो मे सम्मिलित आकस्मिक त्रुटिया प्राय प्रसामान्य वक्र का अनुसरण करती है । फिर भी, किसी विशेषता के विषय मे अनेक विशिष्ट व्यक्तियो के माप ऐसे वक्र का अनुसरण कर भी सकते हैं और नही भी कर सकते। उदाहरण के लिए, वयस्क व्यक्तियो के एक सजातीय वर्ग की ऊँचाई के बटन के अनिवार्य रूप से प्रसामान्य होने की आशा की जा सकती थी, किन्तु उन्ही व्यक्तियो के भार का बटन

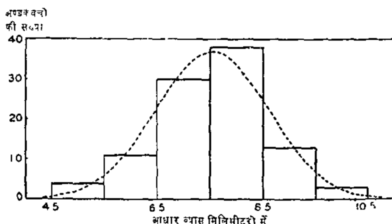
---

3 द्विपद की एक अन्य सीमा पोयशन बटन है जिस तक द्विपद पहुँचता है, यदि भिन्नो मे से कोई बहुत छोटी हो तथा N अनन्ता पर पहुँचता हो । पोयशन बटन को आसजित करने का वर्णन एफ० ई० क्रॉक्सटन एलिमटरी स्टैटिस्टिक्स विद एप्लीकेशन्स इन मैडीसिन एड दि बॉयलाजिकल साइन्सिस, डावर प्रकाशन, इन्कॉ०, न्यूयार्क, 1959, पृष्ठ 41—49 मे किया गया है ।

स्पष्टत. दाहिनी ओर को झुकेगा । चार्ट 23 5 मे जबकि घोघो के अण्डकवचो के आधार व्यास का आसजित प्रसामान्य वक्र द्वारा चित्रण किया जा सकता है, वहाँ यह बहुत कुछ सभव है कि उन्ही अडो के भार, निश्चित वैषम्य को प्रकट करेंगे ।

चार्ट 23 5 मे आरोपित वक्र वंटन के उस रूप की ओर सकेत करता है जिसकी हम *आशा करनी चाहिए यदि हमारे प्रतिदर्श बहुत बडे थे, अथवा यदि हमने सम्पूर्ण* जन-समुदाय को माप लिया था । इसका अभिप्राय यह है कि, यदि एक बडे वर्ग का अध्ययन किया गया, तो हमे प्रतिदर्श मे प्राप्त आधार-व्यास की अपेक्षा छोटे और बडे दोनो आधार व्यास के साथ कुछ उदाहरण मिलेगे ।

शारीरिक योग्यता के आंकडों पर प्रसामान्य वक्र आसजित करना—सारणी 23 1 म *दूरियो के बटन को दिखाया गया है जहाँ तक हाई स्कूल की 303 नौसिखुआ लडकियाँ* आधार गेद फेंक पाईं । ये आँकडे उनके, जिनसे चार्ट 23.5 अकित किया गया है, इस बात मे नितात समान है कि वे अनेक विभिन्न व्यक्तियो के माप है । यह देखा जा सकता है कि



चार्ट 23 5 समुद्री घोघे, साइफो कर्टस, के 99 अडकवचो के आधार व्यासों पर आसजित प्रसामान्य वक्र । आधार व्यास के आंकडे गुनर थॉरसन, स्टडीज़ आन दि ऐगकेप्सूल्स एड डिवेलपमेट ऑफ़ आर्कटिक मेरीन प्रोसोब्राक्स, पृष्ठ 7, मेडेलेल्सर ओमग्रोनलैंड दजियोल अफ-कोमिशियोनन फार विडसकाबलिज एडसोगेल्सर आइ ग्रोनलैंड से ।

लडकियो मे से बहुत कम ने आधार गेंद का 45 फुट से कम दूर फेंका और बहुत कम ने 115 फुट या अधिक दूर फेंका । चार्ट 23.6 का स्तम्भ आरेख सारणी 23 1 के आँकडो को प्रदर्शित करता है ।

प्रेक्षित वारवारता बटन पर एक प्रसामान्य वक्र आसजित करने के लिए हम समीकरण का पुनर्लेखन करते हैं

$$Y_c = \frac{Ni}{2\ 5066s}\ 2\ 71828^{\frac{-x^2}{2s^2}},$$

जहाँ N प्रतिदर्श मे प्रेक्षणो की सख्या है,

i प्रतिदर्श बटन का वर्ग अन्तराल है, तथा

s प्रतिदर्श का मानक विचलन है ।

हम प्रेक्षित आंकडो के समुच्चय पर एक प्रसामान्य वक्र आसजित करते समय s की अपेक्षा, σ के एक आकलन, $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N-1}}$, का प्रयोग कर सकते है, जिसका वर्णन अगले अध्याय मे किया जाएगा। फिर भी, हम सामान्यत s को वरीयता प्रदान करते है, क्योकि यह जनसमुदाय मे प्रसार का आकलन होने की अपेक्षा प्रेक्षित आकार के प्रतिदर्श के प्रसार को मापता है। इसमे आगे, प्रसामान्य वक्र के आसजन का औचित्य प्रमाणित करने के लिए, पर्याप्त बड़े N वाले वारवारता बटन के लिए s तथा $\hat{\sigma}$ मे अन्तर इतना कम है कि इसका आसजन पर बहुत कम प्रभाव पड़ेगा। उदाहरण के लिए, सारणी 23.1 के आंकडो के लिए, $s = 20.95$ फुट तथा $\hat{\sigma} = 20.98$ फुट।

सारणी 23 1

नवीं कक्षा की 303 छात्राओ द्वारा आधार गेंद फेंकने की दूरी

दूरी फुटो मे	छात्राओ की सख्या
15 किन्तु 25 से कम	1
25 किन्तु 35 से कम	2
35 कि तु 45 से कम	7
45 कि तु 55 से कम	25
55 कि तु 65 से कम	33
65 कि तु 75 से कम	53
75 कि तु 85 से कम	54
85 किन्तु 95 से कम	44
95 किन्तु 105 से कम	31
105 किन्तु 115 से कम	27
115 किन्तु 125 से कम	11
125 किन्तु 135 से कम	4
135 किन्तु 145 से कम	1
योग .	303

आंकडे ल्योनोरा डब्ल्यू० स्टयूवर्ट तथा हेलेन वैस्ट, दि फ्रोबेल स्कूल गारी, इडियाना से। माप सन् 1935 मे लिए गए।

सम्पूर्ण आसजन प्रक्रिया के दो पग है, प्रथम, आसजित वक्र की निश्चित रूपरेखा जानने के लिए अनेक कोटियो के मानो का निर्धारण, तथा, दूसरे, वक्र के अशो के लिए, जो हमारे लिए महत्त्वपूर्ण है, सानुपातिक क्षेत्रो का परिकलन।

कोटियाँ—प्रसामान्य वक्र के सूत्र की ओर पुन: सकेत करके,

$$Y_o = \frac{Ni}{2.5066s} 2.71828^{\frac{-x^2}{2s^2}},$$

ऐसा प्रतीत होता है कि बटन पर प्रसामान्य वक्र ग्रासजित करने के लिए हमें N, $\bar{X}$, और s के मानों की आवश्यकता है। पिछले अध्यायों मे वर्णित प्रविधि द्वारा परिकलित करके हम पाते हैं कि $\bar{X} = 80\ 63$ फुट तथा $s = 20\ 95$ फुट। क्योंकि 303 लड़कियाँ थीं, $N = 303$।

माध्य पर निर्मित करने के लिए हम पहले कोटि का परिकलन करेंगे। इसे Y_o नाम दिया गया है और यह ग्रासजित वक्र की अधिकतम कोटि है। क्योंकि माध्य पर $x = 0$, हम

$$Y_o = \frac{303 \times 10}{2\ 5066 \times 20\ 95}\ 2\ 71828^{\frac{-0^2}{2(20\ 95)^2}}$$

प्राप्त करते है। उपयुक्त व्यजक म 2 71828 का घाताक शून्य है। क्योंकि शून्य घात तक बढ़ाने पर कोई सख्या एक हो जाती है $2\ 71828^{\frac{-0^2}{2(20\ 95)^2}} = 1$ अत यह स्पष्ट है कि माध्य पर कोटि निर्माण के लिए व्यजक $e^{\frac{-x^2}{2s^2}}$ सदैव 1 के बराबर होता है तथा

$$Y_o = \frac{Ni}{2\ 5066s}.$$

इसलिए

$$Y_c = \frac{Ni}{2\ 5066s} e^{\frac{-x^2}{2s^2}} = Y_o 2\ 71828^{\frac{-x^2}{2s^2}}$$

विचारान्तगत समस्या के लिए,

$$Y_c = \frac{303 \times 10}{2\ 5066 \times 20\ 95} = 57\ 7$$

यथासभव निष्कोण वक्र का रेखाकन करने के योग्य बनने के लिए अब हमारी इच्छा Y_o के दोनों ओर पर्याप्त अतिरिक्त कोटियों का निर्माण करने की है। यदि हम माध्य से 4 19 फुट की क्रमिक दूरियाँ चुनें तो हम माध्य से $\frac{1}{5}$ s के अन्तर पर कोटिया निर्माण करेंगे। माध्य ($X = 84\ 82$ तथा 76 44 फुट) से कोटियो (क्योंकि वक्र सममित है) के प्रथम युग्म का निर्माण $x = \pm 4\ 19$ फुट पर होगा, निम्न व्यजक का प्रयोग करते हुए,

$$Y_c = 57\ 7 \times 2\ 71828^{\frac{-(4\ 19)^2}{2(20\ 95)^2}}$$

Y_c मान का निर्धारण करने के लिए $2\ 71828^{\frac{-(4\ 19)^2}{2(20\ 95)^2}}$ का परिकलन करना आवश्यक नही है वरन् केवल परिशिष्ट घ को देख लेना पर्याप्त है। $\frac{x}{s}$ का उचित मान देखने पर, जो इस उदाहरण मे $\frac{4\ 19}{20\ 95} = 0\ 20$ है, हम पाते हैं कि

$$2\ 71828^{\frac{-(4\ 19)^2}{2(20\ 95)^2}} = 0\ 98020$$

तथा $$Y_c = 57\ 7 \times 0\ 98020 = 56\ 6$$

सारणी 23 2

नवी कक्षा को छात्राओं द्वारा आधार गेंद फेंकने की दूरी के आकडों पर आसजित प्रसामान्य वक्र की कोटियो का निर्धारण

($\lambda = 80\ 63$ फट, $s = 20\ 95$ फुट, $Y_o = 57\ 7$)

X (फुटो म जहाँ कोटियाँ निर्मित करनी है) (1)	x (फुटो म x का λ से विचलन) (2)	$\frac{x}{s}$ (3)	कोटि की सानपातिक ऊँचाई $2\ 71828^{\frac{-x^2}{2s^2}}$ (परिशिष्ट घ) (4)	काटि की ऊँचाई (स्तम्भ $4 \times Y_o$) (5)
13 59	— 67 04	3 20	0 00598	0 3
17 78	62 85	3 00	0 01111	0 6
21 97	— 58 66	2 80	0 01984	1 1
26.16	— 54 47	2 60	0 03405	2 0
30 35	— 50 28	2 40	0 05614	3 2
34 54	—46 09	2 20	0 08892	5 1
38 73	—41 90	2 00	0 13534	7 8
42 92	—37 71	1 80	0 19790	11.4
47 11	—33 52	1 60	0 27804	16 0
51 30	—29 33	1 40	0 37531	21 7
55 49	—25 14	1 20	0 48675	28 1
59 68	—20 95	1 00	0 60653	35,0
63 87	—16 76	0 80	0 72515	41 9
68 06	—12 57	0 60	0 83527	48 2
72.25	— 8 38	0 40	0 92312	53 3
76 44	— 4 19	0 20	0 98020	56 6
80 63	0	0	1 00000	57 7
84 82	+ 4 19	0 20	0 98020	56 6
89 01	+ 8 38	0 40	0 92312	53 3
93 20	+12 57	0 60	0 83527	48 2
97 39	+16 76	0 80	0 72615	41 9
101 58	+20 95	1 00	0 60653	35 0
105 77	+25 14	1 20	0 48675	28 1
109 96	+29 33	1 40	0 37531	21 7
114 15	+33 52	1 60	0 27804	16 0
118 34	+37 71	1 80	0,19790	11 4
122 53	+41 90	2 00	0 13534	7 8
126 72	+46 09	2 20	0 08892	5 1
130 91	+ 50 28	2 40	0 05614	3 2
135 10	+ 54 47	2 60	0 03405	2 0
139 29	+ 58 66	2 80	0 01984	1 1
143 48	+ 62 85	3 00	0 01111	0 6
147 67	+ 67 04	3 20	0 00598	0 3

कोटियों के अगले युग्म के लिए, $x = \pm 8.38$ फुट ($X = 89.01$ फुट तथा 72.25 फुट) और

$$Y_c = 57.7 \times 2.71828^{\frac{-(8.38)^2}{2(20.95)^2}}.$$

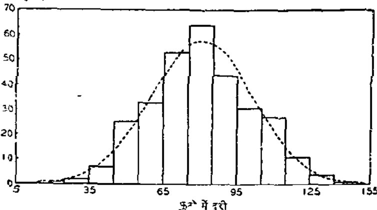
यहाँ $\frac{x}{\sigma}$ का अनुपात है 0.40 और परिशिष्ट घ की ओर संकेत करने पर हम पाते हैं कि

$$Y_c = 57.7 \times 0.92312 = 53.3$$

कोटियों की ऊँचाइयाँ निर्धारित करने की प्रक्रिया सारणी 23.2 जैसी सारणी के प्रयोग से बहुत शीघ्रतापूर्वक निपटाई जा सकती है। सारणी के उच्च और निम्न भागों में कोटियाँ समान हैं क्योंकि आसजित वक्र सममित है।

आसजित वक्र चार्ट 23.6 में दिखाया गया है। यह प्रतिदर्श के सामान्य रूप के अनुरूप है, किन्तु अनियमितताओं को दूर कर देता है और निर्दिष्ट करता है कि क्या आशा की जा सकती थी यदि तुल्य लड़कियों की बहुत बड़ी संख्या के कार्य को अंकित किया जा सकता। अब तक हमने जो कुछ किया है वह केवल आसजित वक्र का रूप प्रदान करता है और आसजन की उपयुक्तता के दृश्य प्रभाव को प्रकट करता है जो इस उदाहरण में अच्छा प्रतीत होता है।

क्षेत्र—अभी तक हमने यह कहने का काम हाथ में नहीं लिया है कि हाई स्कूल की नौमिन्वुआ लड़कियों के कौन-से अनुपात से आधार गेंद फेंकने की आशा की जा सकती है (1) किसी निर्दिष्ट फुटों की दूरी तक, या अधिक (2) किसी निर्दिष्ट फुटों की दूरी तक, या कम अथवा (3) एक निर्दिष्ट मान के बराबर या अधिक दूरी तक किन्तु अन्य बड़े मान के



चार्ट 23.6 नवम कक्षा की लड़कियों द्वारा आधार गेंद फेंकने की दूरी के आकड़ों पर आसजित प्रसामान्य वक्र। आंकड़े सारणी 23.1 तथा 23.2 से।

बराबर या कम दूरी तक। हमने यह बताने का भी प्रयत्न नहीं किया कि बारबारता बटन के विभिन्न वर्गों में से प्रत्येक में किस अनुपात में लड़कियों के आने की आशा की जा सकती

है। प्रत्याशित बारंबारताएं प्रासजित वक्र को समाकलित करके ज्ञात की जाती है। फिर भी, प्रविधि अत्यन्त सरल हो जाती है, और समाकलन के किसी ज्ञान की आवश्यकता नहीं है, यदि हम प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत, परिशिष्ट ड के समान, क्षेत्रो की सारणी का प्रयोग करे। यह परिशिष्ट वक्र के अन्तर्गत आनुपातिक क्षेत्र प्रदान करता है जो $\bar{X}$ से किसी एक दिशा म (दोनो दिशाओ म नही) निर्दिष्ट $\frac{x}{s}$ दूरियो पर एक कोटि और X पर एक कोटि के मध्य मे है। यह कथन परिशिष्ट ड के साथ दिखाए गए छोटे चार्ट द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। परिशिष्ट ड मे प्रदर्शित अधिकतम आनुपातिक क्षेत्र 0 50 है, क्योकि सम्पूर्ण वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र 1 0 है।

उन लडकियो का अनुपात जानने के लिए जिनसे आधार गेद 100 फुट या अधिक दूर फेकने की आशा की जा सकती है पहले हम $\bar{X}=80\ 63$ फुट और $X=100$ फुट के मानो मे प्रत्याशित अनुपात को निर्धारित करते है और बाद मे इस अनुपात को 0 50 मे घटाते है। $X=100$ फुट पर, $x=100-80\ 63=19\ 37$ फुट, और क्योकि $s=20\ 95$,

$$\frac{x}{s}=\frac{19\ 37}{20\ 95}=0\ 92$$

परिशिष्ट ड क सकेत से यह प्रतीत होता है कि क्षेत्र का 0 3212 भाग दो मानो के मध्य है, और इसलिए 0 50 − 0 3212 = 0 1788 या क्षेत्र का लगभग 18 प्रतिशत, $X=100$ फुट पर या उससे आगे है।

यदि हम यह जानना चाहे कि लडकियो के कौनसे अनुपात से आधार गेद को 50 फुट या कम दूरी पर फेकने की आशा की जा सकती है, तो प्रविधि उपर्युक्त के समानान्तर होगी। पाठक को इसे स्वय हल कर लेना चाहिए। उत्तर 7.2 प्रतिशत है।

पिछले दो अनुच्छेदो म अन्तर्ग्रस्त व्यवकलनो का हम परिहार कर सकते है यदि हम परिशिष्ट च का उपयोग कर ले, जो प्रसामान्य वक्र के एक तारतम्य मे क्षेत्रो को प्रदर्शित करता है। यह परिशिष्ट और परिशिष्ट छ जो क्षेत्रो को प्रसामान्य वक्र के दो तारतम्यो मे प्रस्तुत करता है, अध्याय 24 के आशिक वर्ण्य विषय के सम्बन्ध म विशेष उपादेय होगे।

उन लडकियो का अनुपात-निर्धारण करने के लिए जिनसे आधार गेंद को 87 और 100 फुट क मध्य की दूरी तक फेकने की आशा की जा सकती है, हम $\bar{X}=80\ 63$ फुट से $X=87$ फुट तक वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र का परिकलन करते है, और $\bar{X}=80\ 63$ फुट स 100 फुट तक क्षेत्र का, और बाद मे इन दो आंकडो का अन्तर निकाल लेते हैं। प्रथम आनुपातिक क्षेत्र निम्न का प्रयोग करके प्राप्त होता है,

$$x=6\ 37 \text{ फुट और}$$

$$\frac{x}{s}=\frac{6\ 37}{20\ 95}=0.30.$$

सारणी 23 3

नवी कक्षा की लडकियो द्वारा आधार गेंद फकने की दूरी क लिए प्रत्यक वग मे प्रत्याशित वारवारताओ का निर्धारण

(λ = 80 63 फुट s 20 95 फट)

फुटो मे दूरी	वर्गों की सीमाएं		x माध्य से सीमा तक विचलन	$\frac{x}{s}$	माध्य और सीमा के मध्य क्षत्र का अनुपात (परिशिष्ट ड)	प्रत्येक वग मे क्षत्र का अनुपात	प्रत्येक वग मे प्रत्याशित वारवारताएँ N = 303*
	निम्नतर सीमाएँ	उच्चतर सीमाए					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
5 से कम					0 5000	0 0001	
5 किन्तु 15 से कम	5		75 63	3 61	0 4999	0 0008	0 2
15 किन्तु 25 से कम	15		65 63	3 13	0 4991	0 0030	0 9
25 किन्तु 35 से कम	25		55 63	2 66	0 4961	0 0107	3 2
35 किन्तु 45 से कम	35		45 63	6 18	0 4854	0 0300	9 1
45 किन्तु 55 से कम	45		35 63	1 70	0 4554	0 0666	20 2
55 किन्तु 65 से कम	55		25 63	1 22	0 3888	0 1154	35 0
65 किन्तु 75 से कम	65		15 63	0 75	0 2734	0 1670	50 6
75 किन्तु 85 से कम	75		5 63	0 27	0 1064	0 1896	57 4
		85	4 37	0 21	0 0832		
85 किन्तु 95 से कम		95	14 37	0 69	0 2549	0 1717	52 0
95 किन्तु 105 से कम		105	24 37	1 16	0 3770	0 1221	37 0
105 किन्तु 115 से कम		115	34 37	1 64	0 4495	0 0725	22 0
115 किन्तु 125 से कम		125	44 37	2 12	0 4830	0 0335	10 2
125 किन्तु 135 से कम		135	54 37	2 60	0 4953	0 0123	3 7
135 किन्तु 145 से कम		145	64 37	3 07	0 4989	0 0036	1 1
145 किन्तु 155 से कम		155	74 37	3 55	0 4998	0 0009	0 3
155 और अधिक					0 5000	0 0002	0 1
योग						1 0000	303 0

* इस स्तम्भ मे प्राय एक दशमलव दिखाया जाता है ताकि सब प्रत्याशित वारवारताएँ सब प्रेक्षित वारवारताओ के साथ 0 1 या 0 2 के भीतर मेल खाएँ। यह सारणी 25 10 के x^2 परीक्षण बताने मे महत्वपूर्ण है।

परिशिष्ट ड प्रदर्शित करता है कि क्षेत्र का 0 1179 भाग $\bar{X}=80\ 63$ फुट तथा $X=87$ फुट के मध्य है। हम पहले ही जानते है कि क्षेत्र का 0 3212 भाग $\bar{X}=80\ 63$ फुट तथा $X=100$ फुट के मध्य है, इसलिए 87 फुट और 100 फुट के मध्य आनुपातिक क्षेत्र है

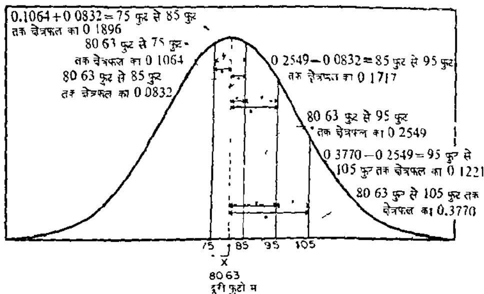
$$0\ 3212-0.1179=0\ 2033, \text{ अथवा लगभग 20 प्रतिशत ।}$$

सारणी 23 3 की सहायता से, बारंबारता बटन के प्रत्येक वर्ग मे प्रत्याशित बारंबारताएँ निम्न प्रकार प्राप्त की गइ

1 सारणी के स्तम्भ (1) मे, मूल बटन के वर्गों को अंकित कीजिए, प्रत्येक सिरे पर एक या दो अतिरिक्त वर्गों की छूट देते हुए, क्योंकि आसजित वक्र का परिसर प्रतिदर्श की अपेक्षा प्राय. बड़ा होना चाहिए। सैद्धांतिक रूप से आसजित वक्र दोनों दिशाओं मे असीमित परिसर वाला है। जिस वर्ग मे माध्य पडता है, उसमे दो स्थानों की गुंजायश रखिए।

2 स्तम्भ (2) मे प्रत्येक वर्ग की निम्नतर सीमाओं को मान मे माध्य और उस वर्ग की निम्नतर सीमा के नीचे लिखिए जिसम माध्य सम्मिलित हो।

3 स्तम्भ (3) मे, प्रत्येक वर्ग की उच्चतर सीमा को मान मे माध्य और उस वर्ग की उच्चतर सीमा के ऊपर लिखिए जिसम माध्य सम्मिलित हो।



चार्ट 23.7 सारणी 23 3 के स्तम्भ (6) तथा (7) मे प्रविधि का लेखा-चित्रीय निरूपण।

4 हम पहले उस वर्ग का, जिसमे माध्य पडता हो, माध्य (80 63 फुट) और उच्चतर सीमा (85 फुट) के मध्य आनुपातिक क्षेत्र ज्ञात करेंगे। माध्य से उच्चतर सीमा का विचलन 4 37 फुट है; यह मान स्तम्भ (4) मे अंकित है। क्योंकि $s=20\ 95$ फुट,

$$\frac{x}{s}=\frac{4\ 37}{20\ 95}=0\ 21$$

यह मान स्तम्भ (5) मे अकित है। अब, परिशिष्ट ड मे 0 21 देखकर, हम पाते हैं कि क्षेत्र का 0 0832 भाग माध्य तथा 85 फुट के मध्य है। यह मान स्तम्भ (6) मे अकित है। चार्ट 23 7 मे लेखाचित्रीय ढग से प्रविधि को प्रदर्शित किया गया है।

5. अगला पग, माध्य के ऊपर प्रथम श्रेणी की उच्चतर सीमा तथा माध्य के मध्य आनुपातिक क्षेत्र के निर्धारण का है। यह सीमा 95 फुट है, $x = 14\ 37$ फुट तथा

$$\frac{x}{s} = \frac{14\ 37}{20\ 95} = 0\ 69$$

परिशिष्ट ड मे 0.69 को देखने पर ज्ञात होता है कि क्षेत्र का 0 2549 भाग माध्य तथा 95 फुट क मध्य प्रत्याशित होगा। यह मान स्तम्भ (6) मे अकित है। यदि क्षेत्र का 0 2549 भाग 80 63 और 95 फुट के मध्य पाया जाए, जबकि क्षेत्र का 0 0832 भाग 80.63 और 85 फुट के मध्य आता है, तो 0 2549 − 0 0832 = क्षेत्र का 0.1717 भाग 85 फुट और 95 फुट के मध्य होगा। इस व्यवकलन का परिणाम स्तम्भ (7) मे अकित है, यह प्रविधि भी चार्ट 23 7 मे लेखाचित्रीय ढग से निर्दिष्ट है।

6 मान म माध्य के ऊपर प्रत्यक वर्ग के लिए पग 5 की प्रविधि की पुनरावृत्ति की गई है। प्रत्येक वर्ग के माध्य से उच्चतर सीमा तक आनुपातिक क्षेत्र ज्ञात किए गए हैं और फिर पिछले वर्ग के माध्य से उच्चतर सीमा तक अनुपातो का व्यवकलन किया गया है, जैसा सारणी म प्रदर्शित है।

7 सारणी के स्तम्भ (2) मे प्रदर्शित माध्य और निम्नतर सीमाओं के मध्य आनुपातिक क्षेत्र बाद मे निर्धारित किए गए हैं। क्योंकि ये क्षेत्र सचयी भी हैं, अतः क्रमिक व्यवकलन पुन आवश्यक हो जाता है।

8 अब हमने माध्य को सम्मिलित कर लेने वाले वर्ग के अतिरिक्त प्रत्येक वर्ग के लिए आनुपातिक क्षेत्रो को स्तम्भ (7) मे अकित कर लिया है। स्तम्भ (6) मे हमने निर्धारण किया है कि क्षेत्र का 0 0832 भाग माध्य और 85 फुट के मध्य है, और क्षेत्र का 0 1064 भाग माध्य तथा 75 फुट के मध्य है। इन दो आँकडो के योग से 0 1896 की प्राप्ति होती है जो इस वर्ग मे क्षेत्र का अनुपात है [देखिए स्तम्भ (7) और चार्ट 23.7]।

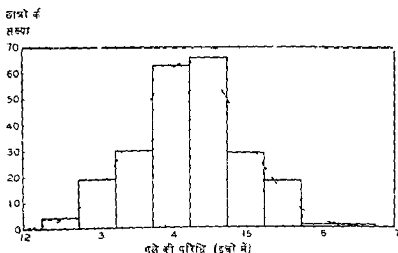
9 स्तम्भ (7) का योग 1 0000 होना चाहिए, क्योंकि माध्य से बटन के प्रत्यक छोर तक क्षेत्र का 0 5000 भाग है। प्रेक्षित और प्रत्याशित बारबारताओं मे सगति देखने के लिए हम स्तम्भ (8) को सम्मिलित कर लेते हैं, जो प्रत्येक वर्ग के आनुपातिक क्षेत्र को 303 से गुणा करके प्राप्त होता है।

सारणी 23 3 के स्तम्भ (8) मे प्रदर्शित प्रत्याशित बारबारताओं की सारणी 23 1 की प्रेक्षित बारबारताओ के साथ तुलना करने से आँकडो की सामान्य सगति प्रकट होती है, "85 किन्तु 95 फुट से कम" वर्ग के लिए अन्तर सर्वाधिक रहता है। प्रसामान्य वक्र की "आसजन की उत्तमता" की परीक्षा का अध्याय 25 मे वर्णन किया जाएगा।

प्रसामान्य वक्र और गलपट्ट (कॉलर) के माप—प्रसामान्य वक्र का एक अन्य उपयोग प्रदर्शित करने के लिए, मान लीजिए कि एक गलपट्ट बनाने वाला कॉलेज के लोगो के लिए एक विशेष रूप स अभिकल्पित गलपट्ट के उत्पादन पर विचार कर रहा है।

कॉलिज के लोग क्योंकि एक चुने हुए वर्ग का प्रतिनिधित्व करते है, अत यह वाञ्छित होगा कि उत्पादन तालिका को उनकी विशिष्ट आवश्यकता के अनुसार समजित कर लिया जाए। कॉलिज के लोगो के गलो की परिधि के व्यापक आँकडे उपलब्ध नही हैं, किन्तु सारणी 23 4 कॉलिज के 231 पुरुष छात्रो के गलो के माप प्रदर्शित करती है। एक प्रसामान्य वक्र को आसजित करने के लिए हमे चाहिए $\bar{X} = 14\ 232$ इच तथा $s = 0\ 719$ इच। प्रेक्षित आँकडो का स्तम्भ चित्र और आसजित वक्र चार्ट 23 8 मे दिखाए गए है।

इस उदाहरण मे हमारी समस्या "12 75 इच किन्तु 13 25 इच से कम", "13 25 इच किन्तु 13 75 से कम" इत्यादि परिधि वाले गलो के कॉलिज के लोगो के प्रत्याशित अनुपात के निर्धारण की नही है बल्कि प्रत्येक साइज या आकार (आध आकारो द्वारा) के गलपट्टो की सख्या निर्धारण करने की है जो बनाए जाने हैं। अनुभव कहता



चार्ट 23 8 कॉलेज के 231 पुरुष छात्रो के गलो की परिधियो पर आसजित प्रसामान्य वक्र। सारणी 23 4 के आकडो पर आधारित।

है कि औसत रूप से, गले की परिधि से लगभग $\frac{3}{4}$ इच बडे गलपट्ट पहन जाते हैं। इसका अभिप्राय यह हुआ कि 13 25 इच औसत परिधि के गले वाले पुरुष 14 साइज या आकार के गलपट्ट पहनेगे और क्योंकि हम आध आकारो के सम्बन्ध मे बात कर रहे हैं, अत गले 13 से 13 5 इच परिधि के परिसर मे रहेगे। सारणी 23 5 के प्रथम स्तम्भ मे गलपट्टो के आकारो की सूची है जबकि दूसरे स्तम्भ मे गलो की सगत परिधियाँ अकित हैं। इन वर्गो के लिए ही हम सैद्धान्तिक बारबारताएँ जानना चाहते है। अन्य स्तम्भो मे यही किया गया है तथा प्रत्याशित बारबारताएँ ($N = 1\ 000$) स्तम्भ (9) मे प्रदर्शित की गई है। यदि हमारे मूल आँकडे प्रतिनिधिक हैं, तो 1000 ग्राहकों मे से लगभग 270 माँग करेंगे 15 साइज के कालर के लिए, 221 माँगेंगे $14\frac{1}{2}$ साइज के कॉलरों को 213 मागेंगे $15\frac{1}{2}$ साइज के कॉलर आदि आदि। यह कहना रुचिकर होगा कि इस वर्ग के 1000 ग्राहको मे से केवल 8

सारणी 23 4

कॉलेज के 231 पुरुष छात्रो के गलों की परिधि

मध्यमान (इचो मे)	विद्यार्थियो की सख्या
12 5	4
13 0	19
13 5	30
14 0	63
14.5	66
15 0	29
15 5	18
16 0	1
16 5	1
योग	231

आँकडो का स्रोत गोपनीय ।

से हम यह आशा कर सकते हैं कि वे 13 या उससे छोटे साइज की माँग करेंगे और 1,000 मे से केवल 7, 17 या उससे बडा साइज लेना चाहेंगे ।

प्रसामान्य वक्र की उपयुक्तता—जैसा पीछे सकेत किया जा चुका है, प्रसामान्य वक्र अनेक प्रकार के वक्रा मे से केवल एक है जो बारबारता-बटन पर आसजित किया जा सकता है । किसी भी दशा मे सब बटनो पर सामान्य प्रयोज्यता रखने के रूप मे इस पर विचार नही किया जाना चाहिए । क्योकि यह सत्य है, अत यह बताने के लिए कि प्रसामान्य वक्र को कब आसजित किया जाए, अथवा आसजित करने पर, यह उपयुक्त है अथवा नही, कौनसा निर्देशक है ?

1 प्रतिदश बटन का आलेखित वक्र अथवा स्तम्भ-चित्र अत्यन्त अशोधित निर्देशक का कार्य करता है । यदि विशिष्ट वैषम्य विद्यमान है तो यह, अन्य अनियमितताओ के समान, स्पष्ट हो जाएगा ।

2 प्रतिदर्श आँकडे सचित किए जा सकते हैं और सारणी 23 6 के समान प्रतिशत रूप मे प्रस्तुत किए जा सकते है, ये सचयी प्रतिशतताएँ फिर, चार्ट 23 9 के समान, प्रसगणितीय प्रायिकता-पत्र[4] पर आलेखित की जा सकती ह । यदि परिणामी वक्र लगभग एक सीधी रेखा हो तो हम आश्वस्त होकर एक प्रसामान्य वक्र को आसजित करने के लिए आगे बढ सकते है ।

4, ऊर्ध्वाधर पैमाने को इस प्रकार अभिकल्पित किया जाता है कि प्रसामान्य वक्र का तोरण सीधी रेखा के समान प्रतीत होगा ।

सारणी 23 5

कॉलेज के पुरुष छात्रों के लिए गलपट्ट आकारों (मापों) के प्रत्याशित बटन का निर्धारण

($\bar{X}$=14 232 इंच, s=0 719 इंच)

गलपट्ट का माप (साइज़) (1)	गले की सगत परिधि (2)	वर्गों की सीमाएँ निम्नतम सीमाएँ (3)	वर्गों की सीमाएँ उच्चतर सीमाएँ (4)	x माध्य से सीमा तक (5)	$\frac{x}{s}$ (6)	माध्य और सीमा के मध्य क्षेत्र का अनुपात (परिशिष्ट ड) (7)	प्रत्येक वर्ग में क्षेत्र का अनुपात (8)	प्रत्याशित बारंबारताएँ $N=1,000$ (9)
	11 5 से कम					0 5000	0 0001	0 1
$12\frac{1}{2}$	11.5 किन्तु 12 0 से कम	11 5		2 732	3 80	0 4999	0 0009	0 9
13	12 0 किन्तु 12 5 से कम	12 0		2 232	3 10	0 4990	0 0070	7 0
$13\frac{1}{2}$	12 5 किन्तु 13 0 से कम	12 5		1 732	2 41	0 4920	0 0356	35 6
14	13 0 किन्तु 13 5 से कम	13 0		1 232	1 71	0 4564	0 1103	110 3
$14\frac{1}{2}$	13 5 किन्तु 14 0 से कम	13 5		0 732	1 02	0 3461	0 2206	220 6
15	14 0 किन्तु 14 5 से कम	14 0		0 232	0 32	0 1255	0 2698	269 8
			14 5	0 268	0 37	0 1443		
$15\frac{1}{2}$	14 5 किन्तु 15 0 से कम		15 0	0 768	1 07	0 3577	0 2134	213 4
16	15 0 किन्तु 15 5 से कम		15 5	1 268	1 76	0 4608	0 1031	103 1
$16\frac{1}{2}$	15 5 किन्तु 16 0 से कम		16 0	1 768	2 46	0 4931	0 0323	32 3
17	16 0 किन्तु 16 5 से कम		16 5	2 268	3 15	0 4992	0 0061	6 1
$17\frac{1}{2}$	16 5 किन्तु 17 0 से कम		17 0	2 768	3 85	0 4999	0.0007	0 7
	17 0 किन्तु या अधिक					0 5000	0 0001	0 1
योग							1 0000	1,000 0

सारणी 23.6

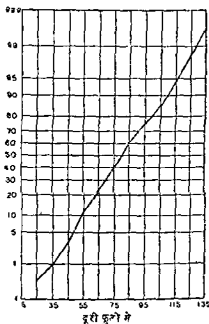
नवों कक्षा की 303 छात्राओ द्वारा आधार गेंद फेंकने की दूरी के सचयी बटन

फुटो मे दूरी	छात्राओ की सख्या	योग का प्रतिशत
25 से कम	1	0 33
35 से कम	3	0 99
45 से कम	10	3 30
55 से कम	35	11 55
65 से कम	68	22 44
75 से कम	121	39 93
85 से कम	185	61 06
95 से कम	229	75.58
105 से कम	260	85 81
115 से कम	287	94 72
125 से कम	298	98 35
135 से कम	302	99 67
145 से कम	303	100 00

सारणी 23 1 के सचयी आंकडे।

3 β_1 तथा β_2 के मानो को परिकलित किया जा सकता है, जैसा अध्याय 10 मे वर्णित है तथा उन विधियो से जो अध्याय 26 मे प्रस्तुत की गई हैं, हम यह जान सकते है कि क्या β_1 शून्य से सार्थक रूप मे भिन्न है और क्या β_2 मे 3 0 से भिन्नता सार्थक है। हाई स्कूल की नौसिखुआ छात्राओं द्वारा आधार गद के प्रक्षेपो के लिए, $\beta_1 = 0\ 0104$ तथा $\beta_2 = 2\ 7724$। इन मानो मे से कोई भी एक प्रसामान्य वक्र के मान से सार्थक रूप से भिन्न नही है।

4 वक्र आसजित करने और विभिन्न वर्गों के लिए प्रत्याशित वारवारताओ को निर्धारित कर लेने के बाद "आसजन की उत्तमता" की परीक्षा की जा सकती है। यह परीक्षा अध्याय 25 मे वर्णित की गई है और निर्देश किया गया है कि छात्राओ द्वारा आधार गेंद प्रक्षेपो के आँकडो पर प्रसामान्य वक्र का आसजन सन्तोषप्रद है।



चार्ट 23 9 अकगणितीय प्रायिकता-पत्र पर प्रदर्शित, नवीं कक्षा की 303 छात्राओ द्वारा आधार गेंद प्रक्षेपो की दूरी का सचयी बटन। सारणी 23 6 के आंकडो पर आधारित।

द्विपद

पहले दिखाया जा चुका है कि सिक्के उछाल कर सममित द्विपद $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^n$ के प्रसार का प्रायोगिक रूप से सन्निकटन हो सकता है। उसी प्रकार एक असममित द्विपद का प्रायोगिक रूप मे प्रसार किया जा सकता है।

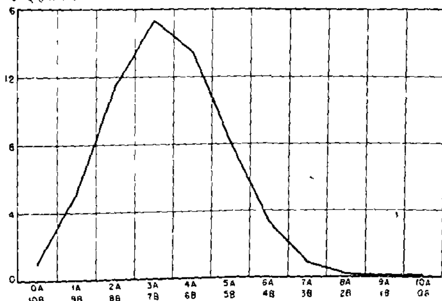
विषमित द्विपदों की प्रायोगिक संरचना—हम पहले एक ऐसे पासे का विचार करें जिसकी चार दिशाएँ काली रंगी हुई हैं। अगर हम इस पासे को उछालें तो यह स्पष्ट है कि श्वेत दिशा ऊपर आने की संभावना ($\frac{1}{3}$) 3 में से 1 या $\frac{1}{3}$ है, जब कि काली दिशा ऊपर आने की संभावना ($\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$) 3 में से 2 या $\frac{2}{3}$ है। श्वेत दिशा की उपस्थिति के निर्देश के लिए A (जिसका कोई आंकिक मान नहीं है) और श्वेत दिशा की अनुपस्थिति अर्थात् काली दिशा की उपस्थिति के निर्देश के लिए B (इसका भी कोई आंकिक मान नहीं है) का प्रयोग करते हुए, हम स्थिति का इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं

$$\tfrac{2}{3}B + \tfrac{1}{3}A \text{ अथवा } \tfrac{2}{3}B + \tfrac{1}{3}A,$$

जो निर्देश करता है कि, यदि पासा (यह मानते हुए कि पासा नितान्त संतुलित है) 1500 बार उछाला जाए, तो हमें काली दिशा 1,000 बार और श्वेत दिशा 500 बार प्रकट होने की आशा करनी चाहिए।

यदि अब हम दो पासों (प्रत्येक चार काली दिशा वाले) को उछालें तो या तो *कोई श्वेत दिशा प्रकट न होगी (दोनों काली दिशाएँ प्रकट होंगी), या एक श्वेत दिशा (एक श्वेत दिशा और एक काली दिशा) या दो श्वेत दिशाएँ प्रकट होंगी।* व्यञ्जक है

$$(\tfrac{2}{3}B + \tfrac{1}{3}A)^2 = \tfrac{4}{9}B^2 + \tfrac{4}{9}BA + \tfrac{1}{9}A^2.$$



चार्ट 23.10 10 पासों के 59,049 प्रक्षेपों का प्रत्याशित परिणाम, प्रत्येक पासे की चार दिशाएँ काली और दो श्वेत हैं। प्रत्याशित उपस्थितियाँ इस व्यंजक द्वारा दी गई हैं

$$(\tfrac{2}{3}B + \tfrac{1}{3}A)^{10}$$

$$= \frac{1,024}{59,049}B^{10} + \frac{5,120}{59,049}AB^9 + \frac{11,520}{59,049}A^2B^8 + \frac{15,360}{59,049}A^3B^7 + \frac{13,440}{59,049}A^4B^6$$
$$+ \frac{8,064}{59,049}A^5B^5 + \frac{3,360}{59,049}A^6B^4 + \frac{960}{59,049}A^7B^3 + \frac{180}{59,049}A^8B^2$$
$$+ \frac{20}{59,049}A^9B + \frac{1}{59,049}A^{10}.$$

अत., यदि 1,800 प्रक्षेप किए जाएँ तो हमें 800 बार किसी श्वेत दिशा की प्राप्ति की आशा नही करनी चाहिए, एक श्वेत दिशा की प्राप्ति की 800 बार आशा करनी चाहिए और दो श्वेत दिशाओं की 200 बार।

यदि ऐसे तीन पासे उछाले जाएँ तो व्यजक होगा

$$\left(\frac{2}{3}B+\frac{1}{3}A\right)^3=\frac{8}{27}B^3+\frac{12}{27}B^2A+\frac{6}{27}BA^2+\frac{1}{27}A^3$$

यह दिखाई देगा कि द्विपद अपनी विषमित प्रकृति दिखाना आरम्भ कर रहा है। यह तब अधिक स्पष्ट रूप स दिखाई देगा यदि हम प्रत्येक चार काली दिशा वाले 10 पासो के प्रक्षेपण का विचार करे। व्यजक होगा $\left(\frac{2}{3}B+\frac{1}{3}A\right)^{10}$, जो चार्ट 23.10 में लेखाचित्रीय रीति से दिखाया गया है। इस तथ्य के परिणामस्वरूप कि – तथा –असमान है, वक्र निश्चित रूप से विषमित है।

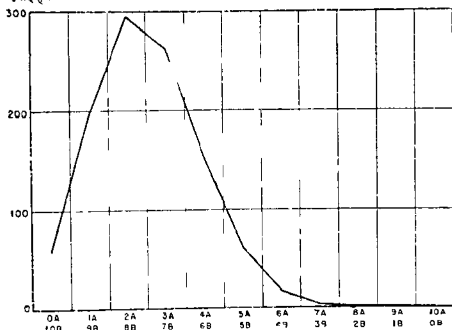


एक चार दिशा वाला पासा, जिसकी प्रत्येक दिशा समबाहु त्रिभुज है।

यदि τ एक बडी भिन्न है और π छोटी, तो वैषम्य और भी अधिक या बडा होगा। उदाहरण के लिए हम चार दिशा वाले सूचीस्तम्भीय (पिरैमिडीय) पर विचार करें जिसकी एक दिशा श्वेत और तीन काली हो। प्रक्षेप मे प्राप्त "नीचे" की दिशा पर विचार करना आवश्यक होगा। एक पासे के प्रक्षेपण पर व्यञ्जक है $\frac{3}{4}B+\frac{1}{4}A$

यदि इन चार दिशा वाले पासो में से 10 का प्रक्षेपण हो तो उनका व्यवहार $\left(\frac{3}{4}B+\frac{1}{4}A\right)^{10}$ द्वारा निर्दिष्ट होगा। इस द्विपद का प्रसार चार्ट 23 11 मे दिखाया गया है जो स्पष्ट ही चार्ट 23 10 के वक्र से अधिक विषमित है।

एक द्विपद को आसजित करना—एक द्विपद के व्यजक से यह स्पष्ट है कि यह आँकडो को पृथक करने के लिए आसजित करने के लिए अत्यधिक उपादेय उपकरण है। प्रेक्षित आँकडो की श्रेणी पर एक द्विपद को आसजित करने के लिए निम्नलिखित तीन सोपान आवश्यक है (1) π का उचित मान निर्धारित करना, जो हमें τ भी प्रदान करता है, क्योंकि $\tau=1-\pi$। π का साइज़ वक्र की विषमता की मात्रा निर्धारित करता है। यदि $\pi=0\ 50$ हो तो $\tau=0.50$ और वक्र सममित होगा। 0 50 से π किसी भी दिशा मे जितनी ही दूर हटाई जाएगी, उतनी ही विषमता अधिक होगी। यदि $\pi<0\ 50$ हो तो वक्र धनात्मक रूप से विषमित होगा, यदि $\pi>0\ 50$ हो तो यह ऋणात्मक रूप से विषमित होगा। जब समष्टि के मान (π तथा τ) ज्ञात न हो अथवा जब उनके सम्बन्ध में उचित अभिकल्पना न की जा सके, तब हमारे पास इसके अतिरिक्त कोई विकल्प नही रहता कि प्रतिदर्श से निर्धारित अनुपातों का प्रयोग किया जाए। इन्हे हम P तथा q कहते हैं। (2) द्विपद $(\tau+\pi)^N$ अथवा $(q+p)^N$ का प्रसार करें जहाँ N—श्रेणियो की सख्या—एक, क्योकि प्रसारित द्विपद मे $N+1$ पद हैं। N प्रतिदर्श मे मदों की सख्या भी है। (3) प्रसारित द्विपदो की भिन्नों में से प्रत्येक को, प्रतिदर्शों की सख्या k से गुणा करें।



चार्ट 23 11 चार दिशा वाले 10 पासो के, जिनमे से प्रत्यक की तीन काली ग्रौर एक श्वेत दिशा है 1,048,576 प्रक्षेपो के प्रत्याशित परिणाम। प्रत्याशित घटनाएँ इस व्यजक द्वारा दी गई है।

$$\left(\tfrac{3}{4}B+\tfrac{1}{4}A\right)^{10}=\frac{59\,049}{1,048\,576}B^{10}+\frac{196\,830}{1,048,576}AB^{9}+\frac{295,245}{1,048,576}A^{2}B^{8}$$
$$+\frac{262\,440}{1,048,576}A^{3}B+\frac{153\,090}{1\,048,576}A^{4}B^{6}+\frac{61\,236}{1,048,576}A^{5}B^{5}+\frac{17,010}{1,048,576}A^{6}B^{4}$$
$$+\frac{3\,240}{1,048,576}A^{7}B^{3}+\frac{405}{1,048,576}A^{8}B^{2}+\frac{30}{1,048,576}A^{9}B+\frac{1}{1,048,576}A^{10}$$

सारणी 23 7

पांच की पशु-बिछाली मे उत्पन्न नरसुअरो की सख्या

नर सुअरो की सख्या	नर सुअरो की निर्दिष्ट सख्या वाली पशु बिछालियो की सख्या
0	2
1	20
2	41
3	35
4	14
5	4
योग	116

आकड ए० एस० पाक्स, "स्टडोज आन दि सैक्स-रेशो एण्ड रिलेटिड फिनोमिना। दि फीक्वेंसीज ऑफ सैक्स कौम्बीनेशन्स इन पिग लिटर्ज", बायोमीट्रिका, खण्ड 15, पृष्ठ 373—381 से। पाक्स $p=0\ 4876$ का प्रयोग करके जैसा 4 से 12 सुअरो की बिछालियो के लिए निर्धारित है, उसी श्रणी पर एक द्विपद आसजित करता है।

सारणी 23 8

पाँच की बिछालियो मे उत्पन्न नर सुअरो की सख्या के बटन पर आसजित किया गया द्विपद $k(q+p)^5$

$(k=116,\ q=0\ 5121,\ p=0\ 4879\quad N=5)$

नर सुअरों की सख्या (p की घात) (1)	ग्रजक लघु (2)	लघु k (2)	लघु C (4)	q की निर्दिष्ट शक्ति या घात का लघु (5)	p की निर्दिष्ट* शक्ति या घात का लघु (6)	योगा का Σ [(3)] + (4) + (5) + (6)] (7)	प्रत्याशित वारवारताएँ $k=116$ [(7) का प्रति लघु] (8)
0	$k.\ Co.\ q^5.\ p^0=(116)\ (1)\ (0.5121)^5(0.4879)^0$	2 064458	...	48 546775 − 50	. .	0 611233	4 1
1	$k.\ C_1.\ q^4.\ p^1=(116)\ (5)\ (0.5121)^4(0.4879)^1$	2 064458	0 698970	38 837420 − 40	9 688331 − 10	1 289179	19 5
2	$k.\ C_2.\ q^3.\ p^2=(116)\ (10)\ (0.5121)^3(0.4879)^2$	2 064458	1 000000	29 128065 − 30	19 376662 − 20	1 569185	37 1
3	$k\ C_3.\ q^2\ p^3=(116)\ (10)\ (0.5121)^2(0\ 4879)^3$	2 064458	1.000000	19 418710 − 20	29 064993 − 30	1 548161	35 3
4	$k.\ C_4.\ q^1\ p^4=(116)\ (5)\ (0\ 5121)^1(0.4879)^4$	2 064458	0.698970	9 709355 − 10	38 753324 − 40	1 226107	16 8
5	$k\ C_5\ q^0\ p^5=(116)\ (1)\ (0\ 5121)^0(0\ 4879)^5$	2 064458	...		48 441655 − 50	0 506113	3 2
योग	. ...	...	..	...	...	...	116 0

* Co, C_1, आदि द्विपद गुणाक है, द्विपद प्रसार के प्रत्येक पद के लिए गुणाक।

$$Co=1,\ C_1=N,\ C_2=\frac{N(N-1)}{1.2},\quad C_3=\frac{N(N-1)(N-2)}{1\ 2\ 3}$$, आदि।

सारणी 23.7, पाँच सुअरों वाली विद्यालियों में उपस्थित नर सुअरों की संख्या के बटन को प्रदर्शित करती है। आँकड़े ऐसी 116 विद्यालियों के है, अत $N=5$ तथा $k=116$ सब मिलाकर $5 \times 116 = 580$ सुअर और सुअरियाँ है और $(0 \times 2)+(1 \times 20)+(2 \times 41)+(3 \times 35)+(4 \times 14)+(5 \times 4)=283$ नर सुअर हैं। अतः नर सुअरों का अनुपात p है

$$\frac{283}{580} = 0.4879$$

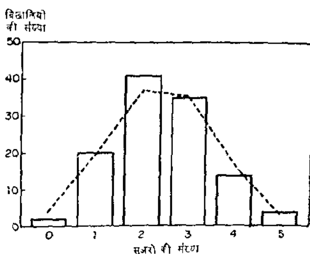
तथा $q = 0.5121$.

जैसा ऊपर सकेत किया जा चुका है, आसंजित करने का कार्य $k(q+p)^N$ के प्रसार से सम्पन्न हो जाता है। N के स्थान पर 5 को प्रतिस्थापित करने से, किन्तु अन्य सकेत-चिह्नों को यथावत रख कर हम प्राप्त करते है

$$k(q+p)^5 = k(q^5 + 5q^4p + 10q^3p^2 + 10q^2p^3 + 5qp^4 + p^5)$$

जहाँ p की घात 5 वाली विद्यालियों में उत्पन्न सुअरों की संख्या को निर्दिष्ट करती है।

द्विपद का आसंजित करने में प्रयोग किया जाने वाला प्राविक व्यञ्जक है $(0.5121 + 0.4879)^5$, और क्योंकि $k=116$ अत हमें $116(0.5121+0.4879)^5$ का प्रसार करना चाहिए। यह



चार्ट 23.12 पाँच की विद्यालियों में उत्पन्न सुअरों की संख्या के बटन पर आसंजित द्विपद। आधार सारणी 23.7 और 23.8 है।

$$116[(0.5121)^5 + 5(0.5121)^4(0.4879) + 10(0.5121)^3(0.4879)^2 + 10(0.5121)^2(0.4879)^3 + 5(0.5121)(0.4879)^4 + (0.4879)^5]$$

हो जाता है। जैसा सारणी 23.8 में दिखाया गया है, लघुगणकों की सहायता से परिकलन अत्यन्त सुगमतापूर्वक किए जा सकते है। यद्यपि इस समस्या के लिए परिकलन यन्त्र के प्रयोग

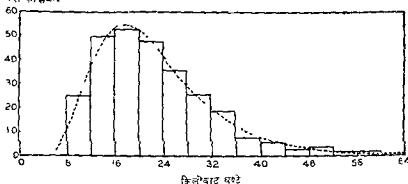
द्वारा घाते प्राप्त की जा सकती है और गुणन किये जा सकते हैं, तथापि जब द्विपद को पर्याप्त मात्रा मे उन्नत किया जाए तब लघुगणकों का प्रयोग आवश्यक हो जाता है।

चार्ट 23 12 प्रेक्षित और प्रत्याशित वारवारताओं को प्रदर्शित करता है। प्रेक्षित आँकडे पृथक्कृत दण्डिकाओं की सहायता से प्रस्तुत किए गए है जिससे श्रेणी की असतत प्रकृति सूचित की जा सके। "आसजन की उत्तमता" की परीक्षा, जैसी अध्याय 25 मे वर्णित की गई है, प्रेक्षित और प्रत्याशित वारवारताओं मे पर्याप्त सगति को निर्दिष्ट करती है।

यह अभिकल्पित नही किया जाना चाहिए कि अभी व्याख्यात विधि से सभी असतत श्रेणियो को आसजित किया जा सकता है। कुछ आँकडे अन्य बटनों से अच्छी प्रकार चित्रित किए जा सकते है. उदाहरण के लिए पोयशन बटन, जिसके आसजन की विधि लेखकों मे से एक ने अन्यत्र वर्णित की है।[5]

विषमित वक्र

जिन द्विपदो पर अभी-अभी विचार-विमर्श किया गया है, वे असतत आँकड़ो पर आसजन के लिए उपयुक्त है किन्तु सतत आँकडो के साथ प्रयोग करने के लिए वे पर्याप्त परिशुद्ध नही है। आसजित द्विपद मे X- अक्ष के निर्दिष्ट बिन्दुओं पर खडी की गई कोटियो की श्रेणी होती है (देखिए चार्ट 23 12)। यदि इस प्रविधि को सतत आँकडो (या असतत आँकडो जहाँ X-इकाइयाँ वर्ग-अन्तराल की अपेक्षा छोटी हो) के बटन पर लागू किया जाये तो हम एक निष्कोण वक्र के अन्तगत क्षेत्र-निर्धारण की अपेक्षा प्रत्येक वर्ग के मध्य-मान पर एक कोटि खडी कर रहे होंगे। स्पष्ट ही, वर्गों की सख्या जितनी ही अधिक होगी,



चार्ट 23 13 एक पूर्वी नगर मे मध्यम श्रेणी के 282 घरो मे प्रत्येक मास उपयोग में लाई गई बिजली के किलोवाट घटो पर आसजित लघुगणकीय प्रसामान्य वक्र।
सारणी 23 9 के आकडो पर आधारित।

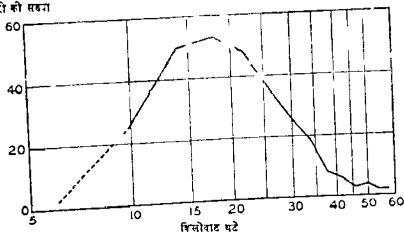
दोनो प्रविधियो मे अन्तर उतना ही कम होगा।

वारवारता बटनों पर आसजित किए जा सकने वाले बहुत अधिक प्रकार के विषमित वक्र है। इस ग्रथ का उद्देश्य इस विषय पर बढा-चढा कर विचार करना नही है, वरन्

5. टिप्पणी 3 म सकेत देखिए।

दो सरलतर प्रकार के वक्रों को ग्रासजित करने से सम्बद्ध प्रविधि को संक्षेप में प्रस्तुत करना मात्र है।[6]

लघुगणकीय प्रसामान्य वक्र—कुछ बंटन जो दाहिनी ओर को झुके हुए है, अपने X मानों के लघुगणकों के सम्बन्ध में आलेखित करने पर अथवा विकल्प रूप से, लघुगणकीय X-पैमाने वाले वर्गांकित कागज पर आलेखित करने से, सममित हो जाते हैं। चार्ट 23.13 का स्तम्भ-चित्र सारणी 23.9 के आंकड़ों पर आधारित एक पूर्वी नगर में 282 मध्यम श्रेणी के घरों द्वारा मासिक खर्च की गई बिजली को प्रदर्शित करता है। यह स्पष्ट है कि श्रेणी निश्चित रूप से धनात्मक दिशा में झुकी हुई है। चार्ट 23.14 में ये आंकड़े पुनः



चार्ट 23.14 एक पूर्वी नगर में 282 मध्यम श्रेणी के घरों में उपयोग में लाई गई बिजली के किलोवाट घंटे। लघुगणकीय X पैमाना। आंकड़े सारणी 23.9 से। बारंबारताएं वर्गों के लघुगणकीय मध्यमानों पर आलेखित हैं।

आलेखित किए गए हैं किन्तु लघुगणकीय Y- पैमाने को लेकर जब वक्र $X=6$ किलोवाट घंटों पर (सारणी में प्रदर्शित प्रथम वर्ग के ठीक नीचे) क्षैतिज अक्ष तक बढ़ा दिया जाता है, तो लघुगणकीय X मानों के सम्बन्ध में श्रेणी की सन्निकट सममित प्रकृति स्पष्ट हो जाती है। इसका और अधिक निर्देश चार्ट 23.15 में किया गया है, जो लघुगणकीय प्रायिकता पत्र पर आलेखित सचयी प्रतिशतता बारंबारताओं को प्रस्तुत करता है।

लघुगणकीय प्रसामान्य वक्र को ग्रासजित करना—लघुगणकीय प्रसामान्य वक्र को ग्रासजित करने की प्रविधि अनिवार्यतः प्रसामान्य वक्र ग्रासजित करने के समान है, केवल इस बात को छोड़ कर कि हम समांतर माध्य $\bar{X}$लघु और X मानों के लघुगणकों के मानक विचलन sलघु का प्रयोग करते हैं। $\bar{X}$लघु और sलघु मानों का परिकलन वर्ग सीमाओं के लघुगणकों के मध्यमानों का उपयोग करते हुए, कर सकते हैं। आदर्श रूप में वर्गों का चयन

6 अधिक विस्तृत विवरण के लिए देखिए डब्ल्यू० पी० ऐल्डरटन, फ्रीक्वैंसी कर्व्ज़ एंड कोरिलेशन (चतुर्थ संस्करण, केम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लन्दन, 1953)।

सारणी 239

एक पूर्वी नगर के मध्यम श्रेणी के घरो मे प्रतिमास उपभुक्त बिजली के किलोवाट घंटे।

किलोवाट घंटे (मध्य-मान)	घरो की सख्या
10	25
14	50
18	53
22	48
26	36
30	26
34	19
38	8
42	6
46	3
50	4
54	2
58	2
योग	282

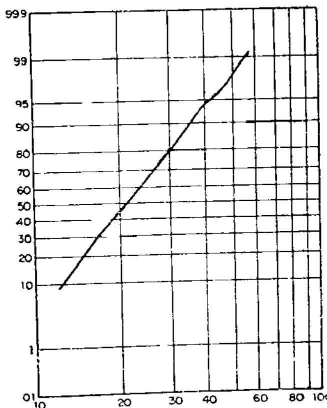
आकड विद्युत परीक्षण प्रयोगशाला, न्यूयार्क नगर से। नगर का नाम अनुरोध पर रोक लिया गया।

इस प्रकार करना चाहिए कि लघुगणकीय दृष्टि से वर्ग-अन्तराल समान हो ताकि इस प्रकार लघुगणकीय मध्य-मानो को एक दूसरे से समान दूरी पर रखा जा सके। प्राय हम अकगणितीय रूप से समान वर्ग अन्तराल वाले तत्काल निर्मित बारबारता बटनो से काम लेते हैं और ऐसे बटनो से $A_{लघु}$ और $\sigma_{लघु}$ का प्रत्यक्ष परिकलन श्रमसाध्य है। इन लघुगणकीय मानो का परिकलन करने की असुविधा को चतुर्थका पर आधारित सूत्रा का प्रयोग करके विलुप्त कर दिया गया है, ये ऐसे आकडे है जो सहज ही परिकलित हो जाते हैं। इसके अतिरिक्त इस प्रविधि के कुछ लाभ है। जब तक आकडे अत्यधिक सतत न हो, इस विधि से अनियमित चरम मदा के बाधक प्रभाव से बचा जाता है। व्यञ्जक नीचे दिए गए हैं।

$$A_{लघु} = \frac{लघु\ Q_1 + लघु\ Q_3 + 1\ 2554\ लघु\ Q_2}{3\ 2554}$$

यह तीन चतुर्थका की भारित औसत है, भार इन मानो पर रचित प्रसामान्य-वक्र कोटिया की ऊँचाइयो के अनुपात मे हैं।

$$\sigma_{लघु} = 0\ 7413(लघु\ Q_3 - लघु\ Q_1).$$



चार्ट 23 15 एक पूर्वी नगर मे 282 मध्यम श्रेणी के घरो मे प्रति मास उपभुक्त बिजली के किलोवाट घण्टे । लघुगणकीय प्रायिकता पत्र पर अकित । सारणी 23 9 के आकड़ो पर आधारित ।

यह व्यञ्जक इस तथ्य के आधार पर विकास करता है कि एक प्रसामान्य वक्र मे 50 प्रतिशत मद माध्यिका (या माध्य) के $\pm Q$ के भीतर सम्मिलित है तथा 50 प्रतिशत मदे माध्य के $\pm 0\ 674s$ के भीतर भी सम्मिलित हैं । अत यह स्पष्ट है कि

$$s = \frac{1}{0\ 6745} Q = 1\ 4825 Q$$

क्योकि

$$\frac{Q_3 - Q_1}{2} = Q$$

परिणामस्वरूप

$$Q_3 - Q_1 = 2Q, \text{ तथा } s = 0\ 7413(Q_3 - Q_1)$$

बिजली के उपभोग के आँकड़ो के लिए, $Q_1 = 15\ 6400$ किलोवाट घंटे, Q_2(माध्यिका) $= 21\ 0833$ किलोवाट घंटे, तथा $Q_3 = 27\ 9444$ किलोवाट घंटे ।

$$\triangle \text{लघ} = \frac{\text{लघ } 15\ 6400 + \text{लघ } 27\ 9444 + 1\ 2554 \text{ लघु } 21\ 0833}{3\ 2554}$$

$$= \frac{1\ 194237 + 1\ 446295 + 1\ 2554(1\ 323939)}{3\ 2554}$$

$$= \frac{4\ 302605}{3\ 2554} = 1\ 321682$$

$$s\text{लघ} = 0\ 7413(\text{लघु } 27\ 9444 - \text{लघु} 15\ 6400)$$

$$= 0\ 7413(1\ 446295 - 1\ 194237)$$

$$= 0\ 7413(0\ 252058)$$

$$= 0\ 186851$$

इन दो मानों का प्रयोग करके प्रत्येक वर्ग मे प्रत्याशित बारम्बारताएँ प्रसामान्य वक्र के लिए पहले वर्णित विधि के बिल्कुल समानान्तर ढग से निर्धारित की जा सकती हैं। पहले के समान परिशिष्ट ङ का प्रयोग हुआ है और प्रविधि सारणी 23 10 मे प्रस्तुत की गई है।

कोटियों के परिकलन के लिए व्यजक है[7]

$$Y = \frac{0\ 4343Ni}{2\ 5066\ Ys\text{लघु}}\ 2\ 71828^{\frac{-x\ \text{लघु}}{2s^2\text{लघु}}}$$

जो परिकलन के प्रयोजन से इस प्रकार सरल किया जा सकता है

$$Y = \frac{0\ 17326Ni}{Xs\text{लघ}}\ 2\ 71828^{\frac{-x^2\text{लघु}}{2s\ \text{लघ}}}$$

X X अक्ष पर उस बिन्दु का अकगणितीय मान है जिस पर कोटि खडी करनी है। $2\ 71828^{\frac{-x\ \text{लघ}}{2s\ \text{लघु}}}$ के मान परिशिष्ट घ से प्राप्त किए गए हैं और $\frac{x\text{लघु}}{s\text{लघ}}$ मान निम्न

7 स्मरण कीजिए कि प्रसामान्य वक्र के लिए व्यजक

$$Y = \frac{Ni}{2\ 5066s}\ 2\ 71828^{\frac{x^2}{2s^2}}$$

है लघुगणकीय प्रसामान्य वक्र को आसजित करने के लिए व्यजक का प्रयोग इस रूप मे नहीं किया जा सकता क्योंकि s लघगणकों (sलघ) के पदों मे है जबकि वर्ग अन्तराल i अकगणितीय रूप से बराबर हैं। अत हम i को समजन गणक $\frac{\text{लघ}_{\ 0}\ e}{X}$ अथवा $\frac{0\ 4343}{X}$ से गुणा करते हैं ताकि इस तथ्य की क्षतिपूर्ति की जा सके कि अन्तराल रेखागणितीय रूप मे बराबर नहीं हैं। इस प्रकार हमारे पास है

$$Y_c = \frac{0\ 4343}{X}\quad \frac{Ni}{2\ 5066s\text{लघ}}\ 2\ 71828^{\frac{-x^2\text{लघ}}{2s^2\text{लघ}}}$$

सारणी 23.10

एक पूर्वी नगर मे 282 मध्यम श्रेणी के घरो में प्रति मास उपभुक्त बिजली के किलोवाट घण्टों के आंकड़ों पर आसंजित लघुगणकीय प्रसामान्य वक्र के लिए प्रत्याशित बारंबारताओ का निर्धारण

($\bar{X}_{लघु} = 1.321182$; $s_{लघु} = 0.186851$)

उपभुक्त बिजली के किलोवाट घण्टे (1)	वर्गों की सीमाओं का लघुगणक: निम्नतर सीमाएँ (2)	उच्चतर सीमाएँ (3)	लघु ($-\bar{X}_{लघु}$ सीमा का लघु) (4)	$\frac{x_{लघु}}{s_{लघु}}$ (5)	संचयी आनुपातिक बारंबारताएँ (परिशिष्ट ड) (6)	आनुपातिक बारंबारताएँ (7)	प्रत्याशित बारंबारताएँ $N = 282$ (8)
					0.5000		
4 से कम						0.0001	.
	0.602060		0.719622	3.85	0.4999		
4 किन्तु 8 से कम						0.0124	3.5
	0.903090		0.418592	2.24	0.4875		
8 किन्तु 12 से कम						0.0843	23.8
	1.079181		0.242501	1.30	0.4032		
12 किन्तु 16 से कम						0.1675	47.2
	1.204120		0.117562	0.63	0.2357		
16 किन्तु 20 से कम						0.1919	54.1
	1.301030		0.020652	0.11	0.1438		
20 किन्तु 24 से कम						0.1655	46.7
		1.380211	0.058529	0.31	0.1217		
24 किन्तु 28 से कम						0.1269	35.8
		1.447158	0.125476	0.67	0.2486		
28 किन्तु 32 से कम						0.0879	24.8
		1.505150	0.183468	0.98	0.3365		
32 किन्तु 36 से कम						0.0597	16.8
		1.556303	0.234621	1.26	0.3962		
36 किन्तु 40 से कम						0.0370	10.4
		1.602060	0.280378	1.50	0.4332		
40 किन्तु 44 से कम						0.0241	6.8
		1.643453	0.321771	1.72	0.4573		
44 किन्तु 48 से कम						0.0153	4.3
		1.681241	0,359559	1.92	0.4726		
48 किन्तु 52 से कम						0.0100	2.8
		1.716003	0.394321	2.11	0.4826		
52 किन्तु 56 से कम						0.0061	1.7
		1.748188	0.426506	2.28	0.4887		
56 किन्तु 60 से कम						0.0040	1.1
		1.778151	0.456469	2.44	0.4927		
60 किन्तु 64 से कम						0.0025	0.7
		1.806180	0.484498	2.59	0.4952		
64 किन्तु 68 से कम						0.0016	0.5
		1.832509	0.510827	2.73	0.4968		
68 या अधिक		.	.	.		0.0032	0.9
					0.5000		
योग	..	...		..	..	1.0000	281.9

द्वारा प्रस्तुत किए गए है

$$\frac{x_{लघु}}{s_{लघु}} = \frac{लघु X - \bar{X}_{लघु}}{s_{लघु}}$$

कोटियो के निर्धारण के लिए प्रविधि प्रसामान्य वक्र के लिए प्रयुक्त प्रविधि के समानान्तर है जो सारणी 23.2 मे प्रदर्शित की गई थी। आसजित वक्र चार्ट 23.13 मे निर्दिष्ट है और उस वक्र तथा स्तम्भ-चित्र मे सगति स्पष्ट है।

डेवीज़ ने विषमता का एक लघुगणकीय गुणाक प्रस्तावित किया है

$$Sk_{लघु} = \frac{लघु\ Q_1 + लघु\ Q_3 - 2\ लघु\ Q_2}{लघु\ Q_3 - लघु\ Q_1}$$

और सकेत किया है कि उस श्रेणी को, जो 0 15 से कम (अथवा कदाचित् 0.20 भी) गुणाक अर्पित करती है, प्रायोगिक या अतरिम रूप से लघुगणकीय दृष्टि से प्रसामान्य माना जा सकता है। फिर भी, यदि कोई विषमित वटन सहज रूप से लघुगणकीय नही है तो कभी-कभी X मानो को तब तक स्थानान्तरित करके इसे समजित किया जा सकता है जब तक वाछित विषमता प्राप्त न हो जाए आसजित करने के बाद X मानो को पुन· स्थानान्तरित कर दिया जाता है। यह सशोधन c निम्न व्यजक से प्राप्त होता है

$$c = \frac{Q_2^2 - Q_1 Q_3}{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}$$

इस मान का योग वर्ग सीमाओ तथा चतुर्थको के साथ कर दिया जाता है। इसके बाद $\bar{X}_{लघु}$ तथा $s_{लघु}$ परिकलित किए जाते है। आसजन प्रक्रिया सारणी 23 10 के समान चलती है, किन्तु स्थानान्तरित वर्ग-सीमाओ का प्रयोग किया जाता है। प्रत्याशित वारवारताओ को जान लेने के बाद वर्ग-सीमाओ को पुन उनके मूल मानो पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है। यह स्पष्ट है कि इस विधि से लघुगणकीय प्रसामान्य वक्र की उपादेयता बढ जाती है।

विषमता के समंजन के साथ प्रसामान्य वक्र को आसंजित करना—प्रसामान्य वक्र के लिए निर्दिष्ट पिछले सूत्रो ने हमे $\bar{X}$, s तथा N के ज्ञान से समभित वक्र को आसजित करने की योग्यता प्रदान की। विषमित वक्र को आसजित करने की एक विधि पर हमने अभी-अभी विचार किया है। एक अन्य प्रविधि मे जो कुछ विषमित वटनो के लिए उपयोगी है, विषमता के माप $\alpha_3 = \sqrt{\beta_1}$ का प्रयोग भी सम्मिलित है और इस प्रकार एक प्रसामान्य वक्र के आसजन मे सशोधन किया गया है। इसे कभी-कभी द्वितीय सन्निकटन वक्र कहा जाता है। समीकरण[8] है

$$Y_c = \frac{Ni}{2.5066s}\ 2.71828^{\frac{-x^2}{2s^2}} - \left\{\frac{Ni}{2.5066s}\ 2.71828^{\frac{-x^2}{2s^2}}\left[\frac{\alpha_3}{2}\left(\frac{x}{s} - \frac{x^3}{3s^3}\right)\right]\right\}.$$

8 व्यजक मे ग्राम चार्लियर श्रेणी के प्रथम दो पद सम्मिलित हैं। अधिक वर्णन के लिए देखिए—डब्ल्यू० ए० श्यूहार्ट, यथा उपरिनिदिष्ट, पृष्ठ 84—94।

सारणी 23.11

रसकाष्ठ की गहराई के लिए λ, s तथा α_3 का परिकलन

गहराई इन्चों में (मध्य-मान)	f	d	fd	$f(d)^2$	$f(d')^3$
1.0	2	−7	−14	98	−686
1.3	29	−6	−174	1,044	−6,264
1.6	62	5	−310	1,550	−7,750
1.9	106	−4	−424	1,696	−6,784
2.2	153	−3	−459	1,377	−4,131
2.5	186	2	−372	744	−1,488
2.8	193	−1	−193	193	−193
3.1	188	0	0	0	0
3.4	151	1	151	151	151
3.7	123	2	246	492	984
4.0	82	3	246	738	2,214
4.3	48	4	192	768	3,072
4.6	27	5	135	675	3,375
4.9	14	6	84	504	3,024
5.2	5	7	35	245	1,715
5.5	1	8	8	64	512
योग	1,370		−849	10,339	−12,249

आँकड़े डब्ल्यू० ए० श्यूहार्ट ईकनॉमिक कन्ट्रोल ऑफ क्वालिटी ऑफ मैनुफैक्चर्ड प्रोडक्ट डा० वान नास्ट्रैंड कम्पनी प्रिंसटन एन० ज०, 1931 पृष्ठ 77 से। डी० वान नॉस्ट्रैंड क० इन्कॉ० के सौजन्य से।

$$\nu_1 = \frac{\Sigma fd}{N} = -0.619708$$

$$\nu_2 = \frac{\Sigma f(d)^2}{N} = 7.546715$$

$$\nu_3 = \frac{\Sigma f(d)^3}{N} = -8.940876$$

$$\bar{X} = \lambda_d + \frac{\Sigma fd'}{N} i = 3.1 - [(0.619708)(0.3)],$$

$= 2.9141$ इन्च।

क्योंकि शेपर्ड के संशोधन को लागू नहीं किया गया, अतः हम पाते हैं

$$\pi_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 7.162677$$

$$\pi_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 4.613422.$$

$s = i\sqrt{\pi_2} = 0.8029$ इन्च

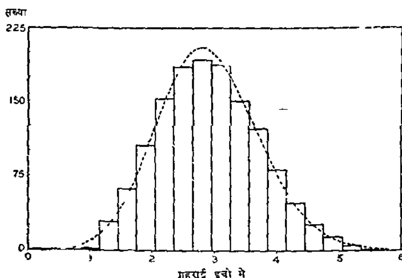
$\alpha_3 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{\pi_3^2}{\pi_2^3}}$, अथवा $\frac{\pi_3}{\sqrt{\pi_2^3}} = +0.2407,$

ऋण-चिह्न से पहले आने वाला व्यजक प्रसामान्य वक्र के लिए है, जबकि धनुकोष्ठको मे व्यजक वैषम्य के लिए सशोधन का प्रतीक है। प्रत्याशित बारम्बारताओ को निर्धारित करने के लिए, उपर्युक्त समीकरण का समाकलन कर लेना चाहिए। सारणियो के प्रयोग से यह कार्य सम्पन्न किया जाता है। इसका प्रयोग करने के लिए, हम लिखते हैं

$$\int_0^x f(x)\,dx = F_1\left(\frac{x}{s}\right) - \alpha_3 F_2\left(\frac{x}{s}\right),$$

जहाँ $F_1\left(\frac{x}{s}\right)$ प्रसामान्य वक्र के क्षेत्रो का प्रतीक है (परिशिष्ट ङ मे निर्दिष्ट) और $\alpha_3 F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ वैषम्य के लिए सशोधन का प्रतीक है। $F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ के मान परिशिष्ट च से प्राप्त किए गए हैं और फिर α_3 से गुणा किए गए हैं।

इस विधि के निदर्शन के लिए हम सारणी 23.11 के आँकड़ो का प्रयोग करते हैं, जो लेखाचित्रीय विधि से चार्ट 23 16 मे दिखाए गए हैं। दूसरे सन्निकटन वक्र के लिए



चार्ट 23 16 रसकाष्ठ की गहराई पर आसंजित द्वितीय सन्निकटन वक्र। सारणी 23 11 के आँकडो पर आधारित।

आसजन प्रविधि[9] सारणी 23 12 मे दिखाई गई है। N, $\bar{X}$, s तथा α_3 के मानो को प्राप्त कर लेने के उपरान्त (सारणी 23 11), निम्न सोपान होगे :

---

9 दूसरी बार के परिकलन में शेपर्ड का सशोधन लागू नही किया गया, आंशिक रूप से तो इसलिए कि चार्ट 23 16 मे बाईं ओर उच्च सम्पर्क विद्यमान नहीं है। इसके अतिरिक्त श्यूहार्ट निर्देश करता है (उपरिनिर्दिष्ट, पृष्ठ 78) कि सशोधित मानक विचलन मे (0 798211) अवर्गित आंकडो के (0 802555) मानक विचलन से असशोधित मानक विचलन (0 802895) की अपेक्षा अधिक अन्तर है। जब बटन के दोनो सिरों पर उच्च सम्पर्क वर्तमान नही होता, तब किसी क्षण का अतिसशोधन अनियत नही होता। यह इसलिए उत्पन्न होता है क्योकि सशोधन अवर्तमान वर्गों के लिए दूरस्थ सीमा तक छूट देते हैं।

सारणी 23.12

द्वितीय सन्निकटन वक्र द्वारा रसकाष्ठ की गहराई के आंकड़ों के लिए प्रत्याशित बारबारताओं का निर्धारण

(λ = 2.9141 इन्च, s = 0.8029 इन्च, α_3 = +0.2407)

इन्चों में गहराई (मध्य-मान) (1)	वर्गों की सीमाएं: निम्नतर सीमाएं (2)	वर्गों की सीमाएं: उच्चतर सीमाएं (3)	x (4)	$\frac{x}{s}$ (5)	$F_1\left(\frac{x}{s}\right)$ (6)	$F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ (7)	$\alpha_3 F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ (8)	$F_1\left(\frac{x}{s}\right)-\alpha_3 F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ [स्तम्भ 6—स्तम्भ 8] (9)	प्रत्याशित आनुपातिक बारबारताएं (10)	प्रत्याशित बारबारताएं N=1,370 (11)
									0.0002	
.4	0.25		2.6641	3.318	0.4995	—0.0692	—0.0167	0.5162	0.0018	2
7	0.55		2.3641	2.944	0.4984	—0.0732	—0.0176	0.5160	0.0067	9
10	0.85		2.0641	2.571	0.4949	—0.0802	—0.0193	0.5142	0.0185	25
13	1.15		1.7641	2.197	0.4860	—0.0893	—0.0215	0.5075	0.0403	55
16	1.45		1.4641	1.824	0.4659	—0,0958	—0.0231	0.4890	0.0723	99
19	1.75		1.1641	1.450	0.4265	—0.0921	—0.0222	0.4487	0.1077	148
22	2.05		0.8641	1.076	0.3590	—0.0724	—0.0174	0.3764	0.1373	188
25	2.35		0.5641	0.703	0.2590	—0.0402	—0,0097	0.2687	0.1493	205
	2.65		0.2641	0.329	0.1289	—0.0103	—0.0025	0.1314	0.1403	192
28		2.95	0.0359	0.045	0.0179	0.0002		0.0179	0.1160	159
31		3.25	0.3359	0.418	0.1621	0.0162	0.0039	0.1582	0.0851	117
34		3.55	0.6359	0.792	0.2858	0.0484	0.0116	0.2742	0.0561	77
37		3.85	1.9359	1.166	0.3782	0.0787	0.0189	0.3593	0.0339	46
40		4.15	1.2359	1.539	0.4381	0.0943	0.0227	0.4154	0.0186	25
43		4.45	1.5359	1.913	0.4721	0.0949	0.0228	0.4493	0.0094	13
46		4.75	1.8359	2.287	0.4889	0.0871	0.0210	0.4679	0.0042	6
49		5.05	2.1359	2.660	0.4961	0.0782	0.0188	0.4773	0.0017	2
52		5.35	2.4359	3.034	0.4988	0.0720	0.0173	0.4815	0.0005	1
55		5.65	2.7359	3.408	0.4997	0.0686	0.0165	0.4832	0.0002	
58		5.95	3.0359	3.781	0.4999	0.0672	0.0162	0.4837	0.0001	
61		6.25	3.3359	4.155*	0.5000	0.0667*	0.0161	0.4839		
64		6.55	3.6359	4.528*	0.5000	0.0666*	0.0160	0.4840		

* परिशिष्ट च में निर्दिष्ट परिसर के आगे $F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ के मानों के लिए निम्न व्यंजक का प्रयोग कीजिए $F_2\left(\frac{x}{s}\right)=\frac{1}{15.036}\left\{1-\left[1-\left(\frac{x}{s}\right)^2\right]2.71828^{\frac{-x^2}{2s^2}}\right.$

$2.71828^{\frac{-x^2}{2s^2}}$ के मान प्रसामान्य वक्र की कोटियों की सारणी (परिशिष्ट घ) से सुगमतापूर्वक पढ़े जा सकते हैं, अथवा कार्ल पियर्सन, टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स एंड बायोमीट्रीशियन्स, पृष्ठ 2—8, केम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लन्दन, 1914 की अधिक विस्तृत सारणी से। बाद वाली सारणी में प्रदर्शित z के मान 2.5066 से गुणा करने पर $2.71828^{\frac{-x^2}{2s^2}}$ प्रदान करते हैं।

1. स्तम्भ (1) से (6) तक में प्रविष्टियाँ भरिए, जैसा प्रसामान्य वक्र आसजित करते समय किया गया था।

2. परिशिष्ट च देखिए तथा स्तम्भ (7) में $F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ मानों को स्तम्भ (5) के प्रत्येक $\frac{x}{s}$ मान से संयुक्त करके भरिए। इस स्तम्भ में ऋणात्मक चिह्न स्तम्भ (2) की वर्ग-सीमाओं के साथ संयुक्त प्रतिशतताओं के लिए अंकित किए जाते हैं।

3 स्तम्भ (8) में, स्तम्भ (7) के प्रत्येक मान को α_3 से गुणा कीजिए। चिह्न निर्दिष्ट हैं।

4. स्तम्भ (9) को प्रस्तुत करने के लिए, स्तम्भ (8) के मान बीजगणित की विधि से स्तम्भ (6) के मानों से घटा दिए जाते हैं।

5 स्तम्भ (9) की सचयी आनुपातिक वारंवारताएँ स्तम्भ (10) में असचयी बना दी जाती हैं, जैसा प्रसामान्य वक्र के लिए किया गया था। परिणामस्वरूप, $N = 1.0000$ के लिए द्वितीय सन्निकटन के आधार पर प्रत्याशित वारंवारताओं को प्रदर्शित करने वाले आंकड़ों की श्रेणी प्राप्त हुई। इस वक्र की एक कमी यह है कि यह कभी-कभी एक छोर पर ऋणात्मक वारंवारताओं को प्रस्तुत कर सकता है, अथवा, यदि हम इन ऋणात्मक वारंवारताओं को प्रस्तुत करने के लिए आसजन को बहुत दूर तक नहीं ले जाते, तो योग 1.0000 से थोड़ा-सा बढ़ सकता है। इस उदाहरण में स्तम्भ (10) का योग 1.0002 है।

6 स्तम्भ (11) में प्रत्याशित वारंवारताओं को वर्गों में यथानुपात बाँटा गया है ताकि प्रतिदर्श के लिए योग N के बराबर हो।

24

साख्यिकीय सार्थकता I : समांतर माध्य

इस अध्याय मे तथा आगामी दो अध्यायो म हम प्रतिदर्शो से परिकलित साख्यिकीय मापो के व्यवहार का अध्ययन करग । यह एक महत्त्वपूर्ण विषय है क्योकि साख्यिकीय कार्यकर्त्ता का लगभग सदव ही उन आकडो से वास्ता पडता है जो प्रतिदर्श होते हैं समष्टि नहीं । सामान्यत यह सम्भव नही होता कि समष्टि म सभी मदो पर विचार किया जाए । उदाहरणाथ सयुक्त राज्य अमरीका मे सभी वयस्क पुरषो की ऊँचाइ के आंकडे प्राप्त करने का प्रयत्न पूर्णरूपेण अव्यावहारिक होगा । यदि इस प्रकार के आकडो की आवश्यकता हो तो यदि उपयुक्त प्रतिदश का अध्ययन किया जाए तो बहुत कम समय तथा धन खच होगा । इसके अतिरिक्त उपयुक्त प्रतिनिधि प्रतिदश के अध्ययन द्वारा सन्तोषजनक परिणामो की आशा की जा सकती ~ जिनकी विश्वसनीयता ठीक ठीक व्यक्त की जा सकती है । तथापि इस पुस्तक मे हम केवल यादृच्छिक प्रतिदर्शो पर विचार कर सक्त हे ।[1]

प्रतिदर्श समातर माध्य कैसे वितरित किये जाते है

समान आकार गुण तथा मेक वाले तथा समान प्रकार की गाडियो म तथा सडक की समान अवस्थाओ म प्रयुक्त हजारो मोटर टायरो मे से प्रत्येक के द्वारा चल गए मीलो के आकडे, 15 200 मील का समातर माध्य (X_θ) और 1,248 मील का मानक विचलन (σ) दिखात है । यदि हम 25 टायरो के यादृच्छिक प्रतिदश का चयन करें, तो हम यादृच्छिक प्रतिदश के समातर माध्य के 15 200 मील के सामान्यत निकट होने की आशा करेंगे । 25 मदा का दूसरा यादृच्छिक प्रतिदश पहले के समान ठीक वैसा ही समातर माध्य प्रदान नही करगा, लेकिन यह भी 15 200 के सामान्यत निकट होना चाहिए । हमारा प्रथम सम्बन्ध यादृच्छिक प्रतिदर्शो के समातर माध्य के व्यवहार से है ! क्योकि हम केवल यादृच्छिक प्रतिदर्शो का अध्ययन करेगे और क्योकि हम गुणोत्तर, हरात्मक, अथवा अन्य माध्यों पर विचार नहीं करग, अत हम यादृच्छिक प्रतिदश के समातर माध्य का उल्लख करने के लिए केवल प्रतिदश माध्य कहेग ।

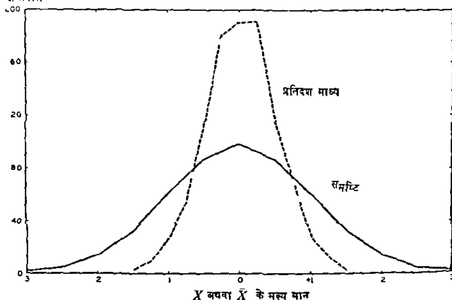
प्रतिदर्श माध्यो का समातर माध्य—यदि अभी-अभी वर्णित टायरो की समष्टि से प्रत्येक म 25 टायरो के हिसाब से अनेक यादृच्छिक प्रतिदश लिए जाएँ तो कुछ प्रतिदश माध्य 15 200 मील से बढ जाएंगे और कुछ 15,200 मील से कम रह जाएँग । एक अथवा बहुत ही कम ठीक 15 200 मील हो सकते है । प्रतिदश माध्यो के समान्तर माध्य की प्रवृत्ति X_θ के समान होन की होगी ।

1 यादृच्छिक प्रतिदश की परिभाषा पृष्ठ 23 पर की गई थी ।

एक अधिक निश्चित उदाहरण पर विचार करें वाल्टर ए० शेह्वार्ट[2] ने 998 मदों की समष्टि का निर्माण किया, जिसमें –3 0 से 3 0 तक के धनात्मक तथा ऋणात्मक मूल्यों का परिसर था, और $\bar{X}_\theta = 0$ था। इस बिन्दु पर यह महत्त्वपूर्ण नहीं है कि समष्टि प्रसामान्य के इतना निकट थी जितना सम्भव था। इस समष्टि से शेह्वार्ट ने 1,000 प्रतिदर्श (k= 1,000) लिए जिनमें से प्रत्येक में 4 मदें ($N=4$) थी। 1 000 प्रतिदर्श माध्यों का समांतर माध्य 0 014 था। यदि अधिक संख्या में प्रतिदर्श माध्य लिये गये होते तो यह विश्वास करना तर्कसंगत है कि प्रतिदर्श माध्यों का समांतर माध्य शून्य के अधिक निकट होता, क्योंकि यह दिखाया जा सकता है कि यदि समष्टि में N आकार के सभी सम्भव प्रतिदर्श(K) लिए जाएं तो प्रतिदर्श माध्यों का समांतर माध्य समष्टि माध्य के बराबर होगा।[3] अर्थात्,

$$\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 + \cdots + \bar{X}_k}{K} = \bar{X}_\theta$$

प्रतिदर्श माध्यों का वैषम्य—यदि प्रतिदर्श माध्य ऐसी समष्टि में है जिसमें वैषम्य नहीं है तो प्रतिदर्श माध्यों का वितरण विषमित नहीं होगा। यदि समष्टि विषमित है तो



चार्ट 24 1 शेह्वार्ट की 998 मदों की प्रसामान्य समष्टि और प्रतिदर्शों के लिए जिनका $N=4$ है, 1,000 प्रतिदर्श माध्यों का बंटन। वर्ग अंतराल समष्टि के लिए 0 50 और प्रतिदर्श माध्यों के लिए 0 25 थे। डब्ल्यू० ए० शेह्वार्ट की *ईकनामिक कन्ट्रोल ऑफ क्वालिटी ऑफ मैनुफैक्चर्ड प्रोडक्ट* डी० वान नास्ट्रैण्ड कम्पनी प्रिस्टन एन० ज०, 1931 पृष्ठ 167, 44?—445 और 454—463 पर आधारित।

---

2 वाल्टर ए० शेह्वार्ट, उपरिनिर्दिष्ट पुस्तक पृष्ठ 167 442—445, और 454—463

3 देखिए परिशिष्ट ध परिच्छेद 24 1

प्रतिदर्श माध्यो का वितरए कम वैपम्य दिखायेगा वैपम्य प्रतिदश के ग्राकार से विपरीत दिशा म सम्बंधित सम्बध के ग्रनुसार होगा, निम्न

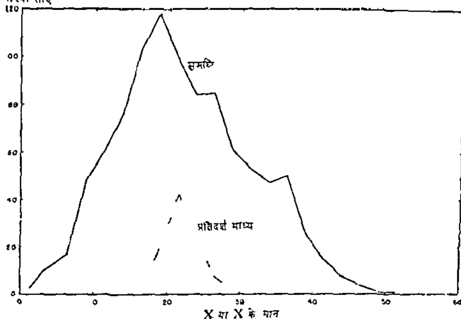
$$\beta_{1\bar{X}} = \frac{\beta_{1\vartheta}}{N}$$

शेव्हाट की 998 मदा की समष्टि म $\beta_{1\vartheta} = 0$ था। 1 000 प्रतिदर्श माध्या का बटन समष्टि के साथ चाट 24 1 म दिखाया गया है। यह देखा जा सकता है कि प्रतिदश माध्या का बटन लगभग सममित है। शव्हाट ने 1 000 प्रतिदश माध्यो के लिए $\beta_{1\bar{X}}$ के मूल्य का परिकलन नही किया लेकिन 0 25 के वग ग्रन्तराला म वारवारता बटन के लिए, जो कि चाट 24 1 म दिखाया गया है $\beta_{1\bar{X}}$ 0 0027 पाया गया है।

चाट 24 2 म प्रत्यक 10 मदा वाले 100 प्रतिदर्शो के समातर माध्य के बटन ग्रौर विपमित समष्टि के बटन को जिमस प्रतिदश लिय गय थे, प्रदर्शित किया गया है। समष्टि के लिए $\beta_{1\vartheta} = 0\ 096$ यदि $N = 10$ के सभी सभव प्रतिदश लिय गए हाते तो प्रतिदश माध्या का वैपम्य होता

$$\beta_{1\bar{X}} = \frac{\beta_{1\vartheta}}{N} = \frac{0\ 096}{10} = 0\ 0096$$

100 प्रतिदर्शो के लिए $\beta_{1\bar{X}} = 0\ 0031$ यह स्पष्ट है कि प्रतिदश माध्यो का वैपम्य समष्टि के वैपम्य से बहुत कम है।



चाट 24 2 972 मदो की विपमित समष्टि ग्रौर प्रतिदर्शो के लिए जिनका $N = 10$ है 100 प्रतिदश माध्यो का बटन। समष्टि 972 श्रमिको की साप्ताहिक मजदूरी से बनी है। दोनो श्रेणियो के लिए वग-अन्तराल 2 50 डालर थे।

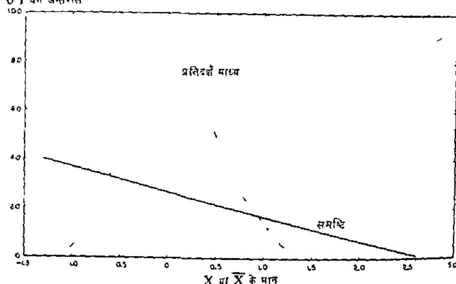
शेह्वार्ट[4] ने ऐसी समष्टि से प्रतिदर्श लिये हैं जो कि चार्ट 24.2 में दिखाई गई समष्टि की अपेक्षा बहुत अधिक विषमित है। उसकी समकोण त्रिभुजाकार समष्टि और 1 000 प्रतिदर्श माध्यो ($N=4$) के बटन चार्ट 24.3 म दिखाये गये हैं। समकोण त्रिभुजाकार समष्टि का वैषम्य $\beta_{1\wp}=0.320$ के द्वारा प्रकट किया गया है। 4 के प्रतिदर्शों के लिए, हम वैषम्य के लगभग निम्न होने की आशा करेंगे।

$$\beta_{1\bar{X}}=\frac{\beta_{1\wp}}{N}=\frac{0\,320}{4}=0\,080$$

1,000 प्रतिदर्श माध्यो के बटन के लिए वैषम्य का परिकलन 0 062 हुआ है। जबकि $\beta_{1\bar{X}}$ का यह मान उनसे अधिक है जो अन्य प्रतिदर्शों के दो समुच्चयो के लिए अभी प्राप्त हुए थे, यह याद रखना चाहिए, कि प्रथम, समष्टि की अपेक्षा वैषम्य बहुत कम है और द्वितीय, इसके समान विषमित समष्टियाँ प्राय प्राप्त नहीं होती।

प्रतिदर्श माध्यो की ककुदता - प्रतिदर्श माध्या के बटन की ककुदता के 3 0 (प्रसामान्य बटन के लिए मूल्य) के निकट होने की अपेक्षा की जा सकती है अपेक्षाकृत उस समष्टि की ककुदता के जिससे प्रतिदर्श लिये गये थे। सम्बन्ध है

$$\beta_{2\bar{X}}-3=\frac{\beta_{2\wp}-3}{N},\ \text{अथवा}\ \beta_{2\bar{X}}=\frac{\beta_{2\wp}-3}{N}+3$$



चार्ट 24 3 शेह्वार्ट की 820 मदों वाली समकोण त्रिभुजाकार समष्टि का, और $N=4$ वाले प्रतिदर्शों के लिए 1,000 प्रतिदर्श माध्यो का बटन। समष्टि के लिए वर्ग-अन्तराल 0 1 और प्रतिदश माध्यो के लिए 0 2 थे। आँकडो क उदगम के लिए पाद-टिप्पणी 4 देखिए।

4. समष्टि के आँकडे टिप्पणी 2 में उल्लिखित पुस्तक के पृष्ठ 183 से लिए गए हैं। प्रतिदर्श माध्यो के आँकडे डा० वाल्टर ए० शेह्वार्ट से पत्रव्यवहार द्वारा प्राप्त किए गए थे। सब विषमता तथा ककुदता मानो का (उन मानो को छोडकर जो प्रसामान्य समष्टि के लिए थे) परिकलन लेखकों द्वारा किया गया था।

शेह्वाट का प्रसामा य समष्टि के लिए $\beta_{2\beta}$ का मूल्य 3 0 था और प्रतिदश माध्यो क वटन की (चाट 24 1) = 3 0 होने की प्राशा होगा। शेह्वाट के 1 000 प्रतिदश माध्या के लिए β =) था।

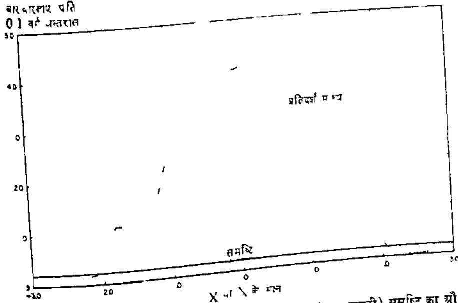
शह्वाट न ग्रायताकार समष्टि का भी निर्माण किया जा चाट 24 4A म दिखाई गइ है जा ग्रत्यधिक चपट ... जिसम β 1 80 इस समष्टि से उसने 1 000 प्रतिदश माध्या (N=4) ... जिनका बटन भी चाट 24 A म दिया गया है। यह वक्र एसा प्रतात होना ... हो। इन प्रतिदश माध्यो की ककुदता ग्रपक्षित है

$$\frac{\beta}{4} - 3 \quad \frac{1\ 80}{4} + 3$$

$$= 70$$

1,000 प्रति ...)

शह्वाट न ... किया ... ग्रल्फ्रड ज० काना ... निर्माण किया जा कि चाट 24 4B म ... प्रकार ... 00 ...



चाट 24 4A शह्वाट की 122 मदोवाली आयताकार (चपट ककुदी) समष्टि का और $N=4$ वाल प्रतिदर्शो के लिए 1 000 प्रतिदश माध्यो का बटन। समष्टि के लिए वग अन्तराल 0 1 और प्रतिदश माध्यो क लिए 0 3 थ। आकडा क उदगम के लिए पाद टिप्पणी 4 देखिए।

दिखाई गई है। इस समष्टि से काना ने 400 प्रतिदश माध्य (N—5) प्राप्त किय जिनका बटन भी चाट 24 4B म प्रकट हुआ है। समष्टि की ककुदता $\beta_{2\beta}=7\ 927$ थी। प्रत्यक पाच मदो के प्रतिदर्शो का चुनाव करन पर

5 देखिए पाद टिप्पणी 4।

$$\beta_{2\bar{X}} = \frac{\beta_{2}\mathscr{g}-3}{N}+3 = \frac{7.927-3}{5}+3 = 3.985$$

प्राप्त करने की अपेक्षा की जा सकती है। केवल 400 प्रतिदर्श दिए गये थे, लेकिन प्रतिदर्शों के इस वर्ग के लिए पाया गया कि $\beta_{2\bar{X}}=4.190$, यह मूल्य $\beta_{2}\mathscr{g}$ के मूल्य की अपेक्षा 3.0 के अधिक निकट है।

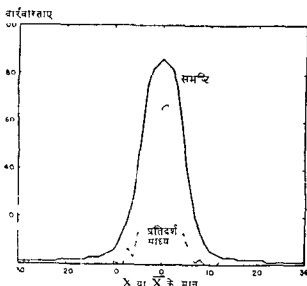
प्रतिदर्श माध्य और प्रसामान्य वक्र— जो कुछ कहा गया है उससे स्पष्ट है कि प्रतिदर्श माध्यों का बटन प्रसामान्य है जब उन माध्यों का परिकलन प्रसामान्य समष्टि के यादृच्छिक प्रतिदर्शों से किया गया है। यदि समष्टि विषमित है तो उस समष्टि से लिए प्रतिदर्श माध्यों में विद्यमान वैषम्य बहुत कम होगा, क्योंकि वैषम्य प्रतिदर्श के आकार से प्रतिलोम विधि में सम्बन्धित है जैसाकि

$$\beta_{1\bar{X}} = \frac{\beta_{1}\mathscr{g}}{N}$$

के द्वारा प्रकट हुआ है। यदि समष्टि तुंग ककुदी अथवा चर्पट ककुदी है तो उस समष्टि में लिये गये प्रतिदर्श माध्यों का बटन मध्य ककुदी के अधिक निकट होगा, जैसा कि

$$\beta_{2\bar{X}} = \frac{\beta_{2}\mathscr{g}-3}{N}+3$$

के द्वारा दिखाया गया है।

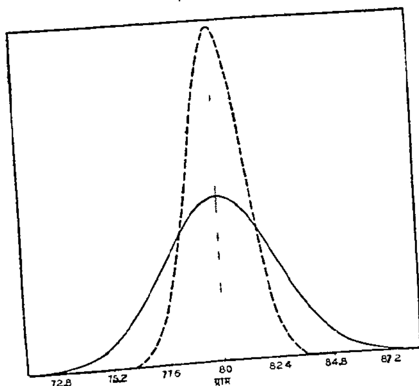


चार्ट 24.4B काना की 1,000 मदों वाली तुंग-ककुदी समष्टि का और $N=5$ वाले प्रतिदर्शों के लिए 400 प्रतिदर्श माध्यों का बटन। दोनों श्रेणियों के लिए वर्ग अन्तराल 1.0 थे। पुस्तक में दिये ककुदता मानों का परिकलन दोनों श्रेणियों के लिए अवर्गित आंकड़ों से किया गया था। आंकड़े अल्फ्रेड ज० काना से।

इन दो सम्ब धो के परिणामस्वरूप सांख्यिकीविद प्रतिदर्श माध्यों को सामा यत वितरित मानत है यदि यह विश्वास करने के लिए कारण न हो कि जिस समष्टि से वे लिए गय है वह प्रसामा य से पर्याप्त भिन्न है।

प्रतिदश माध्यो का विक्षपण पूव अकित चारों चार्टों म से किसी पर दृष्टि डालने से पता चलगा कि प्रतिदश माध्यो का वि क्षपण उस समष्टि के विक्षपण की अपेक्षा बहुत कम है जिससे वे प्रतिदश माध्य प्राप्त थ सम्ब ध है

$$\sigma \quad \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$



चाट 24 5 N–25 के लिए प्रतिदश समातर माध्यो का बटन जब X_{β} 80 ग्राम और $\sigma = 12$ ग्राम (ठोस वक्र) और जब X_{β} 80 ग्राम और σ 6 ग्राम (खडित वक्र)।

चाट 24 1 के समष्टि आकडो के लिए हमारे पास $\sigma = 1\ 0070$ और N 4 है। परिणामत

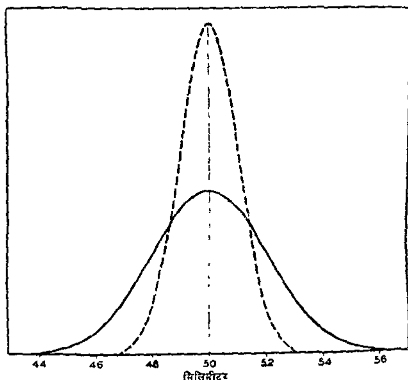
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1\ 0072}{\sqrt{4}} \quad 0\ 5035$$

6 देखिए परिशिष्ट ध परि छेद 24 2 ध्यान द जसे कि प्रमाण में दिखाया गया है ऊपर प्रयोग किया गया व्यजक म य नहीं है जब तक कि N के सम्बन्ध में समष्टि बडी नहीं है।

1,000 प्रतिदर्श माध्यो के लिए, मानक विचलन का परिकलन निम्न व्यजक के प्रयोग द्वारा किया जा सकता है

$$\sqrt{\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_{\S})^2+(\bar{X}_2-\bar{X}_{\S})^2+\ldots(\bar{X}_{1,000}-\bar{X}_{\S})^2}{1,000}}.$$

प्रतिदर्श माध्या के बारबारता-बटन के लिए मानक विचलन का मूल्य चार्ट, 24.1 मे, 0 503 दिखाया गया है, जो 0 5035 के मूल्य के बहुत निकट है, जो तब प्राप्त होता यदि हम $N=4$ के सभी सभव प्रतिदर्शो पर विचार कर पाते ।



चार्ट 24 6 $\bar{X}_{\S}=50$ **मिमी और** $\sigma=8$ **मिमी के लिए प्रतिदर्श समातर माध्यो का बटन, जब** $N=16$ **(ठोस वक्र) और जब** $N=64$ **(खडित वक्र) ।**

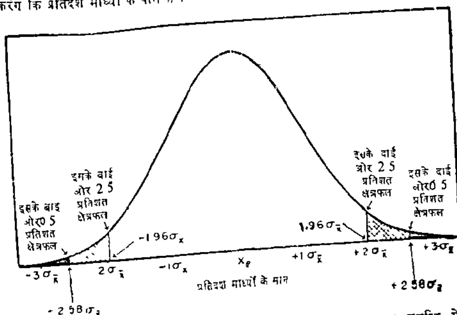
व्यजक

$$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

से यह स्पष्ट है कि (1) जितना अधिक समष्टि का विक्षेपण होगा, उस समष्टि मे लिए गये प्रतिदर्श माध्यो का विक्षेपण भी उतना ही अधिक होगा, और (2) जितना ही प्रतिदर्शो का आकार बडा होगा उसी मात्रा मे प्रतिदर्श माध्यो का विक्षेपण कम होगा । ये बिन्दु चार्ट 24 5 मे प्रदर्शित है, जो σ के दो भिन्न मूल्यो के लिए प्रतिदर्श माध्यो के बटन दिखाते है जब N बदला नही गया है, और चार्ट 24 6 मे, जो एक ही समष्टि से दो प्रतिदर्श आकारो के लिए प्रतिदश माध्यो के बटनो को दिखाता है ।

जब X_p और σ ज्ञात हो तो $\bar{X}$ और X_p के बीच अन्तर की सार्थकता

$\bar{X}$ और X_p के बीच अन्तर जो सार्थक नहीं है टायरों की मील दूरी के आकडों पर विचार कीजिए, जिसका उल्लेख पहले हुआ है जिसके लिए $X_p = 15\,200$ मील और $\sigma = 1,248$ मील । यदि 100 टायरों के यादृच्छिक प्रतिदर्श लिए जाते है तो हम अपेक्षा करेंगे कि प्रतिदर्श माध्यों के पास है ।



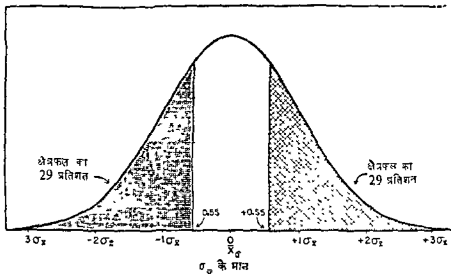
चार्ट 24 7 0 05 और 0 01 स्तरो को दिखाने वाली, प्रसामान्य समष्टि से, प्रतिदर्श समातर माध्यो का प्रत्याशित बटन ।

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{1,248}{\sqrt{100}} = 124\ 8 \text{ मील ।}$$

परिणामत , प्रतिदर्श माध्यो का चार्ट 24 7 के अनुसार बटन होगा । इस चार्ट मे विशेष ध्यान $\pm 1\ 96\sigma_{\bar{x}}$ और $\pm 2\ 58\sigma_{\bar{x}}$ के विचलनो की ओर दिया गया है । जैसा कि चार्ट मे देखा जा सकता है, $\pm 1\ 96\sigma_{\bar{x}}$ वक्र के 5 प्रतिशत क्षेत्रफल को सिरे के दो भागो मे काट देता है, जबकि $\pm 2\ 58\sigma_{\bar{x}}$ वक्र के 1 प्रतिशत क्षेत्रफल को सिरे के दो भागो मे काटता है । ये प्रतिशतताएँ प्रसामान्य वक्र के क्षेत्रफल की सारणी (परिशिष्ट ड) से जिसका प्रयोग हमने गत अध्याय मे किया, अथवा अधिक तत्परता से, परिशिष्ट ज से, जो प्रसामान्य वक्र के दो सिरे के भागों म क्षेत्रफल को दिखाता है, प्राप्त की जा सकती हैं। चार्ट 24 7 मे दिखाये गये दो विचलन वे हैं जो प्रसामान्य वक्र के लिए 0 05 स्तर और 0 01 स्तर प्रकट करते है । सार्थकता परीक्षण मे 0 05 और 0 01 स्तरों का प्रयोग प्राय होता है, यद्यपि अन्य स्तर-उदाहरणार्थ 0 001, 0 005, 0 02 तथा 0 025, का भी प्रयोग होता है ।

100 मदो का एक प्रतिदर्श मे, एक कथित यादृच्छिक प्रतिदर्श और जो कल्पित रूप मे गत अनुच्छेद मे उल्लिखित समष्टि से लिया गया $\bar{X} = 15,769$ मील पाया गया । हम यह पता लगाना चाहते हे कि क्या यह विश्वास करना तर्कसंगत होगा कि यह प्रतिदर्श माध्य

उस समष्टि में जिसमें $X_{\wp} = 15,200$ मील और $\sigma = 1248$ मील है, यादृच्छिक प्रतिदर्श का समान्तर माध्य है। $\bar{X}$ और $\bar{X}_{\wp}$ के बीच का अन्तर 69 मील है। प्रसामान्य वक्र का उल्लेख करने में सक्षम होने के लिए हम इस अन्तर को $\sigma_{\bar{X}}$ के रूप में प्रकट करते हैं जो कि पहले ही 124 8 मील निश्चित किया गया है। इसलिए,



चार्ट 24 8 प्रतिदर्श माध्यों का प्रत्याशित बंटन और प्रतिदर्श माध्यों की प्राप्ति के अवसर जो $\pm 0\ 55\sigma_{\bar{X}}$ अथवा अधिक के द्वारा $X_{\wp}$ से भिन्न हैं।

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{\bar{X} - \bar{X}_{\wp}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{15\ 269 - 15,200}{124\ 8} = \frac{69}{124\ 8} - 0\ 55$$

चार्ट 24 8 के संकेत में, हम प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल (क्रॉस रेखित भाग) को देख सकते हैं जो $+0\ 55\sigma_{\bar{X}}$ के विचलन द्वारा कटा हुआ है। परिशिष्ट छ से, जो प्रसामान्य वक्र के एक सिरे के क्षेत्रफल को प्रकट करता है, यह क्रॉस रेखित भाग 29 प्रतिशत क्षेत्रफल को वक्र के अन्तर्गत सम्मिलित करते हुए पाया जाता है। क्योंकि हम जानते है कि प्रतिदर्श माध्य $X_{\wp}$ से बढ़ते भी है और घटते भी हैं, अतः हम $-0\ 55\sigma_{\bar{X}}$ के द्वारा कटे हुए प्रसामान्य वक्र के पिछले भाग पर भी विचार करते है जो चार्ट 24 8 में बिन्दुचित्रित भाग है। यह पिछला भाग भी वक्र के अन्तर्गत 29 प्रतिशत क्षेत्रफल को सम्मिलित करता है और दोनों पिछले भाग मिलकर 58 प्रतिशत ($P-0\ 58$) क्षेत्रफल को वक्र के अन्तर्गत सम्मिलित करते है। इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि क्योंकि यादृच्छिक प्रतिदर्श ग्रहण करने की क्रिया से $\pm 0\ 55\sigma_{\bar{X}}$ का अन्तर प्राय प्रकट हो सकता है, अतः यह विचार करने के लिए पर्याप्त आधार नहीं है कि प्रतिदर्श माध्य विचाराधीन समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य नहीं था।

उपर्युक्त विवेचन इस परिकल्पना पर आधारित है कि प्रतिदर्श माध्य उस समष्टि से, जिसके $X_{\wp} = 15,200$ मील और $\sigma = 1,248$ मील हैं, यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है। इस परिकल्पना का उल्लेख "निराकरणीय परिकल्पना" के नाम से होता है क्योंकि

यह $\bar{X}$ और μ_g के बीच अन्तर रहित परिकल्पना है। अगला पग सार्थकता अनुपात $\frac{x}{\sigma}$ के परिकलन द्वारा परिकल्पना के परीक्षण और विचलन प्राप्त करने की सम्भावना के निर्धारण का है जो कि यादृच्छिक प्रतिदर्श के परिणामस्वरूप प्रेक्षित के समान अथवा उससे बड़ा हो। हमारे परीक्षण में परिकल्पना पर सन्देह अधिक (यदि P छोटा है) अथवा सन्देह कम (यदि P बड़ा है) रहेगा। क्योंकि P 0.55 पाया गया अतः हमारी परिकल्पना का खण्डन नहीं हुआ।

ध्यान दें कि हमने परिकल्पना सिद्ध नहीं की। सांख्यिकीय दृष्टि से, परिकल्पना कभी भी 'सिद्ध' अथवा खण्डित नहीं हो सकती। निरन्तर परीक्षण द्वारा, जिनमें सदैव सतत अन्तर मिलते हैं, अथवा उनका अभाव होता है, एक शोधकर्त्ता परिकल्पना को अन्ततोगत्वा असत्य अथवा मान्य समझ सकता है। तथापि सांख्यिकीय परीक्षण, किसी परिकल्पना पर केवल अधिक अथवा कम सन्देह प्रकट कर सकते हैं और इस प्रकार परिकल्पना की साख स्थापित कर सकते हैं अथवा गिरा सकते हैं।

$\bar{X}$ और μ_g के बीच अन्तर जो सार्थक है— 100 टायरों के अन्य प्रतिदर्श पर विचार कीजिए जिसका $\bar{X}$ = 14 738 मील है। इस परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए कि यह माध्य यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है जो उस समष्टि से लिया गया है जिसमें $\bar{X}_g$=15 200 मील और σ = 1 248 मील है हम परिकलन करते हैं

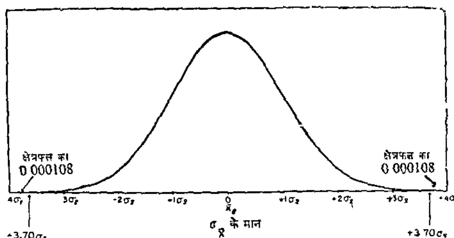
$$\frac{x}{\sigma}=\frac{X-\bar{X}_g}{\sigma_{\bar{X}}}=\frac{14\ 738-15\ 200}{124\ 8}=\frac{462}{124\ 8}=3\ 70$$

परिशिष्ट ज के संकेत से, जो प्रसामान्य वक्र के दो पिछले भागों के क्षेत्रफल प्रकट करता है, हम देखते हैं कि P 0 000216। यह चार्ट 24 9 में चित्रित किया गया है। क्योंकि यादृच्छिक प्रतिदर्श के परिणामस्वरूप प्रेक्षित अन्तर के बहुत कम अवसरों पर प्रकट होने की अपेक्षा की जा सकती थी, अतः निराकरणीय परिकल्पना मान्य नहीं है। विचाराधीन समष्टि से प्रतिदर्श माध्य अयादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य हो सकता है, यह अन्य समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य हो सकता है, अथवा किसी अन्य समष्टि से यह अयादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य हो सकता है। किसी भी दशा में यह घोषणा करने में हम न्यायोचित होने का अनुभव कर सकते हैं (अर्थात् यह एकदम असम्भव होगा) कि यह μ_g=15 200 मील और σ=1,248 मील वाली समष्टि में यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य नहीं है।

हमने जो दो परीक्षण किये वे दोनों ही दो पिछले सिरा (अथवा दो भुजा) वाले परीक्षण थे, क्योंकि हमने निराकरणीय परिकल्पना को अविश्वसनीय बनाने वाले धनात्मक अथवा ऋणात्मक अन्तर पर विचार किया। कभी कभी, जैसाकि हम इस पुस्तक के आगामी भागों में देखेंगे, धनात्मक अपसरण परिकल्पना को अविश्वसनीय बना सकता है, जब कि ऋणात्मक अन्तर ऐसा नहीं करेगा, इस अवस्था में, हमें उपयुक्त वक्र के दाहिने पिछले भाग के क्षेत्रफल पर ही केवल विचार करना चाहिए। जब ऋणात्मक अन्तर परिकल्पना को अविश्वसनीय बनाने लगता है, लेकिन धनात्मक अन्तर ऐसा नहीं करता तब हम वक्र के

बायीं ओर के पिछले सिरे के क्षेत्रफल को विचार म लेंगे ।[7]

P **का मान और सार्थकता**—हमने अभी दो अन्तरो पर विचार किया है जिनम से एक "सार्थक" और दूसरा "सार्थक नही" घोषित किया गया ।



चार्ट 24 9 प्रतिदर्श माध्यो का प्रत्याशित बटन और $\pm 3\ 70\sigma_{\bar{X}}$ अथवा अधिक के द्वारा X_e से भिन्न प्रतिदर्श माध्यों की प्राप्ति के अवसर ।

एक बार *P* निर्धारित हो जाने पर, ऐसे निष्कर्षों को प्रकट करने के लिए, जो स्पष्ट है, ये उदाहरण जान बूझकर चुने गये थे । अन्तर के सार्थक घोषित होने के लिए *P* का मूल्य *कितना कम होना चाहिये ? इस प्रश्न का उत्तर देना सरल नही है, क्योंकि उत्तर मुख्य रूप से विचाराधीन तथ्य की प्रकृति पर और गलत होने के परिणामो पर निर्भर है ।*

$\bar{X} = 14{,}738$ मील वाले प्रतिदर्श के लिए, हमने *P* को 0 000216 पाया और निराकरणीय परिकल्पना को अविश्वसनीय माना । वास्तव मे, यह सम्भव है कि परिकल्पना सत्य रही हो और हमारा निष्कर्ष गलत, क्योंकि यादृच्छिक प्रतिदर्श दस लाख मे ठीक 216 बार $3\ 70\sigma_{\bar{X}}$ के बराबर अथवा इससे बडा विचलन प्रदर्शित करेंगे ।

प्रथम प्रकार की त्रुटियाँ—जब निराकरणीय परिकल्पना वास्तव मे सत्य हो और विचाराधीन अन्तर को सार्थक नही घोषित किया गया हो (अर्थात् परिकल्पना खण्डित न हो) तो परिणाम सही है । जब निराकरणीय परिकल्पना वास्तव मे सत्य है, लेकिन जब सन्निहित अन्तर सार्थक घोषित किया गया हो (अर्थात्, परिकल्पना अविश्वसनीय है) तो हम कहते है कि "प्रथम प्रकार की त्रुटि" की गई है । यदि हम $P = 0.05$ को अपनी सार्थकता की कसौटी बनायें, और $P \leqq 0.05$ वाले सब अन्तरो को सार्थक घोषित करे, तो हम लम्बी अवधि मे 20 मे से प्रथम प्रकार की ठीक 1 त्रुटि करेंगे, यदि हम $P = 0\ 01$ को अपनी सार्थकता की कसौटी बनाये, और $P \leqq 0\ 01$ वाले सब अन्तरो को सार्थक घोषित करें तो हम लम्बी अवधि मे 100 मे से *प्रथम प्रकार की 1 त्रुटि करेंगे । यह स्पष्ट होना*

7 *ऐसी भी परिस्थितियाँ हैं जिनमे हम असमान क्षेत्रफल वाले दो पिछले भागो के साथ दो पिछले सिरों वाला परीक्षण करने की इच्छा कर सकते हैं । परिकल्पना परीक्षण के अधिक उन्नत विवरण के लिए देखिए केंडाल तथा स्टुअर्ट, यथा उपरिनिर्दिष्ट अध्याय 22 तथा 23 ।*

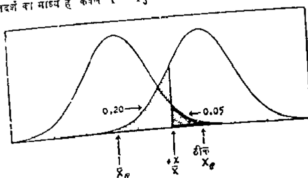
चाहिये कि कसौटी के रूप में प्रयुक्त P का मूल्य जितना कम होगा प्रथम प्रकार की त्रुटियाँ भी उतनी ही कम होंगी। दुर्भाग्य से, प्रथम प्रकार की त्रुटियों के अनुपात को कम करने से आगामी अनुच्छेद में वर्णित प्रकार की त्रुटि बढ़ जाती है।

द्वितीय प्रकार की त्रुटियाँ—जब निराकरणीय परिकल्पना वास्तव में असत्य हो और जब विचाराधीन अन्तर सार्थक घोषित किया गया हो तो परिणाम सही होगा। जब निराकरणीय परिकल्पना वास्तव में गलत हो, लेकिन जब परीक्षाधीन अन्तर सार्थक नहीं घोषित किया गया हो तो हम कहते हैं कि 'द्वितीय प्रकार की त्रुटि' की गई है। यदि हम $P = 0.05$ कसौटी का प्रयोग करें तो हम नहीं कह सकते कि कितनी बार द्वितीय प्रकार की त्रुटियाँ घटित होंगी, क्योंकि हम नहीं जान सकते कि परिकल्पना कितनी गलत हो सकती है। अन्तर्ग्रस्त समष्टि से प्रतिदर्श (अथवा बहुत से प्रतिदर्श) अयादृच्छिक हो सकता है, अथवा अन्तर्ग्रस्त के अनिश्चित समष्टि से प्रतिदर्श यादृच्छिक अथवा अयादृच्छिक हो सकता है। इस अवस्था में हम केवल इतना ही कह सकते हैं कि यदि हम $P = 0.05$ का कसौटी के रूप में प्रयोग करें तो $P = 0.01$ की कसौटी के प्रयोग की अपेक्षा द्वितीय प्रकार की कम त्रुटियाँ होने की सम्भावना होगी।[8]

कसौटी का चयन—व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए, जिस प्रकार की त्रुटि को दूर रखना हो उसके प्रकाश में ऐसी सम्भाव्यता को चुनना चाहिये जोकि सार्थकता की कसौटी

---

8 यदि हम वैकल्पिक परिकल्पना स्थापित करें तो हम द्वितीय प्रकार की त्रुटियों के घटित होने की सम्भावना व्यक्त कर सकते हैं। संलग्न आरेख में बाईं ओर का वक्र परिकल्पना के इस परीक्षण को व्यक्त करता है (0 0 दाईं ओर के पिछले भाग में कसौटी के रूप में प्रयोग करके) कि $\bar{X}$, $\bar{X}_g$ माध्य वाली समष्टि से, यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है केवल $\bar{X} - \bar{X}_g$ के धनात्मक मान परिकल्पना को सन्दिग्ध बनाते हैं।



$\bar{X}$ का कोई भी मान जो $-\infty$ और $+x$ के मध्य पड़ता है, हमें परिकल्पना स्वीकार करवाने में कारण बनेगा। यदि $\bar{X}_g$ का सही मूल्य वही है जो कि दाहिने वक्र के मध्य में दिखाया गया है, तो द्वितीय प्रकार की त्रुटि की सम्भाव्यता छाया-क्षेत्र द्वारा व्यक्त होती है, जोकि लगभग 0.20 है। दूसरी वैकल्पिक परिकल्पनाएँ भी स्थापित की जा सकती हैं। ध्यान दें कि यदि सही $\bar{X}_g$ दाईं ओर अधिक हो, तो द्वितीय प्रकार की त्रुटियों की सम्भाव्यता घट जाती है, यदि सही $\bar{X}_g$ बाईं ओर अधिक हो तो द्वितीय प्रकार की त्रुटि की सम्भावना बढ़ जाती है। चार्ट से यह भी स्पष्ट हो जाता है कि यदि काला क्षेत्र (प्रथम प्रकार की त्रुटियों की सम्भाव्यता को व्यक्त करता है यदि $\bar{X}_g$ बाईं ओर सही माध्य हो) घट जाता है तो द्वितीय प्रकार की त्रुटियों की सम्भाव्यता (यदि सही $\bar{X}_g$ ठीक वैसा है जैसा कि चार्ट पर अंकित है) बढ़ जाती है, यदि काला क्षेत्र बढ़ जाता है तो छाया-क्षेत्र घट जाता है।

का काम दे सके। यदि प्रथम प्रकार की त्रुटियाँ जितनी सम्भव हो सके उतनी कम हों तो P बहुत छोटा होना चाहिए। यदि द्वितीय प्रकार की त्रुटियाँ थोडी हों तो P बड़ा होना चाहिये। निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करे ·

एक कृषि प्रयोग केन्द्र ने एक ऐसी नई सूखी घास की फसल को विकसित किया है जो कि वर्तमान फसलों, जैसे लसुनघास, लैम्पिडेजा, तिपतिया इत्यादि, घासो से श्रेष्ठतर मानी गई है। नई फसल को उगाने के लिये कृषक द्वारा बीज बोने तथा फसल काटने के लिये विशेष मशीनों मे भारी पूँजी लगाई जानी चाहिए। वर्तमान फसलो से नई फसल की तुलना करने म यदि प्रथम प्रकार की त्रुटि की गई हो तो नई घास लगाने वाले कृपको को बहुत अधिक व्यय करना पडेगा परन्तु वे पशुओं को खिलाये जाने वाले पहले घास से नए घास को बेहतर नही पाएँगे। परिणामत कृपको को भारी नुकसान सहन करना पडा होगा। यदि द्वितीय प्रकार की त्रुटि की गई हो तो नई घास, यद्यपि बहतर ह, किन्तु बोई नही जाएगी और जबकि कृपक उन लाभो को प्राप्त करने म असफल रहेंगे जोकि परिणामस्वरूप उन्हे प्राप्त हुए होते, किन्तु उन्हे कोई यथार्थ हानि न उठानी पडती। इस प्रकार की परिस्थिति मे प्रेक्षित अन्तर के सार्थक होने की घोपणा करने के लिये P को बहुत छोटा अर्थात 0 01 या 0 001 होना चाहिये।

एक वर्ष सयुक्त राज्य खाद्य तथा औषध प्रशासन ने एक रासायनिक विनिर्माण प्रतिष्ठान के विरुद्ध इस बात का आरोप लगाते हुए कार्रवाई की कि उसके द्वारा वेचा गया डिजिटैलिस अर्धशक्ति का है। कठिनाई इस बात मे निहित थी कि यदि इस डिजिटैलिस का प्रयोग करने वाले व्यक्ति, जो इसके अभ्यस्त हो चुके है, बदल कर पूर्णशक्ति वाले डिजिटैलिस का प्रयोग करें तो उनको भयानक परिणाम भुगतने पड सकते हैं। इस प्रकार की औपधि के विपय मे, यह महत्त्वपूर्ण है कि दैनन्दिन उत्पादन को मानक (समष्टि) के अनुरूप रखा जाए। जैसे प्रत्येक समुदाय के परीक्षण किये जाते है, यह आवश्यक है कि कोई भी समुदाय समष्टि से बहुत अधिक शक्तिशाली या दुर्बल नही होने देना चाहिये। यदि किसी समुदाय का परीक्षण करने मे प्रथम प्रकार की त्रुटि हो जाए (अर्थात् यदि समुदाय को समष्टि से सार्थक रूप मे भिन्न कहा गया है जबकि वह वास्तव म भिन्न नही है), तो परिणाम यह होगा कि समुदाय रद्द कर दिया जाएगा या उसकी पुन प्रक्रिया होगी। इसके विपरीत, यदि द्वितीय प्रकार की त्रुटि हो जाती तो हम कहेंगे कि समुदाय समष्टि से सार्थक रूप मे भिन्न नही है, जबकि यथार्थ अन्तर वास्तव मे उपस्थित है और औपधि का प्रयोग करने वाले मनुष्यो को गम्भीर हानि यहाँ तक कि मृत्यु भी हो सकती है। इस प्रकार की स्थिति मे, प्रथम प्रकार की त्रुटियो की अपेक्षा द्वितीय प्रकार की त्रुटियो को दूर करना स्पष्टतया अधिक महत्त्वपूर्ण है और इसलिए P, पर्याप्त बडा, अर्थात् 0 10 या अधिमानत, और बडा होना चाहिये।

बहुत मे ऐसे अवसर होंगे जब यह नही कहा जा सकता कि प्रथम प्रकार की त्रुटियाँ अधिक गम्भीर है या द्वितीय प्रकार की। इस प्रकार की अवस्था उस समय आती है जब पुरुप रसोइयो और पुरुप प्लेट धोने वालो[9] के प्रतिभा स्तरो के माध्य के अन्तर का परीक्षण किया जा रहा है। यहाँ पर $P = 0\ 05$ को कसौटी के रूप मे प्रयोग करके अन्वेपक सन्तुष्ट हो सकता है।

9. दो प्रतिदर्श माध्यो के बीच अन्तरो का वर्णन पृष्ठ 579-586 पर किया गया है।

पूर्व वर्णन से यह स्पष्ट हो जाना चाहिये कि सभी परीक्षणों के लिये P के उसी मान को कसौटी के रूप म प्रयुक्त नहीं किया जाना चाहिये। उचित स्तर परिस्थितियों पर निर्भर करेगा। P का मूल्य दिए बिना, जिसे वर्तमान सारणियों से पर्याप्त औचित्य के साथ सामान्यतया पढ़ा जा सकता है और अन्तर्वेशन की आवश्यकता विरले ही होती है, यह कदापि नहीं कहना चाहिए कि परिणाम सार्थक है या सार्थक नहीं है। विकल्प ने यह कहा जा सकता है "0.01 (या अन्य) स्तर पर सार्थक"। कभी-कभी अन्वेषक यह कहेगा "0.05 (या अन्य) स्तर पर सार्थक परन्तु 0.02 (या अन्य) स्तर पर सार्थक नहीं"। P का मान बताने से पाठक को सार्थकता के सम्बन्ध म अपना निजी निष्कर्ष निकालने की अनुमति मिल जाती है।

एक अन्य महत्त्वपूर्ण बात है समस्या का हल प्रारंभ करने से पूर्व प्रयुक्त की जाने वाली सार्थकता की कसौटी के सम्बन्ध म निर्णय की वाछनीयता। इससे यह सम्भाव्यता दूर हो जाती है कि प्राप्त किया गया P का मान कसौटी तय करने पर प्रभाव डाले। यह विशेषतया उस समय घटित हो सकता है जब सार्थक या असार्थक अन्तर की "आशा की जाए।"

प्रायिकता तथा दैनिक घटनाएँ—पाठक यह अनुभव कर सकता है कि सार्थकता से सम्बन्धित तथा सम्भाव्यताओं पर आधारित परिणामों में सोचने का एक नया आधार निहित है जिसका उससे पहले सामना नहीं हुआ। यह इस दृष्टि से सत्य हो सकता है कि हम गणितीय सम्भाव्यता[10] के कुछ अत्यन्त प्रारम्भिक विचारों का प्रयोग कर रहे हैं। तथापि किसी प्रकार की सम्भाव्यता पर निर्णयों को आधारित करना प्रत्येक व्यक्ति के जीवन में दैनिक घटना रही है। परीक्षा के लिये अध्ययन करने वाला विद्यार्थी पाठ्यक्रम के उन भागों पर विचार करना है जिन पर कि अध्यापक द्वारा प्रश्न पूछने की सभावना हो तथा जिन भागों के परीक्षा में आने की सम्भावना न हो। जैसे ही वह पुनर्विचार करता है तो सम्भाव्यता का यह अशोधित व्यक्तिपरक प्रकार उसके लिये पथप्रदर्शक का काम करता है। बेसबॉल के शिक्षक को सम्भावनाओं पर विचार कर लेना चाहिए (अथवा "प्रतिशतताओं की क्रीडा करनी चाहिए," जैसा आकाशवाणी आलोचक कहते है), पूर्व इसके कि वह रगड खेल का आदेश दे या पूर्व इसके कि वह 0.290 पर बल्ला लगाने वाले बायें हाथ वाले नियमित बल्लेबाज के स्थान पर बायें हाथ से फेंकने वाले का सामना करने के लिये 0.240 पर बल्ला लगाने वाले दायें हाथ वाले बल्लेबाज को खडा करता है। इससे पूर्व कि कोई व्यक्ति अपने अधिकारी के पास वेतन वृद्धि के लिये जाता है वह सामान्यतया यह सोचता है कि क्या आज, कल या कोई अन्य दिन अधिक मांगलिक होगा। और अधिक बडे स्तर पर, श्रमिक संघों की वर्ष के अधिकतम मदी के महीनों म या मदी के दिनों में मजदूरी में बढोतरी माँगने की सम्भावना नहीं होती। इसी प्रकार, जिस समय व्यापार में मन्दा हो, उस समय सुविधाओं की दरो में वृद्धि माँगना उचित नहीं।

प्रतिदर्श का आकार—कभी-कभी कोई व्यक्ति उस प्रतिदर्श के आकार को जानने की इच्छा कर सकता है जो उसे विश्वास की निर्दिष्ट मात्रा प्रदान करे कि प्रतिदर्श माध्य निर्दिष्ट सीमाओं के बीच ही रहेगे। टायर मीलों के आँकड़ों के लिये, जबकि $\bar{X}_\theta = 15{,}200$ मील तथा $\sigma = 1{,}248$ मील, तो 100 में 98 प्रतिदर्शों के लिये, किस प्रतिदर्श आकार का

10 उदाहरण के लिए, देखें मूड तथा ग्रेबिल, यथा उपरिनिर्दिष्ट, पृष्ठ 6—52।

परिणाम यह होगा कि प्रतिदर्श माध्य ± 200 मील के भीतर रहे। परिचित तथा निर्दिष्ट मूल्यो को तथा $\frac{\lambda}{\sigma}$ के मूल्य को (परिशिष्ट ज से या परिशिष्ट झ की अन्तिम पंक्ति से) जो कि दो सिरो को अलग अलग कर देता है और जिसमे कि प्रसामान्य वक्र का दो प्रतिशत भाग सम्मिलित है व्यंजक

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{\lambda - \lambda_g}{\sigma_T}$$

म प्रतिस्थापित करने से उत्तर प्राप्त किया जाता है। क्योकि $\frac{x}{\sigma}$ मान 2 326 है, अत हम प्राप्त करते हैं

$$2\,326 = \frac{200}{\frac{1,248}{\sqrt{N}}}$$

$$200\sqrt{N} = (2\,326)(1\,248) = 2,902\,8$$
$$\sqrt{N} = 14\,5$$
$$N = 210$$

X तथा X_g के मध्य अन्तर की सार्थकता जब σ ज्ञात न हो

पूर्वगामी विवरण म केवल उस प्रविधि का वर्णन किया गया है जो उस समय लागू होता है जब λ_g तथा σ ज्ञात हो। समष्टि मूल्यो का प्राप्त होना बहुत अधिक असमान्य है। यह स्पष्ट हो जायगा यदि हम उन अत्यधिक महत्त्वपूर्ण अवस्थाओ की गणना करें जिनके अन्तर्गत समष्टि मूल्य ज्ञात हो सकें। वे हैं

(1) पूर्ण जनगणना की गई हो सकती है। इस प्रकार सयुक्त राज्य की अभिनव जनगणना से, उन सभी व्यक्तियों की आयु के लिए जिनकी गणना हुई थी λ तथा σ का परिकलन किया जा सकता था (ध्यान दीजिये कि पृष्ठ 20—21 पर वर्णित पूर्णांकन प्रवृत्ति इन आयु-आंकडो की अथवा किसी अन्य की परिशुद्धता को प्रभावित करेगी, जो शुद्ध प्रतिवेदित जन्म तिथियों पर आधारित नहीं है।)

(2) विस्तृत अनुभव के परिणामस्वरूप समष्टि मूल्यो को जाना जा सकता है। यह उस प्रकार की स्थिति है जिसका टायर मीलाकन आंकडो के द्वारा वर्णन किया गया है।

(3) गुण नियन्त्रण मे मानक का काम करने के लिये "नियन्त्रण समष्टि" की स्थापना पूर्व वर्णन के अधिक समान है। यहा पर सावधानीपूर्वक नियन्त्रित परिस्थितियों मे बहुत सी इकाइयो का निर्माण किया जाता है और इन इकाइयो से परिकलित साख्यिकीय मूल्यो को समष्टि आंकडा के रूप मे ग्रहण किया जाता है। तब दैनन्दिन उत्पादन आकडो की तुलना समष्टि आंकडो से की जाती है।

(4) समष्टि मूल्य ज्ञात हो सकते है या उनकी परिकल्पना या सिद्धान्त के आधार पर कल्पना की जा सकती है। जब माध्यो की अपेक्षा अनुपातो का वर्णन किया जा रहा है उस समय प्राय ऐसे मामलो का सामना करना पडता है। ऐसे परीक्षण मे जिसमे यह ज्ञात करना हो कि चाय पीने वाले चीनी के द्वारा मीठी की गई या सैक्रीन के द्वारा मीठी की गई चाय म अन्तर कर सकते हैं, प्रत्येक मीठा करने वाले तत्त्व के लिये समष्टि अनुपात की पूर्वधारणा 0 50 की जा सकती है। काफी के चार प्रकारो के प्राथमिकता परीक्षण मे प्रत्येक प्रकार के लिये समष्टि अनुपात 0 25 लिया जाएगा।

सारणी 24 1

0 104 इ च व्यास वाली सरत खीची गई ताम्बे की तार के 10 प्रतिदर्शो की टूटने की शक्ति

प्रतिदर्श	टूटने की शक्ति पाउडो मे X	X^2
1	578	334,084
2	572	327,184
3	570	324,900
4	568	322,624
5	572	327,184
6	570	324,900
7	570	324,900
8	572	327,184
9	596	355,216
10	584	341,056
योग	5,752	3,309,232

खनिज पदार्थों के परीक्षण के लिये अमरीकी सस्था, सप्लिमेन्ट्स टु 1933 ए० एम० टी० एम० मैन्युअल आन प्रेजेन्टेशन ऑफ डेटा "सप्लिमेन्ट ए—प्रेजेटिग प्लस एन्ड माइनस लिमिट्स ऑफ अन्सर्टन्टी ऑफ ऐन आब्जर्व्ड एवरेज पृष्ठ 1, खनिज परीक्षणो के लिए अमरीकी सस्था की कार्यवाहिया खण्ड 35, भाग एक, फिलेडेल्फिया से पुनर्मुद्रित।

$$\bar{X} = \frac{5752}{10} = 575\ 2 \text{ पाउंड।}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{3,309,232}{9} - \frac{(5752)^2}{10\ 9}},$$

$$= \sqrt{75\ 73} = 8.70 \text{ पाउन्ड।}$$

$\bar{X}$ तथा $\bar{X}_\delta$ मे अन्तर जो सार्थक नही है—जैसाकि सारणी 24 1 मे दिखाया गया है, सख्ती से खीची गई ताम्र तार के 10 टुकडो की तोडने की शक्ति के परीक्षण किये गये है। दस मूल्यो का समान्तर माध्य 575.2 पाउड है। अपनी 0.01 कसौटी के साथ, आइये हम इस परिकल्पना का परीक्षण करे कि $\bar{X} = 575.2$ पाउड, $\bar{X}_\delta = 577.0$ पाउड वाली समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है। अब हमें σ का पता नही है और क्योंकि हमारे पास σ नही है तो हमे अवश्यमेव प्रतिदर्श के आँकड़ो मे σ का आकलन करना चाहिये। इस आकलन को निम्न व्यजक[11] से प्राप्त किया जाता है

11 $\hat{\sigma}$ के लिये आधारभूत व्यजक को परिशिष्ट ध, परिच्छेद 24.3 में विकसित किया गया है। जिस प्रकार परिशिष्ट ध, परिच्छेद 10 2 मे दिया गया है, उसी प्रकार की प्रविधि द्वारा इस आधारभूत व्यजक से वर्गित तथा अवर्गित आँकड़ो के लिए प्रपत्र प्राप्त किए जाते हैं।

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N-1}},$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N-1} - \frac{(\Sigma X)^2}{N(N-1)}} \text{ अवर्गीकृत आकडो के लिए,}$$

$$= i\sqrt{\frac{\Sigma f(d')^2}{N-1} - \frac{\Sigma f(d')^2}{N(N-1)}} \text{ वर्गीकृत आँकडो के लिए ।}$$

$\hat{\sigma}^2$ को σ^2 का "नतिहीन" आकलन कहा जाता है, क्योकि[12]

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \quad + \hat{\sigma}_K^2}{K} = \sigma^2.$$

s^2, σ^2 का नतिहीन आकलन नही है, क्योकि

$$\frac{s_1^2 + s_2^2 + \quad . \quad + s_K^2}{K} < \sigma^2.$$

अब जब कि हमार पास $\hat{\sigma}$ है, हम इस स्थिति मे हैं कि $\sigma_{\bar{X}}$ का आकलन कर सकें। यह है[13]

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

ताम्र तार के टूटने की शक्ति के आँकडो के लिये, $\hat{\sigma}$ का परिकलन सारणी [4] के नीचे दिखाया गया है, तथा

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{8\ 70}{\sqrt{10}} = 2\ 75 \text{ पाउड ।}$$

अब हम सार्थकता अनुपात का परिकलन कर सकते है ।

$$\frac{\bar{X} - \bar{X}_{\phi}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}$$

यह सार्थकता अनुपात पहले प्रयोग किये गये अनुपातो से भिन्न है क्योकि हर $\sigma_{\bar{X}}$ का आकलन है । इस प्रतिस्थापन के कारण, हम इस स्थिति मे नही है कि प्रसामान्य वक्र का सकेत दें, परन्तु हमे अवश्यमेव t बटन का प्रयोग करना चाहिये, जो यद्यपि सममित है तथापि प्रसामान्य वक्र की अपेक्षा अधिक विस्तृत रूप से विक्षेपित है । इसे चार्ट 24.10 मे

---

12. देखिये परिशिष्ट घ, परिच्छेद 24 3 ।

13. यदि s प्रतिदर्श के लिये ज्ञात है तो इसे

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\, s$$

के प्रयोग द्वारा $\hat{\sigma}$ मे रूपान्तरित किया जा सकता है । तथापि इस प्रकार के रूपान्तरण की आवश्यकता नही है क्योकि हम

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

लिख सकते हैं । यह बिल्कुल स्पष्ट हो जाना चाहिये कि ज्यो-ज्यो N मे वृद्धि होती है त्यों-त्यो s तथा $\hat{\sigma}$ के सख्यात्मक अन्तर की महत्ता नगण्य रह जाती है । फिर भी, σ के आकलन के तौर पर s का प्रयोग मे लाना गलत है ।

देखा जा सकता है। t बटन का प्रसार विद्यमान "स्वतन्त्रता के अशों" (n) की सख्या पर निर्भर करता है, $n=1$ के लिये विक्षेपण अधिकतम है और जब n मे वृद्धि होती है तो यह कम होता है। जैसे ही n अनन्त पर पहुँचता है तो t बटन सीमा के रूप मे प्रसामान्य बटन पर पहुँच जाता है। चार्ट 24 10 पर दृष्टि डालने से यह प्रवृत्ति स्पष्ट है। अकेले प्रतिदर्श माध्य वाले सार्थकता परीक्षणों के लिये, जिस प्रकार का विचाराधीन है, $n=N-1$, क्योकि हमने $\hat{\sigma}$ का परिकलन करने के लिये N मानो के विचलनो का उनके अपने माध्य के गिर्द प्रयोग किया। अन्य शब्दो मे, हमने N नहीं अपितु $N-1$ स्वतन्त्र विचलनो का प्रयोग किया।

ताम्र-तार की टूटने की शक्ति के आँकड़ो के लिये,

$$t=\frac{\bar{X}-\bar{X}_{\mathscr{P}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}=\frac{575.2-577.0}{2.75}=\frac{1.8}{2.75}=0.65$$

$n=N-1=10-1=9$ तथा $t=0.65$ के लिये परिशिष्ट झ के सदर्भ द्वारा P के मूल्य का अभिनिश्चय किया जाता है। यह परिशिष्ट सारणी प्रसामान्य वक्र की पूर्वगामी सारणी से कुछ भिन्न है। दोनो सारणियों मे सम्बन्धित बटनो के दो सिरो मे क्षेत्रो को दिखाया गया है, परन्तु परिशिष्ट ज, $\frac{x}{\sigma}$ के चुने हुए मूल्यों के लिए P के मूल्यों को दर्शाता है, जबकि परिशिष्ट झ n तथा P के विशिष्ट मूल्यो के लिये t के मूल्यो को दर्शाता है। परिशिष्ट झ से यह देखा जाता है कि $0.50 < P < 0.60$, तथा हम यह परिणाम निकालते है कि $\bar{X}$ तथा $\bar{X}_{\mathscr{P}}$ के बीच कोई सार्थक अन्तर नहीं है। चार्ट 24 11, जिसमे स्वतन्त्रता के 9 अशो के लिए t बटन को दिखाया गया है, उस बात की व्याख्या करता है जो की गई है।

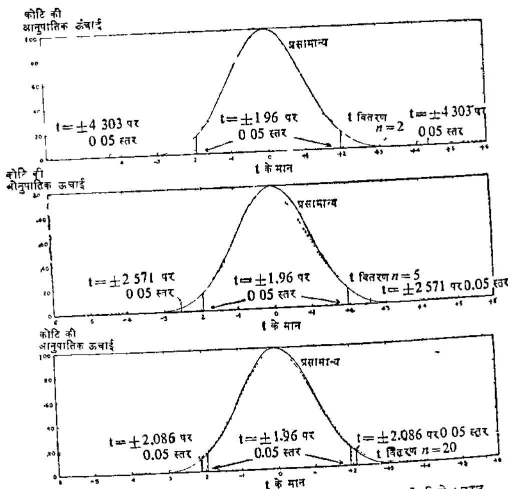
$\bar{X}$ तथा $\bar{X}_{\mathscr{P}}$ **मे अन्तर जो सार्थक है**—नार्मन सी० विले[14] एक प्रतिदर्श के लिये $N=16$, $\bar{X}=9{,}959$ पाउड, तथा $s=248$ पाउड दर्शाते हुए, तीन-इच मनीला रस्सी की शक्ति के परीक्षणो के आँकडे प्रस्तुत करते है। 0 01 स्तर का कसौटी के रूप मे प्रयोग करते हुए हम इस परिकल्पना का परीक्षण करेंगे कि $\bar{X}=9{,}959$ पाउड, $\bar{X}_{\mathscr{P}}=10{,}148$ पाउड वाली समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है। $\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ को प्राप्त करने के लिये, हम पादाक 13 म प्रस्तुत व्यजक का प्रयोग करते हैं

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}}=\frac{s}{\sqrt{N-1}}=\frac{248}{\sqrt{15}}=\frac{248}{3.873}=64.03.$$

तब हम परिकलन करते हैं

$$t=\frac{\bar{X}-\bar{X}_{\mathscr{P}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}=\frac{9{,}959-10{,}148}{64.03}$$
$$=\frac{189}{64.03}=2.95$$

14 एन० सी० विले द्वारा लिखित *स्टैटिस्टिकल मेथड्स ऐज ऐन एड इन रिवाइजिग स्पेसिफिकेशन्ज* मे प्रतिदर्श आँकडे हैं, रस्सियो के परीक्षण के लिये अमरीकी सस्था की इकतालीसवी बैठक के समय पढे गये पत्र का पुनर्मुद्रण।



चार्ट 24 10 प्रसामान्य बटन के साथ $n=2, n=5$, तथा $n=20$ के लिये t बटन की तुलना । ऊपर प्रदर्शित t के मूल्य प्रसामान्य वक्र के लिये $\frac{x}{\sigma}$ मूल्य हैं । t बटन की कोटियों को निम्न व्यजक मे लिया गया है

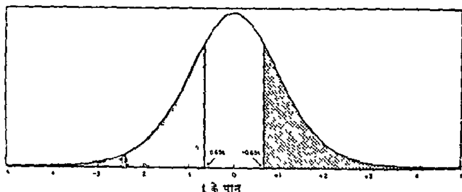
$$Y = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

यह अधिकतम कोटि प्रदान करता है जो 1 0 पर पहुँच जाती है ज्यो ही n अनन्त को पहुँचता है और इस प्रकार प्रसामान्य वक्र के लिये व्यजक

$$Y_c = e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

से तुलना योग्य है । $\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}$ के परिकलन को उदाहरण से स्पष्ट किया जा सकता है । यदि $n=11$, तो अश 5 ! है, जबकि हर 4.5 है 4.5 ! के मूल्य को $4\ 5 \times 3.5 \times 2.5 \times 1.5 + 0.5\sqrt{\pi}$ के द्वारा दिया गया है ।

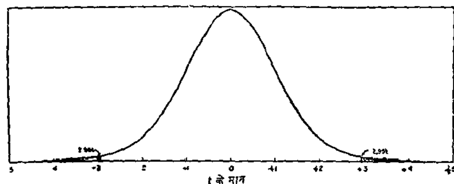
परिशिष्ट भ की t सारणी से यह प्रतीत होता है कि P लगभग ठीक 0 0₁ है, और हम परिकल्पना को अस्वीकार करते है। पूर्व वर्णित धारणा को लेखाचित्रीय ढग से चार्ट 24 12 मे दिखाया गया है। ध्यान दें, कि यदि हम परिशिष्ट ज की प्रसामान्य सारणी का



चार्ट 24 11 $n=9$ के लिये t बटन, $t=\pm 0\ 65$ अथवा अधिक प्राप्त करने की सम्भाव्यता को दिखाते हुए। वक्र के नीच 0 50 तथा 0 60 के बीच क्षत्र दो सिरों मे है।

प्रयोग करते तो सम्भाव्यता प्रभावात्मक रूप से कम, लगभग 0 003 रहती। यदि प्रतिदर्श बड़ा होता तो दो सम्भाव्यताओं के मध्य अन्तर काफी कम होता। जैसा कि चार्ट 24 10 मे और परिशिष्ट भ मे देखा जा सकता है t बटन लगभग $n=20$ पर प्रसामान्य बटन के सन्निकट आता हुआ दिखाई देता है। जब $n \geqq 30$, तो कुछ सांख्यिकीविद स्वभावत प्रसामान्य सारणी का सकेत देते है, परन्तु यह इस कारण से ऐसा दिखाई देता है कि कुछ समय के लिये प्राप्य t सारणियों ने $n-30$, तथा $n=\infty$ के बीच t के कोई मूल्य नही दिये। परिशिष्ट भ मे $n-30$ 40, 60 120 तथा ∞ के लिये t मानो की सूची दी गई है। जहाँ $\hat{\sigma}$ को σ के आकलन के रूप म प्रयुक्त किया गया है उन सब अवस्थाओं मे t सारणी का प्रयोग करना सर्वोत्तम है।

$\bar{X}_{\wp}$ की विश्वास्यता सीमाएँ—अभी-अभी दिए उदाहरण मे यह परिणाम निकाला गया था कि प्रतिदर्श माध्य $\bar{X}_{\wp}=10\ 148$ पाउड वाली समष्टि से प्रतिदश यादृच्छिक



चार्ट 24 12 $n=15$ के लिये t बटन, जिसमे $t=\pm 2\ 95$ या अधिक प्राप्त करने की सम्भाव्यता को दिखाया गया है। वक्र के नीचे क्षत्र का लगभग ठीक 0 01 दो सिरो मे है।

प्रतिदर्श का माध्य नही था। प्रतिदर्श मात्र के ज्ञान से, उन सीमाओ के बारे मे क्या कहा जा सकता है जिनके भीतर $\bar{X}_{\wp}$ के उत्पन्न होने की आशा की जा सकती है। $\bar{X}_{\wp}$ के लिये हमे दो मूल्यो की आवश्यकता है, जिन्हे हम $X_{\wp_1}$ तथा $\bar{X}_{\wp_2}$ कहेंगे और जो $\bar{Y}$ से क्रमशः कम तथा अधिक होगे। ये $\bar{X}_{\wp}$ की "विश्वास्यता सीमाएँ" है। पहला पग इस बात का निर्णय करने मे निहित है कि हम विश्वास्यता सीमाओ के अपने कथन के गलत होने के लिए कितनी बार तैयार हैं। कल्पना कीजिये कि हम स्वय को 100 मे से 5 से अधिक बार गलत नही होने देते। उस अवस्था मे हमे 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओ की आवश्यकता है। निम्न का निर्धारण करने से ये सीमाएँ प्राप्त की जाती हैं

(1) $\bar{X}_{\wp_1}$ के मूल्य की स्थिति इस प्रकार से है कि $\bar{X}_{\wp_1}$ के गिर्द प्रतिदर्श माध्यो के बटन के सिरे के ऊपरी $2\frac{1}{2}$ प्रतिशत को $\bar{X}$ काट देता है, तथा

(2) $\bar{X}_{\wp_2}$, के मूल्य की स्थिति इस प्रकार से है कि $\bar{X}_{\wp_2}$ के गिर्द प्रतिदर्श माध्यो के बटन के निम्न $2\frac{1}{2}$ प्रतिशत सिरे को $\bar{X}$ काट देता है।

इन दोनो मूल्यो को निम्नलिखित व्यजक से प्राप्त किया जा सकता है, जिसमे हम पूर्व परिकलित $\bar{X}$ तथा $\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ के मूल्यो तथा उचित विश्वास्यता सीमाओ के लिए t मूल्य का प्रतिस्थापन करते है

$$\bar{X}=\bar{X}_{\wp}\pm t\hat{\sigma}_{\bar{X}}.$$

क्योकि हमे 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं की आवश्यकता है और क्योकि $n=15$, अतः t का मूल्य (परिशिष्ट ﬤ से) 2 131 है। तब हमारे पास है

$$9,959=\bar{X}_{\wp}\pm(2\,131)(64\,03)$$

$$\bar{X}_{\wp}=9,959\pm136\,4,$$

$$=9,822\,6 \text{ तथा } 10,095\,4 \text{ पाउड।}$$

पूर्ववर्णित प्रविधि का चार्ट 24 13 मे निदर्शन किया गया है।

हमे पूर्ण *विश्वास* नही है कि समष्टि माध्य अभी-अभी प्रस्तुत सीमाओ के बीच पड़ता है, परन्तु हमे 95 प्रतिशत विश्वास है कि ऐसा होता है। दूसरे शब्दो मे, यदि 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओ के बहुत से निर्धारण किये जाएँ तो हम उन सीमाओ मे 100 मे से 95 बार समष्टि मूल्य को सम्मिलित करने की तथा 100 मे से 5 बार समष्टि मूल्य को बहिष्कृत करने की आशा कर सकते हैं। रोगर पी० डोयले ने प्रसामान्य समष्टि से शेह्वार्ट के 1,000 प्रतिदर्शों मे से प्रत्येक के लिये $X_{\wp}$ की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओ का परिकलन किया है। प्रत्येक प्रतिदर्श के लिये $\bar{X}$, $\hat{\sigma}$, तथा $n=3$ का प्रयोग करके उसने विश्वास्यता सीमाओ के 1,000 युग्मो को ज्ञात किया और प्रत्येक युग्म पर यह ध्यान दिया, कि उन्होंने $\bar{X}_{\wp}=0$ को सम्मिलित किया अथवा नही। उसकी विश्वास्यता सीमाएँ 951 उदाहरणों मे ठीक थी और 49 मे गलत थी।

जबकि पूर्वगामी निदर्श मे 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ प्राप्त की गई, किन्तु प्रतिदर्श से प्राप्त $\bar{X}$ तथा $\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ के मूल्यो के साथ उचित t मूल्य का प्रतिस्थापन मात्र करके किन्हो भी वाछित सीमाओ का परिकलन किया जा सकता है। इस प्रकार की सीमाएँ जैसे कि 99.9, 99 8, 99, 98, 96, 95 तथा 90 प्राय. प्रयोग की जाती हैं। 90 प्रतिशत से कम विश्वास प्रस्तुत करने वाली विश्वास्यता सीमाओ की प्रायः आवश्यकता नही होती, क्योकि ये विश्वास के ऊँचे स्तर की अभिव्यक्ति नही करती।

अनुपातो के लिये विश्वास्यता सीमाओ का निर्धारण, प्रतिदर्श प्रसरणो (s^2 अथवा $\hat{\sigma}^2$) तथा सहसम्बन्ध गुणाको का वर्णन आगामी दो अध्यायो मे किया जायेगा। इन मापो के लिये तथा समातर माध्यो के लिये सांख्यिकीय कार्यकर्ता को विचाराधीन माप के लिये अधिकतम और न्यूनतम सभव मूल्यो पर ध्यानपूर्वक विचार करना चाहिये। कई बार स्वय चर का स्वभाव सीमाएँ स्थापित कर देता है, जिसके परे मूल्य नही जा सकते, और जिसे परिकलित विश्वास्यता सीमाओ की अपेक्षा अग्रगामिता प्राप्त होनी चाहिये।

$\bar{X}_{\varrho}$ की विश्वास्यता सीमाओ का निर्धारण करने के लिये व्यजक

$$\bar{X} = \bar{X}_{\varrho} \pm t\hat{\sigma}_{\bar{X}},$$

की अपेक्षा

$$\bar{X}_{\varrho} = \bar{X} \pm t\hat{\sigma}_{\bar{X}},$$

लिखा गया था जिसने वही परिणाम प्रदान किये होते। ऐसा करने का उद्देश्य यह था कि इस बात पर बल डाला जाये कि प्रतिदर्श माध्यो का $\bar{X}_{\varrho}$ के गिर्द बटन होता है। चार्ट 24 13 भी इसे स्पष्ट करने का प्रयास करता है। $\bar{X}$ के गिर्द समष्टि माध्यो के बटन जैसी कोई वस्तु नहीं है।

पूर्वगामी 7 पृष्ठो में प्रस्तुत सभी निदर्शों मे $\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ तथा t बंटन निहित हैं। इस बात पर बल डालना अच्छा हो सकता है कि t के मूल्य मे विचरण, $\hat{\sigma}$ के प्रतिदर्श विचरणो तथा $\bar{X}$ के प्रतिदर्श विचरणो के कारण होते हैं। t का अधिक मूल्य (और इसलिए P का कम मूल्य) इस कारण से हो सकता है कि $\bar{X}$ मे $\bar{X}_{\varrho}$ से बहुत है, भिन्नता या क्योंकि $\hat{\sigma}$ छोटा है σ से या दोनो। t का कम मूल्य (और इसलिए P का अधिक मूल्य) इसलिए हो सकता है कि क्योकि $\bar{X}$ $\bar{X}_{\varrho}$ के बिल्कुल सन्निकट पहुँचता है, या क्योकि $\hat{\sigma}$ अधिक है σ से, या दोनो। जब σ ज्ञात हो तो एकमात्र विद्यमान प्रतिदर्श विचरण वे हैं जो $\bar{X}$ के हैं।

दो प्रतिदर्श माध्यों के बीच अन्तर की सार्थकता

स्वतंत्र प्रतिदर्श—किसी निश्चित स्थान पर पुरातात्विक खुदाई से 16 निम्न प्रथम चर्वणदन्त प्राप्त किये गये।[15] हम 16 दाँतो मे से प्रत्येक का माप नही जानते परन्तु हम यह जानते है कि $\bar{X}_1 = 13.57$ मिमी और $s_1 = 0.72$ मिमी। निकट के स्थान से $\bar{X}_2 = 13.06$ तथा $s_2 = 0.62$ मिमी के साथ 9 निम्न प्रथम चर्वणदन्त लिये गये थे। $P = 0.05$ को कसौटी का प्रयोग करते हुए, क्या निम्न प्रथम चर्वणदन्तो के इन दो समूहो की माध्य लम्बाई मे सार्थक अन्तर है? इस परीक्षण के लिये हम निराकरणीय परिकल्पना स्थापित करते है कि $\bar{X}_{\varrho}$ से सम्बन्धित दो प्रतिदर्श माध्य उसी समष्टि से हैं, और हम इस परिकल्पना का परीक्षण t की सभाव्यता का निर्धारण करके करते है, जहाँ t दो प्रतिदर्श माध्यो के बीच अन्तर की मानक त्रुटि के आकलन के साथ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ का अनुपात है।

यदि दो प्रतिदर्श स्वतन्त्र हैं, तो जैसाकि परिशिष्ट ध, परिच्छेद 24 4, मे दिखाया गया है, दो प्रतिदर्श माध्यो $\sigma_{\bar{X}_1} - \bar{X}_2$ के बीच अन्तर की मानक त्रुटि को

$$\sigma_{\bar{X}_1} - \bar{X}_2 = \sqrt{\sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2}},$$

15 कोलम्बिया विश्वविद्यालय में प्रो० एगन पियर्सन द्वारा दिये गये एक व्याख्यान " " आँकडो पर आधारित।

चार्ट 24 13 तीन इंच मनीला रस्सी, $n = 15$ की शक्ति के लिये $\bar{X}_0$ की 95 प्रतिशत विश्वास सीमाएँ ।

के द्वारा प्राप्त किया जाता है। अस्वतन्त्र प्रतिदर्शों पर इस अध्याय मे बाद मे विचार किया जायेगा। अभी प्रस्तुत व्यजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है[16]

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{N_1}+\frac{\sigma^2}{N_2}}=\sigma\sqrt{\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}}.$$

हम अपनी समस्या के लिये इस सूत्र का प्रयोग नहीं कर सकते, क्योंकि हम σ का मूल्य नही जानते। (यदि हम σ को जानते तो हम $\bar{X}_g$ को भी लगभग निश्चित रूप से जान लेते क्योंकि σ को $\bar{X}_g$ के गिर्द परिकलित किया जाता है। यदि हम $\bar{X}_g$, को जानते तो दो प्रतिदर्श माध्यो की एक दूसरे के साथ तुलना करने की अपेक्षा $\bar{X}_g$ के साथ $\bar{X}_1$ और $\bar{X}_2$ की तुलना करना अधिक अर्थपूर्ण होता।) परिणामत:, दो प्रतिदर्शों द्वारा दी गई सूचना से हम σ के मूल्य का आकलन करते है। यह आकलन[17] है

$$\hat{\sigma}_{1+2}=\sqrt{\frac{\Sigma x_1^2+\Sigma x_2^2}{N_1-1+N_2-1}}.$$

जब प्रत्येक प्रतिदर्श के अलग-अलग प्रेक्षण प्राप्त है, जैसाकि प्राय. होता है, तो हम अवर्गीकृत आँकडो के लिये

$$\Sigma x^2=\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

का परिकलन कर सकते है अथवा वर्गीकृत आँकडो के लिये परिकलन कर सकते है

$$\Sigma x^2=i^2\left[\Sigma f(d')^2-\frac{(\Sigma fd')^2}{N}\right]$$

---

16. यह कल्पना कर ली जाती है कि दो प्रतिदर्श σ^2 प्रसरण मे सम्बन्धित उसी समष्टि से है। यह कल्पना हमारी समस्या के लिये तर्कहीन नही है, क्योकि अध्याय 26 मे वर्णित F परीक्षण यह स्पष्ट करता है कि $\hat{\sigma}_1^2$ और $\hat{\sigma}_2^2$ के बीच सार्थक अन्तर नही है। जब दो प्रतिदर्शों को असमान प्रसरण की समष्टियो से समझा जाता है और जब $N_1=N_2$, या $N_1 \simeq N_2$ और दोनो बड़े है तो

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1}+\frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}.$$

का प्रयोग करके सन्निकट परीक्षण किया जा सकता है।

17. $\hat{\sigma}^2_{1+2}$ पृथक् प्रतिदर्शो के लिए दो $\hat{\sigma}^2$ मानो की भारित औसत है। परिशिष्ट घ, परिच्छेद 24.5 देखिए। परिच्छेद 24.6 मे दिखाया गया है कि जब $N_1=N_2$ तो

$$\hat{\sigma}_{1+2}\sqrt{\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}}=\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1}+\frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}$$

जब दो से अधिक प्रतिदर्श हों तो σ^2 का आकलन

$$\frac{\Sigma x_1^2+\Sigma x_2^2+\Sigma x_3^2+\ldots}{N_1-1+N_2-1+N_3-1+\ldots}$$

के द्वारा दिया जाता है। प्रसरण विश्लेषण के वर्णन के साथ हम इस व्यजक का प्रयोग अध्याय 26 मे करेंगे।

विचाराधीन समस्या के लिए, हमारे पास पृथक्-पृथक् प्रेक्षण नही हैं, किन्तु s_1 तथा s_2 अवश्य हैं। क्योंकि

$$s_1=\sqrt{\frac{\Sigma x_1^2}{N_1}} \quad \text{तथा} \quad s_2=\sqrt{\frac{\Sigma x_2^2}{N_2}}.$$

$$\Sigma x_1^2=N_1 s_1^2 \quad \text{तथा} \quad \Sigma x_2^2=N_2 s_2^2.$$

अत. हम परिकलन करते है

$$\Sigma x_1^2=16(0.72)^2=8.29,$$
$$\Sigma x_2^2=9(0.62)^2=3.46.$$

तब σ का आकलित मूल्य प्राप्त किया जाता है

$$\hat{\sigma}_{1+2}=\sqrt{\frac{8.29+3.46}{16-1+9-1}}=0.715.$$

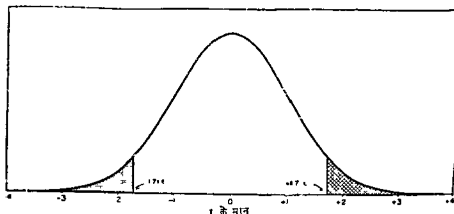
दो माध्यो के बीच अन्तर की आकलित मानक त्रुटि का अब परिकलन किया जा सकता है :

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\hat{\sigma}_{1+2}\sqrt{\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}},$$
$$=0.715\sqrt{\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{9}}=0.291.$$

अन्त मे हम वाछित सार्थकता अनुपात प्राप्त कर सकते हैं,

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{13.57-13.06}{0.298}=\frac{0.51}{0.298}=1.71.$$

आँकड़ो के प्रथम समुच्चय से हमारे पास है $n_1=N_1-1=16-1=15$ स्वतंत्रता अंश, द्वितीय समुच्चय से, $n_2=N_2-1=9-1=8$. अतः $n=n_1+n_2=23$ ध्यान दे कि जब $\bar{X}_1$ के गिर्द Σx_1^2 का परिकलन किया गया तो स्वतन्त्रता के एक अंश का ह्रास हुआ और जब $\bar{X}_2$ के गिर्द Σx_2^2 का परिकलन किया गया तो एक और अंश की हानि हुई। परिशिष्ट भ की t सारणी से हम पाते है $P\approx 0.10$ और हम $\bar{X}_1$ तथा $\bar{X}_2$ के मध्य अन्तर को सार्थक नही समझते। चार्ट 24.14 ऊपर के विवरण को प्रदर्शित करता है।



चार्ट 24 14 $t=\pm 1.71$ **या अधिक को प्राप्त करने की सभाव्यता को दिखाते हुए,** $n=23$ **के लिये** t **बटन।** वक्र के नीचे क्षेत्र का लगभग 0.10 दो सिरो मे है।

$\bar{X}_{g1}-\bar{X}_{g2}$ **की विश्वास्यता सीमाएँ**—कभी-कभी जब यह निष्कर्ष निकाल लिया गया हो कि $\bar{X}_1$ और $\bar{X}_2$ के बीच सार्थक अन्तर विद्यमान है तो $\bar{X}_{g1}-\bar{X}_{g2}$ की विश्वास्यता सीमाओं का वक्तव्य प्राप्त करना वांछित हो सकता है। इसे $\bar{X}_{g1}-\bar{X}_{g2}$ के लिये व्यजक[18]

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2=(\bar{X}_{g1}-\bar{X}_{g2})\pm t\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$$

को सरल करके प्राप्त किया जाता है। जिस प्रकार $\bar{X}_g$ की विश्वास्यता सीमाओ के निर्धारण मे है, t का मान परिशिष्ट भ से पढा जाता है और वह निर्भर करता है (1) प्रयुक्त किये जाने वाले विश्वास के स्तर पर और (2) स्वतन्त्रता के अंशों पर जोकि इस प्रकार है $n=N_1-1+N_2-1$.

ऊपर प्रस्तुत व्यजक के प्रयोग को समझाने के लिये, दो स्रोतो से प्राप्त सरचनात्मक इस्पात (जलयानो के लिये) के उत्पादन बिन्दु पर विचार करें। स्रोत 1 के लिये : $N_1=10$, $\bar{X}_1=45{,}948$ पाउण्ड प्रति वर्ग इच, और $s_1=2{,}910$ पाउण्ड प्रति वर्ग इच। स्रोत 2 के लिये $N_2=19$, $\bar{X}_2=39{,}820$ पाउण्ड प्रति वर्ग इच, और $s_2=2{,}510$ पाउण्ड प्रति वर्ग इच।[19] निम्न प्रथम चर्वण दांतो के आँकडो के लिए अभी प्रयुक्त उन्ही व्यजको का प्रयोग करते हुए, यह प्राप्त होता है कि $\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=1{,}074.9$ तथा

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}=\frac{45{,}948-39{,}820}{1{,}074.9},$$

$$=\frac{6{,}128}{1{,}074.9}=5.7$$

$n=n_1+n_2=9+18=27$ के लिये t का यह मूल्य 0.001 स्तर से बहुत परे है, अत. माध्यो के बीच अन्तर सार्थक है।

$\bar{X}_{g1}-\bar{X}_{g2}$ की 98 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओ को प्राप्त करने के लिये हम $t=2.473$ का प्रयोग करते है और ज्ञात मूल्यो का

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2=(\bar{X}_{g1}-\bar{X}_{g2})\pm t\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$$

मे प्रतिस्थापन करते है। इससे प्राप्त होता है

$$45{,}948-39{,}820=(\bar{X}_{g1}-\bar{X}_{g2})\pm(2.473)(1{,}074.9).$$

$$\bar{X}_{g1}-\bar{X}_{g2}=6{,}128\pm2{,}658,$$

$$=3{,}470 \text{ और } 8{,}786 \text{ पाउण्ड प्रति वर्ग इच।}$$

अस्वतन्त्र (आश्रित) प्रतिदर्श—जब दो प्रतिदर्शों मे मदो के जोड़ो के बीच जन्मजात युग्मता विद्यमान हो तो साधारणतया यह परिणाम निकलता है कि दो प्रतिदर्श स्वतन्त्र नही हैं। हम इसमे रुचि नही रखते कि दो प्रतिदर्शों मे प्रथम और आगामी मूल्यो के युग्म अभी युग्मित हुए हों क्योकि वे सूची के क्रम से चुने गये थे; हमारी उस समय रुचि होती है यदि, उदाहरणार्थ, युग्मित पाठ्याक भाइयो और बहनो या जुडवाँ बच्चों के प्रतिभा स्तर के मूल्य हो, अथवा यदि मूल्य टायर के मौलिक दाँतो और पुन ऊपरी पट्टी चढाने के बाद टायरो के मील हैं। समस्याओ मे से बहुत अधिकाश जिनका सामना करना पड़ेगा स्वतन्त्र प्रतिदर्शों के सम्बन्ध मे होंगी। तो भी यह अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है कि आश्रित प्रतिदर्शों को उनके

18. $\bar{X}_1$ और $\bar{X}_2$ बीच के अन्तर की सार्थकता के परीक्षण के समान, यह परिकल्पना कर ली जाती है कि σ^2 से सम्बन्धित दो प्रतिदर्श उसी समष्टि से हैं।

19. आँकडे पाद-टिप्पणी 14 मे प्रस्तुत स्रोत से हैं।

वास्तविक रूप में पहचाना जाये; उनके साथ स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का-सा व्यवहार नहीं किया जाना चाहिये।

सारणी 24 2

25 अंगूर फलों के छायाकृत तथा चित्रित आधे भागों में घनों की प्रतिशतता

फल	छायाकृत X_1	चित्रित X_2	$D = X_1 - X_2$	D^2
1	8 59	8 49	0 10	0 0100
2	8 59	8 59		
3	8 09	7 84	0 25	0 0625
4	8 54	7 89	0 65	0 4225
5	8 09	8 19	—0 10	0.0100
6	8 49	7 84	0 65	0 4225
7	7 89	7 89		
8	8 59	7 89	0 70	0 4900
9	8 54	7 79	0 75	0 5625
10	7 99	7 84	0 15	0 0225
11	7 89	7 79	0 10	0 0100
12	8 09	7 84	0 25	0 0625
13	7 89	7 89		
14	8 54	8 07	0 47	0 2209
15	7 84	7 97	—0 13	0 0169
16	7 49	7 57	—0 08	0 0064
17	7 89	7 92	—0 03	0 0009
18	7 79	7 97	—0 18	0·0324
19	7.84	8 17	—0 33	0·1089
20	8.89	8 67	0 22	0 0484
21	8 54	8 07	0 47	0 2209
22	8 04	7 97	0 07	0 0049.
23	8.59	8 62	—0 03	0 0009
24	8 19	7 92	0 27	0 0729
25	8.59	7.97	0.62	0 3844
योग	205 50	200 66	4 84	3 1938

आंकड़े पॉल एल० हार्डिंग प्लांट फिजियॉलोजिस्ट, डिवीजन ऑफ़ फ्रूट एन्ड वेजिटेबल क्रॉप्स एन्ड डिसीजिज, ब्यूरो आफ प्लांट इन्डस्ट्री, सायल्ज एन्ड एग्रीकलचरल इन्जीनियरिंग, एग्रिकलचरल रिसर्च एडमिनिस्ट्रेशन, युनाइटिड स्टेट्स डिपार्टमेंट ऑफ़ एग्रीकलचर से।

$$\bar{X}_D = \frac{\Sigma D}{N} = \frac{4\ 84}{25} = 0\ 194 \text{ प्रतिशत}$$

$$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N-1} - \frac{(\Sigma D)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{3\ 1938}{24} - \frac{(4\ 84)^2}{25(24)}},$$

$$= \sqrt{0\ 133075 - 0\ 039043} = \sqrt{0\ 094032},$$

$$= 0\ 307 \text{ प्रतिशत}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}D} = \frac{\hat{\sigma}_D}{\sqrt{N}} = \frac{0\ 307}{\sqrt{25}} = 0\ 061 \text{ प्रतिशत ।}$$

सारणी 24 2 के आंकडो मे 25 अंगूर फलो के छायाकृत और चित्रित आधे भागो मे घनो की प्रतिशतताम्रो को दिखाया गया है । यहा यह स्पष्ट है कि आँकडो के दो समुच्चय स्वतन्त्र नही है, वे स्वाभाविक रूप से युग्मित है । अंगूर फल सख्या 1 के छायाकृत पक्ष मे 8 59 प्रतिशत घन थे जबकि उसी अंगूर फल के चित्रित पक्ष मे 8 49 प्रतिशत घन थे । स्वाभाविक रूप से ये दोनो आँकडे एक दूसरे के साथ युग्मित है क्योकि ये उसी एक फल की ओर सकेत करते है । अन्य 24 अंगूर फलो के आँकडो के विषय मे भी यही बात सत्य है ।

छायाकृत तथा चित्रित आधे भागो के माध्यो के बीच अन्तर की सार्थकता का परीक्षण करने के लिये, हम मूल्यो के प्रत्येक युग्म के बीच अन्तर D को प्राप्त करते हैं, $\bar{X}_D$ के मूल्य का निर्धारण करते है, और इस बात का निश्चय करते है कि क्या $\bar{X}_D$, 0 से सार्थक रूप मे भिन्न है । निराकरणीय परिकल्पना यह है कि $\bar{X}_D$ शून्य के माध्य वाले अन्तरो की समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य है । सारणी 24 2 के नीचे परिकलनो को दिखाया गया है जिनसे प्राप्त होता है

$$X_D = 0\ 194 \text{ प्रतिशत},$$

$$\hat{\sigma}_D = 0\ 307 \text{ प्रतिशत और}$$

$$\hat{\sigma}_{XD} = 0\ 061 \text{ प्रतिशत ।}$$

तब हम t के मूल्य का निर्धारण करते हैं,

$$t = \frac{\bar{X}_D - 0}{\hat{\sigma}_{\bar{X}D}} = \frac{0\ 194 - 0}{0\ 061} = 3\ 18$$

क्योंकि 24 स्वतन्त्र D मूल्य हैं, अत $n=24$, और परिशिष्ट भ का सदर्भ यह दर्शाता है कि P, 0 01 और 0 001 के बीच है ।

यह बहुत महत्वपूर्ण है कि इस प्रकार की समस्या मे,जैसी कि यह है, दो प्रतिदर्शों के बीच स्वतन्त्रता के अभाव को पहचानना चाहिये । यदि हम सामान्य प्रविधि का अनुसरण करते जो $\bar{X}_1 = 8\ 22$ प्रतिशत, $\bar{X}_2 = 8\ 03$ प्रतिशत, और $\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 0\ 092$ प्रतिशत का परिकलन करते हुए, प्रतिदर्शों को स्वतन्त्र मानती है, तो हम

$$t = \frac{8\ 22 - 8\ 03}{0\ 092} = \frac{0\ 19}{0\ 092} = 2\ 07$$

प्राप्त कर लेते, जिसमें, $n=48$ के लिये, $0.025 < P < 0.05$ है। प्रथम प्राप्त सभाव्यता से यह सभाव्यता अत्यधिक भिन्न है। वास्तव म, यदि कोई व्यक्ति 0.02 या 0.01 स्तर का सार्थकता की कसौटी के रूप में प्रयोग करता तो दो प्रतिदर्शो की स्वतन्त्रता की पूर्व-धारणा करने वाली विधि उसे गलती से "सार्थक नही" इस निष्कर्ष पर ले जाती।

जब दो प्रतिदर्शो की स्वतन्त्रता की पूर्वधारणा वाली विधि का प्रयोग किया जाता है जब कि वे वास्तव मे स्वतन्त्र नही होते, तो सम्भव परिणामो को विकल्प रूप मे[20] $\hat{\sigma}_{\bar{X}D}$ लिखकर स्पष्ट किया जा सकता है,

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\bar{X}_1}+\hat{\sigma}^2_{\bar{X}_2}-2r\hat{\sigma}_{\bar{X}_1}\hat{\sigma}_{\bar{X}_2}},$$

जब दो प्रतिदर्शो के मध्य सहसम्बन्ध r है। यदि संक्षिप्त रूप का, जो स्वातन्त्र्य की कल्पना करता है प्रयोग किया जाए

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\bar{X}_1}+\hat{\sigma}^2_{\bar{X}_2}}$$

तो यदि आंकडो के दो समुच्चयो के बीच सहसम्बन्ध धनात्मक हो तो $\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ का मूल्य बहुत अधिक होगा और जब ऋणात्मक सहसम्बन्ध विद्यमान हो तो बहुत कम। स्वतन्त्रता के अभाव की उपेक्षा हमें सार्थक अन्तर की घोषणा करने म उस समय असफल कर देगी जब r धनात्मक है और अन्तर की सार्थकता को गलती से घोषणा करने को विवश करेगी जब r ऋणात्मक है। अधिकतर समस्याओ में जिनमें युग्म बनाना अन्तर्निहित है, सहसम्बन्ध धनात्मक होगा, परन्तु कभी कभी ऐसी स्थितियाँ आती है जिनमे सहसम्बन्ध ऋणात्मक होता है। किसी भी परिस्थिति में, जब अन्तर्निहित युग्म बनते हैं, तो दो श्रेणियो के बीच सहसम्बन्ध की विद्यमानता लगभग निश्चित होती है। सयोग सहसम्बन्ध से, जो $N_1=N_2$ वाली दो श्रेणियो के बीच दृष्टिगोचर हो जाए और जिसे स्वन्त्र समझा जाता है, हमारा कोई सम्बन्ध नही है।

उपसंहार

इस अध्याय मे "दीर्घ-सख्या विधियों" और "अल्प-सख्या विधियो" मे अन्तर करने का कोई प्रयास नही किया गया है। कारण यह है कि जब σ ज्ञात हो तो छोटे या बडे किसी भी आकार के प्रतिदर्शो के लिये प्रसामान्य वक्र उपयुक्त है। जब σ का पता नही हो, और इसके स्थान पर जब $\hat{\sigma}$ का प्रयोग किया जाए, तब t बटन ("अल्प-सख्या विधि") सर्वथा उचित प्रयोज्य बटन है। जैसे-जैसे n म वृद्धि होती है, t बटन प्रसामान्य वक्र के निकट पहुँचता है ताकि दीर्घ प्रतिदर्शों के लिये कई बार प्रसामान्य बटन का प्रयोग किया जाता है। तो भी, जब n दीर्घ भी हो, तो प्रसामान्य वक्र एक सन्निकटन होता है। कई बार जब प्रतिदर्श दीर्घ हो तो σ के आकलन के रूप मे $\hat{\sigma}$ की अपेक्षा s का प्रयोग किया जाता है। दीर्घ प्रतिदर्शो के लिये s तथा $\hat{\sigma}$ के बीच सख्यात्मक अन्तर मामूली-सा है, परन्तु σ के आकलन के तौर पर s का प्रयोग नही करना चाहिये।

क्योकि इस अध्याय मे वर्णित विधियाँ लघु प्रतिदर्शों पर एकदम उतनी ही लागू होती हैं जितनी कि दीर्घ प्रतिदर्शों पर, अत प्रश्न उत्पन्न हो सकता है दीर्घ प्रतिदर्शो का

20 दोनो रूप पूर्णरूपेण समान हैं, परन्तु r वाले व्यजक मे कही अधिक परिकलन की आवश्यकता होती है। अगूरफल आँकडो के लिए, $r=+0.577$, $\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=0.061$ का प्रयोग करके, जो $\hat{\sigma}_{XD}$ के मूल्य से सहमत है।

प्रयोग करने का कष्ट क्यो करें ? उत्तर यह है कि जब दीर्घ प्रतिदर्शो का प्रयोग किया जाता तो एक निर्दिष्ट सम्भाव्यता स्तर पर सार्थकता प्राप्त करने के लिए लघुतर प्रेक्षित अन्तर $\bar{Y}-\bar{Y}_g$ या $\bar{Y}_1-\bar{Y}_2$ आवश्यक होता है । यह सत्य है, (1) क्योकि प्रतिदर्श आकार मे वृद्धि के साथ-साथ $\hat{\sigma}_{\bar{Y}}$ (अथवा $\hat{\sigma}_{\bar{Y}}$) तथा $\hat{\sigma}_{\bar{Y}_1-\bar{Y}_2}$ मे कम होने की प्रवृत्ति होती है, जबकि $\bar{Y}-\bar{Y}_g$ और $\bar{Y}_1-\bar{Y}_2$ की कम होने की अनुरूप प्रवृत्ति नही होती, क्योकि उनमे या तो वृद्धि हो सकती है या कमी, और, (2) क्योकि निर्दिष्ट सम्भाव्यता स्तर के लिये आवश्यक t मूल्य मे तब कमी आती है जब n मे वृद्धि होती है। कई बार लघु प्रतिदर्शो का प्रयोग करने के परिणामस्वरूप कोई व्यक्ति इस परिणाम पर पहुँच सकता है कि प्रेक्षित अन्तर सार्थक नही है, जब, यदि दीर्घ प्रतिदर्शो का प्रयोग किया गया होता तो अन्तर (जो कि सम्भवत स्वय बदल जाता) सार्थक हुआ होता ।

इस अध्याय मे वर्णित परीक्षणो मे यह निश्चय करने का काम किया गया है कि सांख्यिकीय अन्तर उपस्थित थे या नही । इस पर ध्यान देना उपयोगी है कि सांख्यिकीय अन्तरो के विपरीत, जातीय अन्तर विद्यमान हो सकते है, और जब जातीय अन्तर विद्यमान है तब सांख्यिकीय अन्तर उपस्थित हो भी सकता है और नही भी । जातीय अन्तर प्रकारगत वास्तविक अन्तर होता है और उदाहरणार्थ, पुरुषो और स्त्रियो, विभिन्न प्रकार की लकडी के रेलपथ जोडो या विभिन्न प्रक्रियाओ द्वारा सुरक्षित या तांबा अथवा जस्ती स्टील की छतो की कीलो का हवाला दे सकता है। इस अध्याय मे पहले निर्दिष्ट, सरचना स्टील के उत्पादन बिन्दुओ के परीक्षण उस अवस्था के उदाहरण हैं जहां कि जातीय अन्तर तथा सांख्यिकीय अन्तर दोनो विद्यमान थे; स्रोत 1 से प्राप्त इस्पात, स्रोत 2 से प्राप्त इस्पात की अपेक्षा हल्का-भार पदार्थ था। यदि खरगोशो के समूह तथा गिनी सुअरो के समूह के प्रतिक्रिया समयो के परीक्षण किये जाते तो यह बिल्कुल सम्भव है कि प्रतिक्रिया समयो मे सांख्यिकीय रूप से सार्थक अन्तर विद्यमान न होता, चाहे दोनो समूह जातीय तौर से भिन्न है ।

25

सांख्यिकीय सार्थकता II : अनुपात तथा काईवर्ग परीक्षण

इस अध्याय मे हम यादृच्छिक प्रतिदर्शो द्वारा प्राप्त अनुपातो से सम्बन्ध रखने वाले सार्थकता परीक्षणो पर विचार करेगे हम काईवर्ग (chi square) परीक्षण के कुछ विशेष पहलुओ की ओर भी ध्यान देंगे। एक ही अध्याय मे इन दोनो विषयो को मिलान का कारण यह है कि X^2 परीक्षण तथा अनुपातो से सम्बन्ध रखने वाले सन्निकट परीक्षण सर्वसम परिणामो पर पहुँचने की वैकल्पिक विधियाँ है। यह बात इस अध्याय के दूसरे भाग मे स्पष्ट होगी।

भाग 1 अनुपात

यादृच्छिक प्रतिदर्शो से प्राप्त अनुपातो से सम्बन्ध रखने वाले विचार-विमर्श के निम्न विषय होगे पहला, प्रतिदर्श अनुपात (p) तथा समष्टि म अनुपात (π) के बीच अन्तर की सार्थकता जबकि समष्टि मे अनुपात ज्ञात है, दूसरे, π की विश्वास्यता सीमाएँ जबकि केवल p तथा N ज्ञात है, तथा अन्तिम, दो यादृच्छिक प्रतिदर्शो (p_1 तथा p_2) के अनुपाता के बीच अन्तर की सार्थकता।

p तथा π मे अन्तर की सार्थकता

यथातथ परीक्षण, $\pi = 0\ 50$—सगमरमर के एक बडे सव्यूहन (assortment) मे आधे काले है तथा आधे सफेद। सगमरमर रग के सिवाय किसी भी अन्य बात मे एक दूसरे से भिन्न नही है। काले सगमरमर को "घटना" (occurrence) तथा सफेद सगमरमर को "अ-घटना" (non-occurrence) (अर्थात् काले की अ-घटना) मान कर और समष्टि मे अ-घटनाओ के अनुपात[1] को सूचित करने के लिए τ का तथा घटनाओ के अनुपात को सूचित करने के लिए π का प्रयोग करके, हम प्राप्त करते है $\pi = 0\ 50$ तथा $\tau = 0\ 50$. कल्पना कीजिये कि 10 सगमरमरो का एक प्रतिदर्श प्रस्तुत किया गया है, जिसमे 9 काले सगमरमर है। तब हमारे पास घटनाओ की सख्या, $a = 9$, अ-घटनाओ की

---

1 जब किसी समष्टि में घटनाओं की सख्या (α) तथा अ घटनाओ की सख्या (β) ज्ञात हैं तो

$$\pi = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \text{ तथा } \tau = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

इनसे यह स्पष्ट है कि $\pi + \tau = 1\ 0$ तथा $\tau = 1 - \pi$.

सख्या, $b=1$; घटनाओ का अनुपात, $p=0.90$, अ-घटनाओ का अनुपात, $q=0.10$ है। ध्यान दीजिए कि

$$p=\frac{a}{a+b}=\frac{a}{N}, \quad q=\frac{b}{a+b}=\frac{b}{N},$$

$$p+q=1\ 0$$

$P=0\ 05$ को कसौटी के रूप मे प्रयोग करके हमे इस प्रमेय की परीक्षा करनी चाहिये कि प्रतिदर्श उस समष्टि से यादृच्छिक है जिसका $\pi=0\ 50$ व्यजक

$$(\tau B+\pi A)^{10}$$

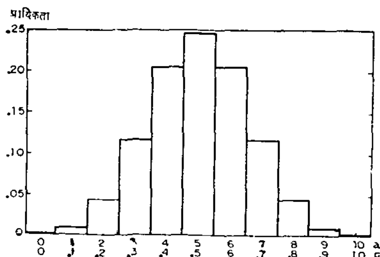
मे A तथा B, जिनका कोई आंकिक मान नही है, क्रमश: घटना तथा अ-घटना को सूचित करने के काम म लाये गये है। इस व्यजक के अनुसार $N=10$ के प्रतिदर्शो मे a बराबर हो सकता है 0, 1, 2,........., 10 के तथा $\tau=0$, 0 1, 0 2,..... , 1.0 के। क्योंकि $\tau=0\ 50$ तथा $\tau=0\ 50$,

$$\begin{aligned}(\tau B+\pi A)^{10} &= (0.50B+0\ 50\ A)^{10},\\ &= (0\ 50B)^{10}+10(0\ 50B)^{9}(0.50A)\\ &\quad +45(0\ 50B)^{8}(0\ 50A)^{2}+120(0\ 50B)^{7}(0\ 50A)^{3}\\ &\quad +210(0\ 50B)^{6}(0\ 50A)^{4}+252(0\ 50B)^{5}(0\ 50A)^{5}\\ &\quad +210(0\ 50B)^{4}(0\ 50A)^{6}+120(0\ 50B)^{3}(0\ 50A)^{7}\\ &\quad +45(0\ 50B)^{2}(0\ 50A)^{8}+10(0\ 50B)(0\ 50A)^{9}\\ &\quad +(0\ 50A)^{10}\end{aligned}$$

निर्दिष्ट परिकलनो को पुरा करने तथा परिणामो को स्तम्भाकार रूप मे रखने से हमे निम्न प्राप्त होते है

काले गोलों की घटनाओं की सख्या	काले गोलों की घटनाओं का अनुपात	प्राथमिक
a	p	
0	0	0 0010
1	0 1	0 0098
2	0 2	0 0439
3	0 3	0 1172
4	0 4	0 2051
5	0 5	0 2461
6	0 6	0 2051
7	0 7	0 1172
8	0 8	0 0439
9	0 9	0 0098
10	1 0	0 0010
		1 0000

पूर्ववर्ती वर्णन से यह प्रतीत होता है कि 9 या 10 काले सगमरमर वाले) यादृच्छिक प्रतिदर्शों को प्राप्त करने की प्रायिकता 0 0098 + 0 0010=0 0108 है। यह चार्ट 25 1 मे बिल्कुल दायी ओर दो दण्डिकाओ द्वारा प्रकट किया गया है। क्योकि हमारे पास यह विश्वास करने का कोई कारण नही है कि प्रतिदर्शों म हमेशा, समष्टि के अनुपात की अपेक्षा, काले सगमरमरा का वडा अनुपात होगा, इसलिए हम ऐसे ही एक या शून्य काले गोलो की प्रायिकता पर विचार करते हैं जो भी 0 0108 है और जो चार्ट 2 1 म बिल्कुल बायी ओर दो दण्डिकाओ द्वारा प्रकट की गई है। इसलिए 9 या अधिक तथा



चार्ट 25 1 10 के प्रतिदर्शों मे a तथा p के मानो की घटनाओ की प्रायिकता जब π=0 50 । $(0\ 50\ B+0\ 50A)^{10}=0\ 0010B^{10}+0\ 0098B^9A+0.0439B^8A^2+0\ 1172B^7A^3+0\ 2051B^6A^4+0\ 2461B^5A^5+0\ 2051B^4A^6+0\ 1172B^3A^7+0\ 0439B^2A^8+0\ 0098BA^9+0\ 0010A^{10}$ के प्रसार से प्राप्त।

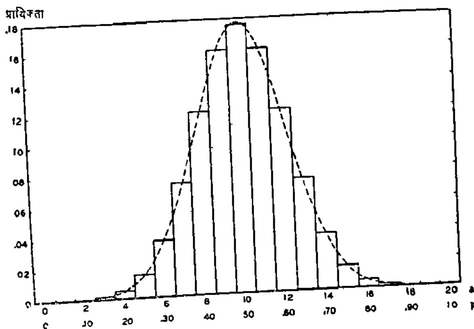
1 या कम काले सगमरमरो की प्रायिकता 0 0216 है। हम 0 05 की कसौटी को प्रयोग मे लाकर इस प्रमेय को अस्वीकृत करते हैं कि प्रतिदर्श उस समष्टि से यादृच्छिक था, जिसका π=0 50 है। स्मरण रखिए कि इस कसौटी के आधारपर, हमारे पाँच प्रतिशत निष्कर्षों मे प्रथम प्रकार की त्रुटियाँ होगी।

यदि हम 0 01 को अपनी कसौटी के रूप मे काम मे ला रहे होते, तो हमे अपनी परिकल्पना को अस्वीकृत न करना पडता। यदि हम 0 01 को अपनी कसौटी के रूप मे काम मे ला रहे होते और हमारा सम्बन्ध उन प्रतिदर्शों से होता जिनमे 10 (या शून्य) काले गोले होते, तो प्रायिकता 0 0020 होती और हम परिकल्पना को अस्वीकृत कर देते।

सन्निकट परीक्षण, π=0 50—इस बात की ओर पहले ही निर्देश किया जा चुका है (देखिए पृष्ठ 523-527) कि द्विपद की सीमा प्रसामान्य वक्र है जैसे ही द्विपद की घात अनन्तता तक पहुँचती है। व्यावहारिक प्रयोजन के लिए, प्रसामान्य वक्र को द्विपद।

$$(0\ 50B+0\ 50A)^N,$$

का प्राय पर्याप्त अच्छा विवरण समझा जाता है, जब $N \geq 20$ । चार्ट 25 2 मे एक प्रसामान्य वक्र दिखाया है जो $(0\ 50B+0\ 50A)^{20}$ के साथ आसजित है। जैसा हम बाद मे देखेंगे, प्रसामान्य वक्र द्वारा द्विपद का प्रत्यक्ष रूप मे अच्छा वर्णन इस बात की गारटी नही है कि प्रसामान्य वक्र के प्रयोग मे जो प्रक्रिया अन्तर्निहित है, उसका वही परिणाम निकलेगा जो द्विपद का।



चार्ट 25 2. के साथ $(0\ 50B+0\ 50A)^{20}$ आसजित प्रसामान्य वक्र।

यदि द्विपद के लिए प्रसामान्य वक्र प्रतिस्थापित किया जा सकता है तो हम प्रतिदर्श प्रतिशतता σ_p के मानक विचलन का परिकलन कर सकते है,

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{p-\pi}{\sigma_p}$$

का मान निश्चित कर सकते हैं तथा अध्याय 24 के समान $\bar{X}-\bar{X}_p$ का परीक्षण प्रारम्भ कर सकते है जब σ ज्ञात हो। यदि हमारे पास बडी सख्या मे प्रतिदर्श अनुपात $(p_1, p_2, p_3, \ldots p_k)$ होते, जो सभी एक ही समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्शों से होते, तो हम

$$\sqrt{\frac{(p_1-\pi)^2+(p_2-\pi)^2+ \quad +(p_k-\pi)^2}{k}}$$

से उन अनुपातों के मानक विचलन का परिकलन कर सकते थे। इस प्रकार के p मानों का बड़ी संख्या में होना बहुत असाधारण है किन्तु यह दर्शाया[2] जा सकता है कि जब π ज्ञात हो, तो यादृच्छिक प्रतिदर्शों से p की मानक त्रुटि

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi\chi}{N}}$$

है। इसके वैकल्पिक रूप निम्न है, जो कभी कभी उपयोगी होते हैं

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{N}} = \sqrt{\frac{\pi-\pi^2}{N}}$$

आइए हम देखें कि सन्निकट परीक्षण हमें उसी परिणाम पर पहुँचाता है या नहीं जिस पर हम सगरम्मरों के यथातथ परीक्षण ने पहुँचाया था, जिसमें $\pi=0.50$, $a=9$, $p=0.90$ तथा $N=10$ था। पहले हम

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{10}} = 0.158$$

का परिकलन करते हैं और तब

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{p-\pi}{\sigma p} = \frac{0.90-0.50}{0.158} = \frac{0.40}{0.158} = 2.53$$

परिशिष्ट ज से, जो प्रमामान्य वक्र के दो सिरों में क्षेत्रों को दर्शाता है, हमें पता चलता है कि $P = 0.0114$ यद्यपि P का यह मान, द्विपद के प्रयोग द्वारा प्राप्त 0.0216 के मान की अपेक्षा कम है तो भी हमारा परिणाम वही है यदि हमारी कसौटी 0.05 है, तो परिकल्पना अस्वीकृत हो जाती है। *तो भी यह ध्यान दें कि यदि 0.02 को कसौटी के रूप में काम में लाया जाता तो यथातथ विधि हमें परिकल्पना को स्वीकृत करने के लिए कहती, जबकि सन्निकट प्रविधि यह बतलाती है कि परिकल्पना को अस्वीकृत करना चाहिए।*

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{a-\pi N}{\sigma_a}$$

को प्रयोग में लाकर a तथा πN में (प्रतिदर्श में घटनाओं की संख्या यदि प्रतिदर्श में घटनाओं का वही अनुपात था जो समष्टि में था) अन्तर की सार्थकता के परीक्षण में सन्निकट परीक्षण का एक उपयोगी वैकल्पिक रूप सम्मिलित है जहाँ[3] $\sigma_a = \sqrt{N\pi\chi}$। हमारी समस्या के लिए

$$\sigma_a = \sqrt{10(0.50)(0.50)} = 1.58,$$

तथा

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{a-\pi N}{\sigma_a} = \frac{9-(0.50)10}{1.58} = 2.53$$

---

2 परिशिष्ट ध, परिच्छेद 25.1 देखिये।

3 σ_a के लिए व्यंजक के विकास के निमित्त, परिशिष्ट ध, परिच्छेद 25.1 देखिए।

यह, निःसंदेह, वही $\frac{x}{\sigma}$ मान है जो हमें उस समय प्राप्त हुआ था, जब P तथा π की तुलना की गई थी। परिणाम भी वही है। परिकल्पना अस्वीकार की जाती है।

यद्यपि प्रसामान्य वक्र द्वारा बतायी गई प्रायिकता अशुद्ध थी, तो भी सन्निकट परीक्षण से हम उसी परिणाम पर पहुँच गये, जिस पर यथातथ परीक्षण से पहुँचे थे—इस तथ्य से एक मनोरंजक प्रश्न उपस्थित होता है जब π=0 50, तो किन शर्तों के अन्तर्गत द्विपद के लिए प्रसामान्य वक्र का प्रतिस्थापन किया जाए और परिकल्पना के बारे में उसी परिणाम पर पहुँचा जाए? उत्तर निम्न बातों पर निर्भर करता है (1) प्रतिदर्श का परिमाण, तथा (2) उस सार्थकता की कसौटी जो काम में लायी जा रही है। क्योंकि प्रसामान्य वक्र के प्रयोग से प्राप्त प्रायिकता हमेशा बहुत कम[4] होती है, जब π=0 50, तो $p-\pi$ (या $a-\pi N$) परीक्षण का प्रयोग हम उस परिकल्पना को स्वीकृत नहीं करने देगा जिसे द्विपद ने हमें अस्वीकृत करने के लिए कहा है। कभी-कभी $p-\pi$, या $a-\pi N$, परीक्षण उस परिकल्पना को अस्वीकृत करने का निर्देश करेगा, जिसे द्विपद का प्रयोग स्वीकार्य सिद्ध करेगा। उस स्थिति के बारे में विचार करें जब π=0 50, N=60, a=38 (p=0 64) और कसौटी P=0 05। द्विपद को काम में लाने से यह पता चलता है कि $a \leqq 22$ या $a \geqq 38$ को प्राप्त करने की प्रायिकता[5] 0 052 है और यह परिकल्पना (कि प्रतिदर्श उस समष्टि से यादृच्छिक है जिसका π=0 50) स्वीकृत है। प्रसामान्य वक्र को काम में लाने पर, प्रायिकता[6] 0 039 मिलती है, और उससे यह प्रदर्शित होता है कि परिकल्पना को अस्वीकार किया जाना चाहिए।[7]

येट्स का शोधन—येट्स का उद्देश्य प्रसामान्य वक्र के प्रयोग से प्राप्त प्रायिकता को बढ़ाने के लिए प्रसामान्य वक्र पर इस शोधन को लागू करना था ताकि यह प्रायिकता द्विपद के प्रयोग से प्राप्त प्रायिकता के अधिक से अधिक अनुरूप हो। यदि येट्स के शोधन को अभी-अभी बतलाये गये निदर्शी आंकड़ों पर लागू किया जाए तो प्रायिकता 0 039 से बढ़ कर 0 053 हो जाती है और परिणाम वही रहता है

---

4 मूल पाठ में दिये गए विभिन्न निदर्शों में यह स्थिति दिखाई पड़गी। पाद-टिप्पणी 7 में उल्लिखित संदर्भ में इसकी एक व्याख्या दी गई है।

5 प्रायिकता एच० जी० रोमिग, *50—100 बायनोमियल टेबल्स*, जान विली एण्ड सन्ज न्यूयार्क, 1953, की एक सारणी से प्राप्त की जा सकती है।

6 परिकलन है

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{a-\pi N}{\sigma_a} = \frac{38-30}{\sqrt{60(0\ 50)(0\ 50)}} = 2\ 066$$

परिशिष्ट ज के संकेत द्वारा, P का मान 0 039 दिखाई दिया है।

7. इस मूल पाठ में येट्स के शोधन की व्यवस्था नहीं की गई है, क्योंकि (उन कारणों से जो पीछे स्पष्ट होंगे) इसके प्रयोग का समर्थन नहीं किया गया है। येट्स के शोधन की एक व्याख्या एफ० ई० क्रास्टन, *एलिमेन्टरी स्टैटिस्टिक्स विद एप्लिकेशन्स इन मेडिसिन एन्ड दि बायलाजिकल साइन्सिस*, डावर प्रकाशन, इन्का०, न्यूयार्क, 1959, पृष्ठ 255—257, पर दी गई है।

जैसे कि मानो द्विपद का प्रयोग किया गया हो। तो भी यह ध्यान मे रखिए कि येट्स के शोधन के प्रयोग ने *अतिशोधन* कर डाला है, अर्थात् प्रायिकता द्विपद से प्राप्त प्रायिकता की अपेक्षा अधिक बडी है। यह महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि येट्स के शोधन के साथ प्रसामान्य वक्र के प्रयोग का कभी-कभी यह परिणाम होगा कि उस परिकल्पना को स्वीकार कर लिया जायेगा जिसके बारे मे द्विपद (तथा अशोधित सामान्य वक्र का प्रयोग !) यह दर्शायेगा कि उसे अस्वीकृत किया जाना चाहिए। उदाहरणार्थ $\pi=0\ 50$, $N=25$ $a=4(p=0\ 16)$ तथा कसौटी $P=0\ 001$ है। द्विपद का प्रयोग करने पर, $a\leq4$ या $a\geq21$ को प्राप्त करने की प्रायिकता 0 00091 पायी गई है। प्रसामान्य सन्निकटन से P का एक मान 0 0007 प्राप्त हुआ है। येट्स के शोधन का प्रयोग करने से P का यह मान बढ कर 0 00137 हो जाता है। इस अवस्था म अशोधित प्रसामान्य सन्निकटन उस द्विपद के अनुरूप है, जिसमे यह सकेत होता है कि परिकल्पना को अस्वीकृत कर देना चाहिए। येट्स के शोधन का प्रयोग प्रायिकता को इस सीमा तक बढा देता है कि परिकल्पना स्वीकार हो जाएगी।

यथातथ परीक्षण के लिए सारणी, जब $\pi=0\ 50$—अभी-अभी किए गए व्यापक परिकलनो तथा 0 05, 0 02, 0 01, तथा 0 001 स्तरो के सकेत से यह पता चलता है कि जबकि प्रसामान्य वक्र के प्रयोग से साधारणतया वही परिणाम निकलता है जो मानो, द्विपद के प्रयोग से निकला हो तो भी हमेशा ही हर तरह से यह अवस्था नही होती। इसके अतिरिक्त, येटस के शोधन के प्रयोग से कभी-कभी इतना अधिक अतिशोधन हो जाता है कि परिकल्पना को स्वीकार करने का परिणाम द्विपद पर आधारित परिणाम से भिन्न होगा।

एक सभव हल सम्भवत पाठक को सूझा हो। वह है, $a-\pi N$ परीक्षण येट्स के शोधन के साथ तथा उसके बिना किया जाए। जब दोनो प्रविधियो से एक ही परिणाम निकल, तो वह परिणाम वही होगा जो मानो द्विपद के प्रयोग से निकला हो। जैसा कि हम पहले ही जानते है, यह इसलिए सत्य है क्योकि शोधन किए बिना $a=\pi N$ परीक्षण से जो P मान प्राप्त होता है वह द्विपद द्वारा प्राप्त मान की अपेक्षा छोटा होता है, जब कि येट्स के शोधन द्वारा $a-\pi N$ परीक्षण से जो P मान प्राप्त होता है वह द्विपद द्वारा प्राप्त मान की अपेक्षा बडा होता है। *इस हल मे यह कठिनाई है कि प्राय* परस्पर विरोधी परिणाम निकलते है।[8] दोनो प्रविधियों के जब कभी भिन्न परिणाम निकलते है, उस समय द्विपद का आश्रय लेना पडता है।

विचाराधीन प्रकार की समस्या के लिए, येट्स के शोधन मे $\frac{|a-\pi N|-\frac{1}{2}}{\sigma_a}$ का परिकलन आता है, *जहाँ* || *का अभिप्राय है, "निरपेक्ष मान को लीजिए,' जो परिशिष्ट ज मे दूँ दिए। उपरिलिखित निदश के लिए*

$$\frac{|a-\pi N|-\frac{1}{2}}{\sigma_a}=\frac{|38-30|-\frac{1}{2}}{\sqrt{60(0\ 50\ (0\ 50)}}=1\ 936$$

परिशिष्ट ज से, $P=0\ 053$

8 एक और उदाहरण जब $P=0\ 05$ को कसौटी के रूप मे काम मे लाया जाता है और $\pi=0\ 50$, $N=100$, तथा $a=40$,

सारणी 25.1

N के निर्दिष्ट मानो के लिए चुने हुए निचले तथा उपरले प्रायिकता बिन्दुओ पर a के मान
$p = 0.50$

इस सारणी के प्रयोग के सम्बन्ध मे टिप्पणियाँ (1) निचले प्रायिकता बिन्दु के लिए दिखाये हुए प्रत्येक a के मान की, तथा, इसी तरह, दिखाये हुए मान मे छोटे सभी a मानो की निर्दिष्ट प्रायिकता है या कम, (2) उपरले प्रायिकता बिन्दु के लिए दर्शाये हुए प्रत्येक a मान की तथा इसी प्रकार दिखाये हुए मान से बड़े सभी a मानो की निर्दिष्ट प्रायिकता है या कम ।

	$P \leq 0.05$		$P \leq 0.02$		$P \leq 0.01$		$P \leq 0.001$	
N	निम्न 0.025 बिन्दु	उच्च 0.025 बिन्दु	निम्न 0.01 बिन्दु	उच्च 0.01 बिन्दु	निम्न 0.005 बिन्दु	उच्च 0.005 बिन्दु	निम्न 0.0005 बिन्दु	उच्च 0.0005 बिन्दु
6	0	6						
7	0	7	0	7				
8	0	8	0	8	0	8		
9	1	8	0	9	0	9		
10	1	9	0	10	0	10		
11	1	10	1	10	0	11	0	11
[illegible]		10	1	11	1	11	0	12
[illegible]		11	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	13
14	[illegible]	[illegible]	2	[illegible]	1	[illegible]	0	14
15	3	12	2	13		[illegible]	1	14
16	3	13	2	14	4	14	1	15
[illegible]	4	13	3	14	[illegible]	[illegible]	1	16
18	4	14	3	[illegible]	3	[illegible]	1	17
[illegible]	4	[illegible]	4	[illegible]	3	[illegible]		17
		[illegible]	4	[illegible]	3	[illegible]	2	18
[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	[illegible]	4	[illegible]	2	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	5	[illegible]	4	15	3	19
	6	[illegible]		[illegible]	4	[illegible]	3	20
[illegible]	6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	21
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5	[illegible]	4	21
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	20	[illegible]	[illegible]	4	22
	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]	4	23
28	8	[illegible]	[illegible]	21			5	23
29	8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7		5	24
[illegible]	9	[illegible]	8	[illegible]	7	3	5	25
[illegible]			8	[illegible]	7	24	6	25
			8	[illegible]	8	24	6	[illegible]
	[illegible]		9	24	8	25	6	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	9	[illegible]	9	[illegible]	7	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	10	25	9	26		[illegible]
	[illegible]	2	10	26	9	27		[illegible]
			10	[illegible]	10		8	29
[illegible]			[illegible]	[illegible]	10	[illegible]	[illegible]	30
[illegible]			11	[illegible]	11	[illegible]	[illegible]	31
[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]			31
[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		32
	[illegible]	[illegible]	[illegible]		12	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	33
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	31	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]				[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]	34	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	37	17	[illegible]	[illegible]	41
[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]	41	[illegible]	44
[illegible]	[illegible]	41	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	18	47
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	47	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2	[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]	51	[illegible]	52	4	[illegible]
[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]		[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]
		[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	64
[illegible]		[illegible]		63	[illegible]	[illegible]	33	67

सबसे अच्छा समाधान जहां भी सम्भव हो द्विपद को काम में लाना है। पहले बतायी हुई प्रविधियों का अनुसरण करने पर द्विपदों का लगभग $N=20$ या 30 तक प्रसार करना कठिन नहीं है किन्तु उससे परे प्रसार बहुत विस्तृत हो जाता है। आजकल ऐसी पुस्तक उपलब्ध हैं जिनसे कोई भी व्यक्ति (1) $N=2$ से $N=49$ तक के लिए एक एक के अन्तर से तथा (2) $N=50$ से $N=100$ तक के लिए पाँच पाँच के अन्तर से द्विपदों[9] की मदों के मानों को पढ़ सकता है। 0 50 को छोड़कर r के अन्य मान दिए हुए हैं, किन्तु इस समय अपने विचार विमर्श में हम केवल $r=0\ 50$ में रुचि रखते हैं। इन सारणियों के आधार पर सारणी 25 1 बनायी गई है जो प्रायिकता के विभिन्न बिन्दुओं पर तथा N के कुछ चयित मानों के लिए a का मान दर्शाती है। जब इस प्रकार की सारणी उपलब्ध है तो किसी भी व्यक्ति का द्विपद के प्रसार के परिश्रम से बचने के लिए येट्स के शोधन से शोधित या अशोधित किसी भी प्रकार के प्रसामान्य वक्र के प्रयोग की आवश्यकता नहीं। न ही द्विपद के प्रसार की आवश्यकता है क्योंकि सारणी 25 1 से इस प्रकार के प्रसारों के परिणाम प्राप्त हो जाते है।

उन प्रतिदर्शों के लिए जिनमें $N>100$ प्रसामान्य सन्निकटन को तब तक काम में लाना पड़ेगा जब तक कि कोई ऐसा संगठन जिसमें परिकलन की व्यापक सुविधाएँ प्राप्त हैं। द्विपदों की प्रसारित सारणियाँ के प्राप्त कराने का प्रबन्ध नहीं करता

यथातथ परीक्षण $r=0\ 50$—सिगरेट की एक कम्पनी ने एक जाँच के परिणामों को छापा। इस जाँच में नाक तथा गले की चिकित्सा में विशेषज्ञ आठ चिकित्सकों द्वारा उस कम्पनी के तथा उस कम्पनी के दूसरे तीन प्रतियोगियों के उत्पादनों पर निर्णय दिया गया था। आठ डाक्टरों में से चार ने कम्पनी की सिगरेट को अच्छा बताया जिसे हम छाप संख्या 1 कहेंगे दो ने स० 2 को अधिक अच्छा बतलाया स० 3 को किसी ने अच्छा नहीं बतलाया दो ने स० 4 को अधिक अच्छा बतलाया। चारों छापों के बीच यदि कोई भेद न होता तो प्रत्येक के चयन का समान अवसर होता जिससे कि छाप संख्या 1 के अधिक अच्छा बताए जाने की प्रायिकता 0 25 होती। $r=0\ 25$ अब हम

$$(0\ 75B+0\ 25A)^8$$

---

9 ये हैं (1) नेशनल ब्यूरो आफ स्टैंडर्ड्स *टेबल्स आफ दि बायनोमियल प्रॉबेबिलिटी डिस्ट्रिब्यूशन* वाशिंगटन 1949 तथा (2) एच० जी० रोमिग *50—100 बायनोमियल टेबल्स* जान विली एण्ड सन्ज न्यूयार्क 1953। इन सदर्भों में प्रयुक्त सकेत इस मूल पाठ में प्रयुक्त सकेतों से भिन्न हैं। तुल्यांक निम्न हैं

यह पाठ	सदर्भ (1)	सदर्भ (2)
a	r	x
N	n	n
r	p	p

पाठक को यह याद रखने की प्रेरणा दी जाती है कि जब वह 1 में से संचयी प्रायिकता घटा कर प्रायिकताओं के उन संचयनों को उलट रहा हो जो इन सदर्भों में दिए हुए हैं तो उसे (1) सारणीगत a मान में से एक *कम करना* चाहिए जब मूल संचयन या अधिक प्रकार का हो जैसा कि ब्यूरो आफ स्टैंडर्ड्स वाल्यूम में है और (2) सारणीगत a मान में एक *बढ़ाना* चाहिए जब मूल संचयन या कम प्रकार का हो जैसा कि रोमिग की पुस्तक में है।

व्यंजक के उन पदों का मान निकालना चाहते हैं जिनमें A^4, A^5 A^6 A^7, तथा A^8 सम्मिलित है। पहले की तरह, A एक घटना को सूचित करता है, इस उदाहरण में यह घटना है छाप संख्या 1 का अधिक अच्छा माना जाना, और B सूचित करता है एक अ-घटना को।

सारणी 25 2 द्विपद के नौ पदों में से प्रत्येक की प्रायिकता दर्शाती है। अन्तिम पाँच पदों की प्रायिकताओं का योग 0 1138 है, जो छाप संख्या 1 के लिए चार या अधिक प्रशसात्मक कथनों को प्राप्त करने की प्रायिकता है, यदि चारों छाप वास्तव में समान है। यह स्पष्ट है कि छाप संख्या 1 को सार्थक रूप में डाक्टरों के एक-चौथाई मतों से अधिक नहीं मिले। यदि प्रतिदर्श का परिमाण बडा होता, तो छाप स० 1 के पक्ष में महत्त्वपूर्ण भेद हुआ होता। ऐसा होने पर भी इस बात में विश्वास करने का कोई कारण नहीं है कि यदि N बडा होता तो p फिर भी 0 50 ही होता।

सारणी 25 2

$(0\ 75B+0\ 25A)^8$ व्यंजक के प्रत्येक पद की प्रायिकता

a घटनाओं की संख्या (छाप # 1 अधिमान्यता देने वाली संख्या)	p घटनाओं का अनुपात (छाप # 1 को अधिमान्यता देने वाला अनुपात)	व्यंजक	प्रायिकता
0	0	$(0\ 75B)^8$	0 1001
1	0 125	$8(0\ 75B)^7(0\ 25A)$	0 2670
2	0 250	$28(0\ 75B)^6(0\ 25A)^2$	0 3115
3	0 375	$56(0\ 75B)^5(0\ 25A)^3$	0 2076
4	0 500	$70(0\ 75B)^4(0\ 25A)^4$	0 0865
5	0 625	$56(0\ 75B)^3(0\ 25A)^5$	0 0231
6	0 750	$28(0\ 75B)^2(0\ 25A)^6$	0 0038
7	0 875	$8(0\ 75B)(0\ 25A)^7$	0 0004
8	1 000	$(0\ 25A)^8$	0 0000
योग			1 0000

इस बात को ध्यान में रखें कि पूर्ववर्ती विचार विमर्श में हमने द्विपद के केवल उन अन्तिम पाँच पदों पर विचार किया जिनके लिए पद थे $P-\pi \geqq 0\ 25$ हमने उस पहले पद की उपेक्षा की जो केवल अकेला है जिसके लिए $P-\pi \geqq -0\ 25$ है। ऐसी एक-पक्षीय परीक्षा का कारण यह है कि इस बात को जानने में हमारी दिलचस्पी थी कि क्या छाप स० 1 के सम्बन्ध में दी गई अधिमान्यताएँ सार्थक रूप में $\pi=0\ 25$ से अधिक हैं।

सन्निकट परीक्षण $\pi \neq 0\ 50$—जब अरबी घोडों की एक घुडसाल में लेखक को बताया गया "सारी की सारी 30 घोडियों के इस ऋतु में बछेड़े हुए। यह बात असाधारण है, क्योंकि एक ऋतु में साधारणतया केवल 70 से 80 प्रतिशत तक घोडियों के बछेड़े होते हैं।" अब क्योंकि $N=30$, $a=30$, $P=1\ 0$ और यदि π को 0 75 मान लिया

जाए, तो हम यह कह सकते हैं कि यह घटना कितनी असाधारण थी। हमे केवल उस पद का मान मालूम करना है जो पद व्यजक

$$(0.25B+0.75A)^{30}$$

मे A^{30} को सम्मिलित किए हुए है। इस व्यजक मे, पहले की तरह, A एक घटना (बछेड़े का जन्म) है और B अ-घटना। इस पद की प्रायिकता 0 00018 है, या 10 000 मे लगभग 2, और वास्तव मे अति आश्चर्यजनक घटना है। घुडसाल के स्वामी ने इस आश्चर्यजनक उत्पादन शक्ति का कोई कारण नही बताया, किन्तु कोई भी व्यक्ति इस परिकल्पना को अस्वीकृत करने मे युक्तिसगत रहेगा कि 1 0 का प्रेक्षित p समष्टि से लिए यादृच्छिक प्रतिदर्श पर आधारित था जिसे उसके भूतकालीन अनुभव के आधार पर प्रस्तुत किया गया था। यह बात फिर ध्यान मे रखे कि हमने एक पक्षीय परीक्षण किया है, क्योंकि हम जानना चाहते थे कि क्या $p=1.0$ सार्थक रूप मे $\pi=0.75$ से *अधिक है*।

आओ हम देखें कि क्या प्रसामान्य वक्र को विपमित द्विपद के स्थान पर काम मे लाया जा सकता है। क्योंकि $N=30$, इसलिए प्रतिदर्श पर्याप्त बडा है। तथापि π 0.75 है न कि 0 50, जैसाकि पहले था जब प्रसामान्य वक्र काम मे लाया गया था। हम परिकलन करते हैं

$$\sigma_p=\sqrt{\frac{\pi\nu}{N}}=\sqrt{\frac{(0.75)(0.25)}{30}}=0.079$$

तथा

$$\frac{x}{\sigma}=\frac{p-\pi}{\sigma_p}=\frac{1.00-0.75}{0.079}=3.16$$

परिशिष्ट छ से पता चलता है कि $\frac{x}{\sigma}=3.16$ का मान, एक सिरे मे, प्रस वक्र मे से 0 00097 से कम किन्तु 0 00069 से अधिक क्षेत्र को काटता है। इस सन्निकट प्रक्रिया से जो प्रायिकता प्राप्त होती है वह उस प्रायिकता से बहुत बडी है जो यथातथ प्रक्रिया से प्राप्त होती है, किन्तु p के बारे मे हमारा परिणाम वही है। यह बात हमे एक प्रश्न उठाने के लिये प्रेरित करती है जो वैसा ही है जैसा पहले उठाया गया था: जब $\pi\neq0.50$, तो किन अवस्थाओ मे प्रसामान्य वक्र द्विपद के स्थान पर काम मे लाया जा सकता है और परिकल्पना के बारे मे वही परिणाम प्राप्त किया जा सकता है? समस्या अब ज्यादा जटिल है, क्योंकि उत्तर निम्न बातो पर आश्रित है (1) π का मान, (2) प्रतिदर्श का परिमाण, और (3) सार्थकता की कसौटी जो काम मे लाई गई। हमारे उद्देश्यो के लिए यह ध्यान देना पर्याप्त होगा, प्रथम, कि किसी प्रदत्त N के लिए जब $\pi=0.50$ उस समय की अपेक्षा, जब $\pi\neq0.50$, प्रसामान्य वक्र द्विपद के कम सन्तोषजनक सन्निकट है। वास्तव मे जब $\pi\neq0.50$ है, तब प्रसामान्य वक्र के प्रयोग से कभी ऐसी प्रायिकता मिलेगी जो बहुत छोटी है और कभी ऐसी जो बहुत बडी। दूसरे, येट्स का शोधन कोई सहायता नही दे सकता, क्योंकि इसका उद्देश्य वे स्थितियाँ नही हैं जिनमे $\pi\neq0.50$।

यथातथ परीक्षण के लिए सारणियाँ जब $\pi \neq 0.50$—जिन स्थितियों मे $\pi \neq 0.50$, उनमे हमे सारणी 25 1 जैसी सारणियो की एक ऐसी श्रेणी की आवश्यकता है जिसमे से प्रत्येक π के भिन्न-भिन्न मान से सम्बन्ध रखती हो। एक प्रारम्भिक पाठ के लिए यह कार्य बहुत बडा है, और किसी भी स्थिति म, विषमित द्विपदी के पदों के मान पाद-टिप्पणी 9 मे उद्धृत दो सदर्भो से प्राप्त किए जा सकते है। उदाहरण के लिए, सारणी 25 3 तैयार की गई है, जो विभिन्न परिमाणो के प्रतिदर्शों के प्रायिकता बिन्दुओ के विषय मे है, जब $\pi = 0.20$ या $\pi = 0.80$

π की विश्वास्यता सीमाएँ

कभी कभी p का मान ज्ञात होता है, किन्तु π ज्ञात नही होता, और उन सीमाओ को बतलाना महत्त्वपूर्ण होता है जिनम π के घटित होने की आशा की जा सकती है। जैसाकि हम X की विश्वास्यता सीमाओ पर विचार-विमर्श करते हुए देख चुके हैं, हम *पहले यह निर्णय करना चाहिए कि हम कौनसी विश्वास्यता सीमाओ को चाहते हैं। निश्चय ही हम प्रतिदर्श के उस परिमाण को भी अवश्य जानना चाहिए जिससे p का परिकलन किया गया था।* हम पहले *एक सन्निकट प्रणाली* पर और फिर *यथातथ प्रणाली* पर विचार करेंगे।

एक सन्निकट प्रणाली—लगभग 23 वर्ष के प्रयोग के बाद, शिकागो, मिलवौकी, सेंट पाल तथा पैसिफिक रेलवे को पता चला कि "पूर्ण कोशिका" (full cell) प्रक्रिया से लगाये गये क्रियोसोट (creosote) द्वारा सुरक्षित लाल बलूत (oak) के 50 मे से 22 स्लीपर अभी भी अच्छी हालत म थे। इस प्रतिदर्श के लिए, $N=50$, $a=22$, तथा $p=0.44$ π की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ क्या है ? इन दो मानो को प्राप्त करने के लिए, हम निम्न व्यजक को काम म लाते हैं जो पहले भी काम मे लाया जा चुका है

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{p - \pi}{\sigma_p},$$

परन्तु हम इसे इस प्रकार लिखते है

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi - \pi^2}{N}}}.$$

हमे p तथा N मालूम है। परिशिष्ट ज या परिशिष्ट झ की अन्तिम पंक्ति से हम $\frac{x}{\sigma}$ का मान (1.96) मिलता है जो 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओ से संबद्ध है। अभी

दिये हुए समीकरण में तीन ज्ञात मान रखे गये हैं और इसे π के लिए हल किया गया है,[10] जो निम्नलिखित है

$$1.96 = \frac{0.44 - \pi}{\sqrt{\frac{\pi - \pi^2}{50}}},$$

$$3.8416 = \frac{0.1936 - 0.88\pi + \pi^2}{\frac{\pi - \pi^2}{50}},$$

$$\frac{3.8416\pi - 3.8416\pi^2}{50} = 0.1936 - 0.88\pi + \pi^2,$$

$$0.076832\pi - 0.076832\pi^2 = 0.1936 - 0.88\pi + \pi^2,$$

$$0.1936 - 0.956832\pi + 1.076832\pi^2 = 0,$$

$$\pi = \frac{0.671125}{2.153664} \text{ और } \frac{1.242539}{2.153664}, \text{ इसलिए}$$

$$\pi_1 = 0.312 \text{ और } \pi_2 = 0.577$$

जो कुछ हमने किया वह यह निर्धारण करना था (1) $\pi_1 = 0.312$, जिसकी स्थिति इस प्रकार है कि $p = 0.44$ प्रसामान्य वक्र के उच्च $2\frac{1}{2}$ प्रतिशत सिरे को $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi_1 q_1}{N}}\ \sqrt{\frac{(0.312)(0.688)}{50}} = 0.066$ के साथ π_1 के आसपास काटता है, तथा (2) $\pi_2 = 0.577$ जिसकी स्थिति इस प्रकार है कि $p = 0.44$ प्रसामान्य वक्र के निम्न $2\frac{1}{2}$ प्रतिशत सिरे को

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi_2 q_2}{N}} = \sqrt{\frac{(0.577)(0.423)}{50}} = 0.071$$ के साथ के आसपास π_2 काटता है। जो कुछ किया गया है उसे चार्ट 25.3 दर्शाता है।

---

10 $0.1936 - 0.956832\pi + 1.076832\pi^2$ द्विघातीय समीकरण निम्न परिकलन द्वारा हल किया गया है

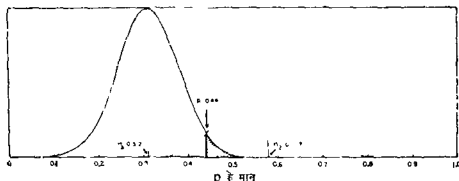
$$\pi = \frac{-(-0.956832) \pm \sqrt{(0.956832)^2 - 4(0.1936)(1.076832)}}{2(1.076832)}$$

यदि पहले समीकरण को इस प्रकार लिखा जाता

$$1.96 = \frac{a - \pi N}{\sqrt{N(\pi - \pi^2)}},$$

तो हमारे पास, प्रारम्भ में, दाईं ओर केवल पूर्णांक होगा।

जिस पद्धति का अभी वर्णन किया गया है उससे तभी सन्तोषजनक परिणाम प्राप्त होते हैं जब N बडा होता है तथा p का मान 0 50 से बहुत भिन्न नही होता। इसकी त्रुटि तब स्पष्ट होगी जब इसे हम निम्न उदाहरण म काम मे लायेंगे।



चार्ट 25 3 π की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ, जब $p = 0\ 44$ तथा $N = 50$, *जिन्हें σ_p तथा प्रसामान्य वक्रों के प्रयोग से निर्धारित किया गया है* क्रॉस रेखित (cross hatched) क्षेत्र बाएँ वक्र का 2 5 प्रतिशत है, बिन्दु चित्रित (stippled) क्षेत्र दाएँ वक्र का 2 5 प्रतिशत है।

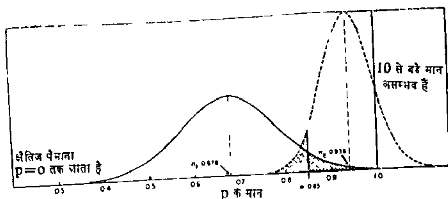
20 मेंढको म से प्रत्येक को मानक शक्ति (standard strength) का डिजिटैलिस (digitalis) लगाया गया था। परिणामस्वरूप, उनम से 17 का द्रुत प्रकुचन रुक गया (व मर गये)। *दूसरे मेंढकों को आधी शक्ति का डिजिटैलिस एव तथाकथित आधी-शक्ति वाला डिजिटैलिस लगाया गया था,* किन्तु इस उदाहरण के सम्बन्ध मे उन परीक्षणो के परिणामो से हमारा कोई वास्ता नही। जिन मेंढको को पूर्ण शक्ति का डिजिटैलिस दिया गया था उनको समूह के लिए, $N = 20$ तथा $p = 0\ 85$ π की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ क्या हैं? पहले की तरह हल प्रारम्भ करने पर पहले हम परिशिष्ट भ की अन्तिम पक्ति से 1 645 का $\frac{x}{\sigma}$ मान प्राप्त होता है और उसके बाद हम लिखते हैं

$$1\ 645 = \frac{0\ 85 - \pi}{\sqrt{\frac{\pi - \pi^2}{20}}},$$

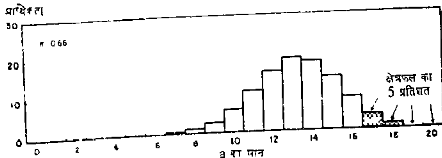
जिसे हल करने पर

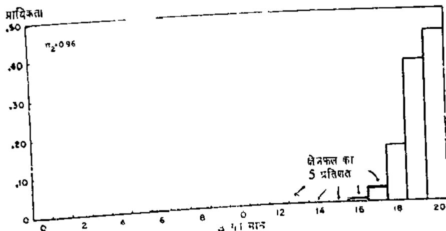
$$\pi_1 = 0\ 678 \text{ तथा } \pi_2 = 0\ 938$$

प्राप्त होता है। ये परिणाम तब तक ठीक मालूम पडते हैं, जब तक हम चार्ट 25 4 को नही देखते, जो उस बात को दर्शाता है जिसे हम कर चुके हैं। अब यह तुरन्त ही स्पष्ट हो जाता है कि *प्रसामान्य वक्रों का प्रयोग ठीक नही सिद्ध किया जा सकता,* विशेष रूप से π को निर्धारित करने के लिए। दाइ ओर का प्रसामान्य वक्र यह दर्शाता है कि $p > 1\ 0$ के मान होगे, जो, निश्चय ही, असम्भव है।



चार्ट 25 4 – को 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं का असन्तोषजनक सन्निकटन जब $p = 0\ 85$ तथा N 20, जिसे σ_p तथा प्रसामान्य वक्रों के प्रयोग से निर्धारित किया गया है। क्रास रेखित क्षेत्र बाएं वक्र का 5 प्रतिशत है बिन्दु-चिन्हित क्षेत्र दाएं वक्र का 5 प्रतिशत है।





चार्ट 25 5 – की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ जब $N=20$ तथा $a=17$ ($p=0\ 85$) जिसका निर्धारण $(\pi B+\pi A)^N$ व्यंजक के प्रयोग से किया गया है। आंकड़े सारणी 25 4 तथा 25 5 से।

सारणी 25.4

व्यंजक $(\pi B+\pi A)^{20}$ में a के मानों की प्रायिकताएँ* तथा संचयी प्रायिकताएँ जब π = 0.65, 0.66, 0.657, तथा 0.656

($a \geqq 17$ की प्रायिकता गहरे टाइप में दर्शायी गई है)

(a)	π = 0.65		π = 0.66		π = 0.657		π = 0.656	
	प्रायिकता	संचयी प्रायिकता	प्रायिकता	संचयी प्रायिकता	प्रायिकता	संचयी प्रायिकता	प्रायिकता	संचयी प्रायिकता
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000				
1	0.0000	>0.9999	0.0000	>0.9999				
2	0.0000	>0.9999	0.0000	>0.9999				
3	0.0000	>0.9999	0.0000	>0.9999				
4	0.0000	>0.9999	0.0000	>0.9999				
5	0.0003	>0.9999	0.0002	>0.9999				
6	0.0012	0.9997	0.0009	0.9998	इस निर्णय के लिए $a=0$ से $a=16$ तक की प्रायिकताओं की ज़रूरत नहीं है।			
7	0.0045	0.9985	0.0034	0.9989				
8	0.0136	0.9940	0.0108	0.9955				
9	0.0336	0.9804	0.0280	0.9846				
10	0.0686	0.9468	0.0598	0.9566				
11	0.1158	0.8782	0.1056	0.8968				
12	0.1614	0.7624	0.1537	0.7913				
13	0.1844	0.6010	0.1836	0.6376				
14	0.1712	0.4166	0.1782	0.4540				
15	0.1272	0.2454	0.1384	0.2758				
16	0.0738	0.1182	0.0839	0.1374				
17	0.0323	**0.0441**	0.0383	**0.0535**	0.0364	**0.0506**	0.0358	**0.0497**
18	0.0100	0.0121	0.0124	0.0152	0.0116	0.0142	0.0114	0.0139
19	0.0020	0.0021	0.0025	0.0028	0.0023	0.0026	0.0023	0.0025
20	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002

* असंचयी प्रायिकताओं का परिकलन सारणी 23.8 में दिखाये गये ढंग से किया जा सकता है। जब π दो दशमलवों से अधिक नहीं होती, तो प्रायिकताएँ तथा संचयी प्रायिकताएँ नेशनल ब्यूरो आफ स्टैंडर्ड्स, *टेबल्स आफ दि बायनौमियल प्रोबेबिलिटी डिस्ट्रिब्यूशन*, वाशिंगटन, 1949 से प्राप्त की जा सकती हैं। असंचयी अंकों का पूर्णांकन करने से पहले ही असंचयी अंकों से ऊपर दिखाये हुए संचयी अंक प्राप्त किये गये थे।

यथातथ विधि—पूर्ण शक्ति की डिजिटेलिस के आंकडो के लिए π की विश्वास्यता सीमाओ के यथातथ निर्धारण के लिए और अधिक परिश्रम साध्य प्रक्रिया की आवश्यकता होती है। π_1 के निर्धारण पर पहले विचार करके हम π के उस मान को अवश्य निश्चित करना चाहिए जिसको यदि

$$(-B=-A)^{20}$$

व्यजक म रखा जाए तो पता चल कि $a=17$ $(p=0\ 85)$ द्विपद के उच्च 5 प्रतिशत सिरे को काटता है। इसके लिए क्रमिक सन्निकट की आवश्यकता है, और हम पहले $\pi=0.65$ को परखेगे। सारणी 25 4 से यह देखा जा सकता है कि, द्विपद $(0.35B+0\ 65A)^{20}$ मे, $a\geq 17$ को प्राप्त करने की प्रायिकता 0 0444 है। क्योकि यह प्रायिकता 0 05 से कम है, अत हमे π के कुछ बडे मान की परख करनी चाहिए। उसी सारणी से यह मालूम पडता है कि, जब $\pi=0\ 66$, तो $a\geq 17$ का प्राप्त करने की प्रायिकता 0 0535 है। यदि π_1 के लिए दो दशमलव पर्याप्त है, तो हम यह परिणाम निकालगे कि π की निम्न प्रतिशत विश्वास्यता सीमा 0 66 है, जैसा कि चार्ट 25 5 ऊपरी के भाग मे दिखाया गया है। यदि

सारणी 25 5

व्यजक $(-B+\pi A)^{20}$ म a के मानो की प्रायिकताएँ* तथा सचयी प्रायिकताएँ, जब कि $\pi=$ 0 94, 0 95 तथा 0 96

($a\geq 17$ की प्रायिकता गहरे टाइप मे दिखाई गई है)

a	$\pi=0\ 94$		$\pi=0\ 95$		$\pi=0\ 96$	
	प्रायिकता	सचयी प्रायिकता	प्रायिकता	सचयी प्रायिकता	प्रायिकता	सचयी प्रायिकता
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000
1	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000
.	चार दशमलव तक सभी छोडी हुई प्रायिकताएँ शून्य हैं					
12	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000
13	0 0001	0 0001	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000
14	0 0008	0 0009	0 0003	0 0003	0 0001	0 0001
15	0 0048	0 0056	0 0022	0 0026	0 0009	0 0010
16	0 0233	0 0290	0 0133	0 0159	0 0065	0 0074
17	0 0860	**0 1150**	0 0596	**0 0755**	0 0365	**0.0439**
18	0 2246	0 3395	0 1887	0 2642	0 1458	0 1897
19	0 3703	0 7099	0 3774	0 6415	0 3683	0 5580
20	0 2901	1 0000	0 3585	1 0000	0 4420	1 0000

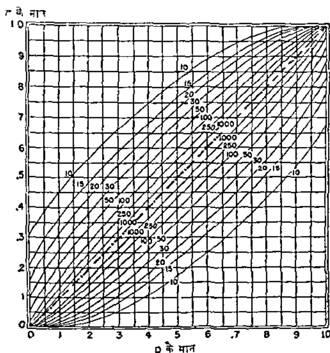
* सारणी 25.4 की पाद टिप्पणी देखिए।

π_1 के लिए तीन दशमलवों की आवश्यकता है, तो हम देखेंगे कि अगला मान जो हम π_1 के सम्बन्ध में परख सकते है 0.655 से अधिक होना चाहिए। 0.657 मान की परख की गई थी, जिसका परिणाम सारणी 25.4 के छठे तथा सातवें स्तम्भों में दिखाया गया है, $a \geqq 17$ के लिए प्रायिकता 0.0506 रखी गई है। इसके बाद, $\pi = 0.656$ की परख करने पर सारणी में यह पता चला है कि $a \geqq 17$ की प्रायिकता 0.0497 है। π_1 का मान 0.656 तथा 0.657 के बीच में स्थित है, किन्तु 0.657 की अपेक्षा 0.656 के अधिक निकट है।

π_2 की उच्च 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमा को प्राप्त करने के लिए, हम π के मान का निर्धारण करना चाहिए। π के इस मान को यदि

$$(\pi B + \pi A)^{20},$$

में रखा जाए तो पता चलेगा कि $a = 17$ $(p = 0.85)$ द्विपद के निचले 5 प्रतिशत सिरे को काटता है। क्योंकि सन्निकट विधि से π, 0.938 था, अतः हम पहले $\pi = 0.94$ की परख करेंगे। *सारणी 25.5 से पता चलता है कि $a \leqq 17$ में द्विपद का 0.1150 सम्मिलित* है, और उसके बाद हम $\pi = 0.95$ की परख करते हैं। π_2 के इस मान से $a \leqq 17$ की 0.0755 प्रायिकता निकलती है (देखिए सारणी 25.5), इसलिए अब हम $\pi = 0.96$ की परख प्रारम्भ करते है जिससे हम $a \leqq 17$ के लिए 0.0439 प्रायिकता मिलती है, जैसा कि सारणी 25.5 में दिखाया गया है। इस सबका यह परिणाम निकलता है कि $\pi_2 = 0.96$ और यह

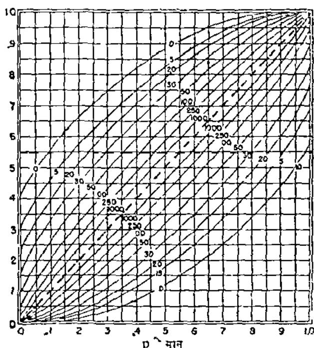


चार्ट 25.6 10 से 1,000 तक के विभिन्न आकारों के प्रतिदर्शों से प्राप्त p के मानों के लिए π की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ। चार्ट 25.7 के शीर्षक के बाद की टिप्पणी देखिए।

तथ्य चार्ट 25 5 के निम्न भाग मे दर्शाया गया है। 0 95 तथा 0 96 के बीच के π के मानों को भी परख कर देखा जा सकता है, परन्तु हम इसे यही समाप्त करते है। 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ [दो दशमलवों तक] π_1 0 66 तथा π_2=0 96 है।

π की विश्वास्यता सीमाओ को निर्धारित करने की यथातथ विधि के लिए प्रत्येक पृथक् निर्णय के लिए दो परख समुच्चया की आवश्यकता होती है। यह बात ध्यान मे रखनी चाहिए कि π_1 तथा π_2 के मानो जिनकी पहल परख होनी चाहिए के उपयोगी आकलन के लिए, σ_p को काम मे लाने वाला सन्निकट समाधान साधारणतया यथातथ समाधान से पहले आना चाहिए। यदि द्विपद सारणियाँ, जैसी कि पाद टिप्पणी 9 मे उल्लिखित है उपलब्ध है तो सन्निकट हल को छोडा जा सकता है।

बहुत से द्विपदो के प्रसारण के कठिन परिश्रम से बचने के लिए, क्लोपर तथा पियरसन ने आरेख तैयार किये हैं जो π की निम्न तथा उच्च 0 95 तथा 0 99 विश्वास्यता सीमाओ को पढ सकने की सुविधा प्रदान करते हैं। ये चार्ट 25 6 तथा 25 7 मे दर्शाये गये है।



चार्ट 25 7 10 से 1,000 तक के विभिन्न आकारों के प्रतिदर्शों से प्राप्त p के मानों के लिए π की 99 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ।

अनुमति लेकर यह प्रतिलिपि सी० जे० क्लोपर तथा ई० एस० पियरसन 'दि यूज आफ कौन्फिडंस आर फिडूशियल लिमिटस' *बायोमेट्रिका*, खण्ड 26, पृष्ठ 410 से उद्धृत है। पत्र व्यवहार द्वारा पियरसन ने यह सलाह दी है कि π के मान पूर्णतया शुद्ध नही हैं क्योंकि कुछ बिन्दुओं पर स्वर अन्तर्वेशन के द्वारा प्राप्त किये गए थे, प्रत्यक्ष परिकलन के द्वारा नहीं।

p_1 तथा p_2 मे अन्तर की सार्थकता

एक सन्निकट विधि—*पूर्ण कोशिका (full cell) प्रक्रिया द्वारा लगाय गए क्रियोसोट द्वारा सुरक्षित लाल बलूत (oak) के 50 स्लीपरों के बारे म पहले हवाला दिया गया* था। 23 वर्षों तक काम म लाय जाने के बाद, 22 अर्थात् 44 प्रतिशत स्लीपर अभी भी काम मे आ रहे थे। जब ये स्लीपर बिछाये गए थे, उसी समय "र्यूपिंग (Rueping)" प्रक्रिया द्वारा क्रियोसोट संसिक्त लाल बलूत के दूसरे 50 स्लीपर भी बिछाये गए थे। 23 वर्षों के गुजर जाने पर इन दूसरे स्लीपरो मे से 18 अर्थात् 36 प्रतिशत फिर भी काम मे आ रहे थे। अब हमारे पास दो प्रतिदर्श हैं पहले, जिस प्रतिदर्श मे "फुलसैल" प्रक्रिया काम मे लाई गई थी, उसम $N_1 = 50$, $a_1 = 22$, तथा $p_1 = 0\ 44$ था, दूसरे जिस प्रतिदर्श मे 'र्यूपिंग' प्रक्रिया काम मे लाई गई थी उसमे $N_2 = 50$, $a_2 = 18$, तथा $p_2 = 0\ 36$ था। हम जानना चाहते है कि क्या इन दो अनुपातो मे 0 05 स्तर पर महत्त्वपूर्ण भेद है।

प्रक्रिया तात्विक रूप से वही है जो दो प्रतिदर्श माध्यो के लिए काम मे लाई गई थी, हम भेद तथा भेद की मानक त्रुटि इन दोनो की परस्पर तुलना करेंगे। दो प्रतिशतताओ के बीच के भेद की मानक त्रुटि

$$\sigma_{p1-p2} = \sqrt{\sigma^2_{p1} + \sigma^2_{p2}},$$

$$= \sqrt{\frac{\pi\tau}{N_1} + \frac{\pi\tau}{N_2}}$$

है। अब हमे π मालूम नही है, तथा यदि हमे π मालूम होती तो हम $p_1 - p_2$ की सार्थकता की परीक्षा की अपेक्षा π के विरुद्ध p_1 की तथा π के विरुद्ध p_2 की परीक्षा लगभग निश्चित ही करना चाहते। क्योंकि हम π को नही जानते, इसलिये दोनो प्रतिदर्शों की जानकारी के आधार पर हम एक आकलन $\bar{p}$ करते हैं। इस प्रकार

$$\bar{p} = \frac{a_1 + a_2}{N_1 + N_2},$$

$$= \frac{22+18}{50+50} = 0\ 40$$

अब हम परिकलन करने की स्थिति मे हैं

$$\hat{\sigma}_{p1-p2} = \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{N_1} + \frac{\bar{p}\bar{q}}{N_2}},$$

$$= \sqrt{\frac{(0\ 40)(0\ 60)}{50} + \frac{(0\ 40)(0\ 60)}{50}},$$

$$= 0\ 098, \text{ तथा}$$

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{p_1 - p_2}{\hat{\sigma}_{p1-p2}} = \frac{0\ 44 - 0\ 36}{0.098} = \frac{0\ 08}{0.098} = 0.82.$$

परिशिष्ट ज के सकेत से, यह प्रतीत होता है कि $P=0.41$, और हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि p_1 तथा p_2 मे भेद महत्त्वपूर्ण नही है।

यथातथ विधि—जब वे दो प्रतिदर्श छोटे हैं, जिनसे p_1 तथा p_2 लिये गए हैं, तब उस सन्निकट विधि को यथातथ विधि के पक्ष मे छोड देना चाहिये जिसका अभी अभी वर्णन किया गया है। बाद मे इस अध्याय मे यह दिखाया जाएगा कि "2×2" सारणी के लिए काई-वर्ग परीक्षण ऊपर दिए p_1-p_2 परीक्षण के समरूप है। उसी समय यथातथ परीक्षण का वर्णन किया जायेगा।

भाग 2 : काईवर्ग परीक्षण

जैसा कि हम प्रयोग करेंगे वतमान विचार-विमर्श मे χ^2 परीक्षण अनुपातो की एक श्रेणी के योग से बना है जिसमे प्रत्येक अनुपात निम्न से प्राप्त किया गया है (1) प्रेक्षित बारबारता (f) तथा सम्बद्ध समष्टि या परिकलित बारबारता (f_c) के बीच के भेद को लेकर (2) इस भेद का वर्ग करके, और (3) वर्ग किये हुए भेद को f_c से भाग देकर। इस प्रकार,

$$\chi^2=\Sigma\frac{(f-f_c)^2}{f_c}$$

अध्याय 26 म हम काईवर्ग के थोडे भिन्न पहलू को काम मे लायेंगे, जब हम $\hat{\sigma}^2$ तथा σ^2 की तुलना करेंगे।

1×2 सारणी

सन्निकट विधि $-\chi^2$ परीक्षण तथा $p-\pi$ (या $a-\pi N$) परीक्षण की सर्वसमिका (identity) प्रदर्शित करने के लिए हम उस उदाहरण को काम मे लायेंगे जिसे इस अध्याय मे पहले काम म ला चुके हैं जिसमे 10 सगमरमरो का प्रतिदर्श आया था जिनमे से 9 काले थे। 0 05 को कसौटी के रूप मे काम मे लाकर, σ_p तथा σ_a के प्रयोग से भी हमने इस परिकल्पना का परीक्षण किया था कि प्रतिदर्श उस समष्टि से यादृच्छिक है जिसका $\pi=0.50$ है। यदि हम उसी परीक्षण को χ^2 के द्वारा करें तो हमारा परिकलन निम्नलिखित होगा

सगमरमर का रग	सगमरमरो की प्रेक्षित सख्या f	परिकलित सख्या यदि 1 1 अनुपात विद्यमान है f_c	$f-f_c$	$(f-f_c)^2$	$\frac{(f-f_c)^2}{f_c}$
काला .	9	5	+4	16	3 2
सफेद .	1	5	—4	16	3 2
योग	10	10	0	. .	6 4

यह एक 1×2 सारणी है क्योंकि प्रेक्षित बारबारताएँ 1 स्तम्भ तथा 2 पक्तियो को घेरे है। यह सबसे अधिक सादे प्रकार की एक-स्तम्भ सारणी है। इस सारणी के अनुसार

χ^2 का मान 6.4 है, और हम स्वातन्त्र्य मात्रा की उपयुक्त संख्या के लिए परिशिष्ट ज की मारणी के आधार पर χ^2 के ऐसे मान (या अधिक बड़े) की प्रायिकता निर्धारित कर सकते है। हमारी समस्या के लिए $n=1$, क्योंकि f-स्तम्भ में दो बक्सों में से एक में संख्या आसानी से लिखी जा सकती है। तथापि एक बार यह संख्या लिख दी जाती है, तो दूसरी संख्या तुरन्त निश्चित हो जाती है, क्योंकि योग 10 है। परिशिष्ट ज के आधार पर जब $n=1$ तथा $\chi^2=6.4$, तो यह देखा जा सकता है कि P का मान 0.01 से कुछ बड़ा है। यह तथ्य हमें इस सन्निकट परीक्षण के आधार पर परिकल्पना को निराकृत करने की प्रेरणा देता है। यदि χ^2 मानो [11] की एक अधिक विस्तृत सारणी उपलब्ध होती तो हमें पता चलता कि $P=0.0114$ ठीक वही जो उस परीक्षण से पता चला था जिसमें σ_p (या σ_a) सम्मिलित थे। सचाई यह है कि $p-\pi$ परीक्षण (या $a-\pi N$ परीक्षण) तथा χ^2 परीक्षण में समान अन्तिम P मान प्राप्त होना चाहिए। इस बात की ओर ध्यान दें कि $d-\pi$ (या $a-\pi N$) परीक्षण से जो $\frac{x}{\sigma}$ मान प्राप्त हुआ, वह χ^2 मान का वर्गमूल है। इस बात को और अधिक अच्छी तरह समझा जा सकता है यदि हम (परिशिष्ट झ की) t सारणी की अन्तिम पंक्ति को देखें, जो हमें प्रसामान्य बटन के लिए $\frac{x}{\sigma}$ मान देती है, और (परिशिष्ट ज की) χ^2 सारणी की प्रथम पंक्ति को देखें जो हमें χ^2 मान देती है जब $n=1$. किसी भी दिये हुए P मान के लिए χ^2 मान में सदा ही प्रसामान्य मान का वर्ग होगा।

परिशिष्ट ज की प्रथम पंक्ति में दिखाये हुए χ^2 के मान स्वातन्त्र्य के एक अंश (one degree of freedom) के लिए χ^2 के बटन से प्राप्त किये गये है, जो तथ्य चार्ट 25.8 में चित्रित है।

χ^2 परीक्षण किसी भी दिशा में प्रेक्षित बारबारताओं के बराबर या उनसे अधिक प्रेक्षित तथा परिकल्पित बारबारताओं के बीच असहमति पाने की प्रायिकता को प्रकट करता है। संगमरमरों के लिए 0.01 से कुछ अधिक के P मान ने 9 या 10 काले संगमरमरों की तथा 9 या 10 सफेद संगमरमरों को प्रायिकता को प्रस्तुत किया। यह तब भी सत्य है जब काईवर्ग के बटन का केवल एक सिरा (देखिए परिशिष्ट ज) अन्तर्निहित है, क्योंकि $f-f_e$ मानों का वर्ग किया गया था।

---

[11] इस प्रायिकता को हम परिशिष्ट ज की प्रसामान्य वक्र सारणी में χ को देखकर, χ^2 को नहीं, भी प्राप्त कर सकते है।

चार्ट 25.8 $n=1$, $n=2$, $n=5$, तथा $n=10$ के लिए χ^2-बटन। ध्यान दें कि चार्ट के दोनों भागों के लिए पृथक् पैमाने काम में लाये गए हैं। कोटियों का परिकलन

$$Y_c=\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}(x^2)^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n-2}{2}\right)!}$$

व्यंजक से किया गया था जिसे हल करना कठिन नहीं है यदि लघुगणक काम में लाये जाएँ। χ^2 बटन का बहुलक $\chi^2=n-2$ पर है, सिवाय इसके कि जब $n=1$, और तब बहुलक शून्य पर है, जैसाकि ऊपर देखा जा सकता है, माध्य $\chi^2=n$ पर है। जैसाकि चार्ट के निचले भाग में दर्शाया गया है, बटन का वैषम्य कम होता जाता है, ज्यों-ज्यों स्वतन्त्रता अंशों की संख्या बढ़ती है।

कोटि की ऊंचाई

अनन्तता को प्राप्त होता है
जैसे x^2, 0 तक पहुंचता है

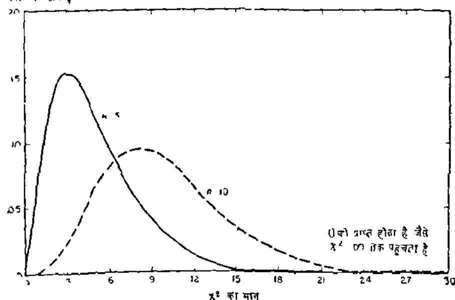
n=2

n=1

0 को प्राप्त होता है
जैसे x^2, ∞ तक पहुंचता है

0 2 4 6 8 10 12

x^2 का मान



चार्ट 25 8 χ^2 बटन, जब $n=1$, $n=2$, $n=5$, तथा $n=10$, वर्णनात्मक आख्यान के लिए पृष्ठ 610 देखें।

यथातथ विधि—जिस कारण $p-\pi$ (या $a-\pi N$) परीक्षण सन्निकट परीक्षण था उसी कारण काईवर्ग भी सन्निकट परीक्षण है यह मान लिया गया था कि प्रतिदर्श मानो का अविरत बटन है जब कि सचाई यह है कि $(0.50B+0.50A)^{10}$ द्विपद के केवल 11 पद ही हो सकते है। यथातथ प्रक्रिया का पृष्ठ 588 —590 पर वर्णन किया गया था। इसे यहाँ नही दोहराया जायेगा। χ^2 को काम मे लाकर सन्निकट विधि को यथार्थ विधि के स्थान पर प्रयुक्त किया जा सकता है और उसी परिणाम पर पहुँचा जा सकता है कि ठीक उन्ही दशाओ मे $p-\pi$ (या $a-\pi N$) परीक्षण काम मे लाया जा सकता है और इन दशाओ पर $\pi=0.50$ के लिए पृष्ठ 592—594 पर तथा $\pi \neq 0.50$ के लिए पृष्ठ 596—600 पर विचार किया गया था।[11]

π की विश्वास्यता सीमाएँ—सम्भाव्य रुचि के रूप मे यह बात ध्यान मे रखी जा सकती है कि χ^2 को π की विश्वास्यता सीमाएँ निर्धारित करने के काम मे लाया जा सकता है। व्यजक है

$$\chi^2 = \frac{\left(a - \frac{\pi}{1-\pi} b\right)^2}{\frac{\pi}{1-\pi} N}$$

और यह पहले दी हुई सन्निकट विधि के यथातथ समरूप है।

2×2 सारणी

सन्निकट विधि—जैसा कि अभी स्पष्ट किया जायेगा, 2×2 सारणी के लिए χ^2 परीक्षण से वही प्रायिकता प्राप्त होती है और इसलिए परिकल्पना के बारे मे वही परिणाम प्राप्त होता है जो p_1-p_2 परीक्षण से प्राप्त होता है, जिसका पहले वर्णन किया गया था। इस बात को स्पष्ट करने के लिए हम उसी दृष्टान्त का प्रयोग करेंगे जो p_1-p_2 परीक्षण के लिए प्रयोग किया गया था। आँकडे अब सारणी 25.6 के ढग पर व्यवस्थित किये गये है जिसे हम 2×2 सारणी कहते हैं, क्योंकि इसमें दो स्तम्भ हैं और प्रेक्षित आकडो की दो पक्तियाँ है। उन दो-स्तम्भ सारणियो पर पीछे विचार किया जायेगा जिनमे दो से अधिक पक्तिया हैं।

सारणी 25.6 मे समष्टि बारबारताएँ नही है किन्तु हमे परिकलित बारबारताएँ इस बात को ध्यान मे रखने से प्राप्त होती है कि यदि दोनो प्रक्रियाओ से परिरक्षित स्लीपरो मे से परीक्षण काल की समाप्ति पर काम मे आने वाले स्लीपरो की सख्या मे कोई भेद नही रहता, तो हमे आशा होगी कि प्रथम बक्स (पक्ति 1, स्तम्भ 1) मे 'फुलसैल' प्रक्रिया से परिरक्षित 50 स्लीपरो के $\frac{40}{100}$ होगे और दूसरे बक्स (पक्ति 1, स्तम्भ 2) मे उसी प्रक्रिया से परिरक्षित 50 स्लीपरो के $\frac{60}{100}$ होगे। इसी तरह से, तीसरे बक्स (पक्ति 2, स्तम्भ 1) मे ट्यूपिग प्रक्रिया से परिरक्षित 50 स्लीपरो के $\frac{40}{100}$ होगे और चौथे बक्स (पक्ति 2, स्तम्भ 2) मे इसी प्रक्रिया से परिरक्षित स्लीपरो के $\frac{60}{100}$ होगे। इन f_c मानो

12 एक रुचिकर विकास के लिए जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, खण्ड 60 सख्या 309, मार्च 1965, पृष्ठ 344—346 पर विलियम सी० बायड द्वारा लिखित 'ए नोमोग्राम फार काइस्क्वेयर' देखिए।

सारणी 25 6

परिरक्षी (preservative) क्रियोसोट को लगाने के लिए प्रयुक्त विधि से 23 वर्ष के परिक्षण काल की समाप्ति पर काम मे आ रहे रेल मार्ग स्लीपर

वह प्रक्रिया जिसके द्वारा क्रियोसोट लगाया गया था	परीक्षण काल के बाद प्रयोग मे आ रहे		योग
	हाँ	नही	
पूर्ण कोशिका (full cell)	22	28	50
रयूपिग (Rueping)	18	32	50
योग	40	60	100

आकडे प्रोसीडिंग्स ऑफ अमेरिकन वुड प्रिज़र्वर्स एसोसिएशन, 1935 पृष्ठ 133 - 134 से।

का परिकलन सारणी 25 7 के स्तम्भ (2) तथा (3) मे किया गया है। उसी सारणी के स्तम्भ (4), (5), (6), तथा (7) मे χ^2 का परिकलन किया गया है और $\chi^2 = 0\ 67$ है। सीमान्त योगो की व्याख्या के साथ, 2×2 सारणी मे $n=1$ है, जैसाकि अगले अनुच्छेद मे स्पष्ट किया जायगा। जब $n=1$ तथा $\chi^2=0\ 67$ तो परिशिष्ट ज से पता चलता है कि $0\ 30 < P < 0\ 50$ है। χ^2 की और अधिक विस्तृत सारणी से पता चलेगा कि $P=0\ 41$, यह वही परिणाम है जो $p_1—p_2$ परीक्षण से प्राप्त हुआ था। पुन ध्यान दें कि $p_1—p_2$ परीक्षण के लिए $\frac{x}{\sigma}$ मान 0 82 (या 0 816 तीन दशमलवों तक) था जो 0 67 के χ^2 मान का वर्गमूल है।

सारणी 25 7

सारणी 25 6 के आकड़ो के लिए χ^2 का परिकलन

सैल	परिकलित बारबारताओ का निर्धारण		f	$f-f_c$	$(f-f_c)^2$	$\frac{(f-f_c)^2}{f_c}$
	पक्ति तथा स्तम्भ योगो का गुणनफल	f_c स्तम्भ(2) ÷ 100				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
पक्ति 1, स्तम्भ 1	$50\times40=2{,}000$	20	22	+2	4	0 20
पक्ति 1, स्तम्भ 2	$50\times60=3{,}000$	30	28	2	4	0 133
पक्ति 2, स्तम्भ 1	$50\times40=2{,}000$	20	18	−2	4	0 20
पक्ति 2, स्तम्भ 2	$50\times60=3{,}000$	30	32	+2	4	0 133
योग		100	100	0	.	0 67

जब f_c प्रविष्टियाँ पूर्णांक न हो, तब उन्हें एक दशमलव तक ले जाना चाहिए जिससे कि Σf_c तथा Σf मे अन्तर 1 जितना न हो। वास्तव मे, स्तम्भ (3) की f_c सख्याओं मे से केवल एक का परिकलन करना जरूरी है। शेष सख्याएँ सारणी 25 6 के पक्ति तथा स्तम्भ के योगो मे से घटाकर प्राप्त की जा सकती हैं।

सीमान्त योगो की व्याख्या के साथ 2×2 सारणी के लिए $n=1$ है। यह तथ्य निम्न छोटी सारणी पर विचार करके स्पष्ट किया जा सकता है

		100
		150
130	120	250

इस सारणी के सीमान्त योग दिए हुए हैं किन्तु बक्सो मे कोई प्रविष्टियाँ नही हैं। यदि कोई सख्या किसी एक बक्स मे लिखी जाती है तो यह स्पष्ट होना चाहिए कि दूसरे तीन बक्सो की सख्याएँ तुरन्त निश्चित हो जाती हैं। यदि प्रथम बक्स मे 20 लिखते है तो निश्चय ही दूसरे बक्स की सख्या 80 तीसरे बक्स की 110 और चौथे बक्स की 40 होनी चाहिये। क्योकि हमे केवल एक बक्स मे सख्या लिखने की स्वतन्त्रता थी, इसलिए स्वातन्त्र्य की केवल एक मात्रा है। 2×2 से बडी सारणियो के लिए यही विधि हमे स्वातन्त्र्य की मात्रा की सख्या बतलायेगी, यदि सीमान्त योग निश्चित है। तथापि केवल

$$n-(R-1)(C-1)$$

को परिकलित कर लेना अधिक त्वरित है जिसम R पक्तियो की सख्या है और C स्तम्भो की सख्या है। निम्न सम्बन्ध रुचिकर हो सकता है

सीमान्त योगो के कारण खोई स्वातन्त्र्य की मात्राएँ[13]	$(R-1)+(C-1)+1$
स्वातन्त्र्य की शेष मात्राएँ, n	$(R-1)(C-1)$
योग (बक्सो की सख्या)	RC

सारणी 25 7 म दिखाए परिकलन रूप की आवश्यकता नही होती जब 2×2 सारणी के लिए χ^2 का परिकलन किया जाता है। यह यहा अन्तर्निहित प्रविधि को स्पष्ट करन के लिए दिया गया था। 2×2 सारणी के लिए χ^2 का मान निम्न व्यजक के प्रयोग से अधिक शीघ्रता से प्राप्त किया जा सकता है,

$$\chi^2=\frac{(a_1b_2-b_1a_2)^2N}{N_1N_2N_aN_b}$$

जिसमे सकेत बक्स तथा कुल बारम्बारताओ को बतलाते है जैसा कि नीचे दिखलाया गया है

a_1	b_1	N_1
a_2	b_2	N_2
N_a	N_b	N

सारणी 25 6 के आकडो के लिए

$$\chi^2=\frac{[(22)(32)-(28)(18)]^2 100}{(50)(50)(40)(60)},$$

13 प्रत्येक सीमान्त योग के कारण स्वातन्त्र्य की एक मात्रा खोई नहीं जाती। यदि कोई एक ऊर्ध्वाधर तथा कोई क्षैतिज योग (सवयोग को सम्मिलित करके) छोड दिया जाता है तो उन्हे शेष योगो के द्वारा दी गई जानकारी के आधार पर फिर से लिखा जा सकता है।

$$= \frac{(704-504)^2 100}{(2500)(2400)},$$

$$= \frac{4,000\ 000}{6,000,000} = 0\ 67$$

यह, निस्संदेह, वही मान है जो सारणी 25 7 मे प्राप्त किया गया था।

यथातथ प्रविधि—जब N छोटा होता है, तब χ^2 परीक्षण द्वारा दी हुई प्रायिकता बहुत छोटी होती है जिसका परिणाम यह होता है कि χ^2 परीक्षण परिकल्पना को अविश्वसनीय बना सकती है, जबकि यथातथ प्रविधि परिकल्पना को अविश्वसनीय न रहने दे।

प्रयोगशाला के जिन 16 पशुओ को पहले विषाणु का टीका लगाया जा चुका था, उनकी दो प्रकार की चिकित्सा से सम्बन्ध रखने वाले निम्न आँकडो पर विचार कीजिए।

उपचार	परिणाम		योग
	बच गये	मर गये	
#1	7	3	10
#2	0	6	6
योग	7	9	16

दो उपचारो के आँकडे इतने भिन्न प्रतीत होते है कि पाठक को यह मालूम पड सकता है कि साख्यिकीय परीक्षण लागू करना समय नष्ट करना है। तो भी 0 01 की कसौटी के रूप म काम मे लाकर हमे देखना चाहिए कि क्या दोनो उपचारो मे महत्त्वपूर्ण भेद है। हमारी परिकल्पना है कि 10 तथा 6 पशुओ के दो समूह बचे या मरे हुओ के अनुपातो के सम्बन्ध मे एक ही समष्टि से है। पहले काईवग परीक्षण को काम म लाकर हमे प्राप्त होता है

$$\chi^2 = \frac{(a_1b_2 - b_1a_2)\ N}{N_1N_2N_aN_b}$$

$$= \frac{[(7)(6)-(0)(3)]^2 16}{(10)(6)(7)(9)} = 7\ 47$$

$n=1$ के लिए यदि हम परिशिष्ट ञ को देखें तो पता चलेगा कि $P=0\ 01$ और तब इस सन्निकट परीक्षण के आधार पर हम यह परिणाम निकालेगे कि हमारी परिकल्पना अविश्वसनीय थी। तथापि प्रायिकता वास्तव म उससे अधिक बडी है जो χ^2 परीक्षण या p_1-p_2 परीक्षण से सूचित होती है, जो, जैसा कि हम पहले ही जानते है, वही है, जो इस प्रकार की समस्या के लिए χ^2 परीक्षण है।

जिस 2×2 सारणी के सीमान्त योग निश्चित है, उस सारणी के खमो मे बारबारताओ की किसी व्यवस्था की प्रायिकता

$$\frac{N_1!\ N_2!\ N_a!\ N_b!}{N!\ a_1!\ b_1!\ a_2!\ b_2!}$$

से प्राप्त की जा सकती है। यदि दोनो उपचारो मे प्राप्त होने वाले आँकडो के आधार पर इस व्यजक को हल किया जाए तो

$$\frac{10!\,6!\,7!\,9!}{16!\,7!\,3!\,0!\,6!}=0\ 0105$$

प्राप्त होता है। यह उस विशिष्ट विभिन्नता की प्रायिकता है जिसका प्रेक्षण किया गया था। यदि दोनो प्रतिदर्शों (उपचारो) के बीच कोई बडे अन्तर सम्भव है, तो उनकी प्रायिकताएँ इसमे जोडी जानी चाहिएँ। (यह याद होगा कि χ^2 परीक्षण तथा p_1-p_2 परीक्षण हमे प्रेक्षित अन्तर के *बराबर या बड* अन्तर की प्रायिकता प्रदान करता है।) सारणी 25 8 का प्रथम स्तम्भ उन सभी सम्भव सयोजनो को दिखाता है जिनसे हमारी समस्या के सीमान्त योग प्राप्त होग। वे कुल सात हैं। दूसरे स्तम्भ से यह देखा जा सकता है कि कोई भी सयोजन प्रेक्षित अन्तर से बडा और उसी दिशा म अन्तर नही दिखलाता। फिर भी सयोजन VII विपरीत दिशा मे अपेक्षाकृत बडा अन्तर दर्शाता है। हम इसलिए इसकी प्रायिकता भी निश्चित करत ह, जो 0 0009 है। यदि सयोजन I तथा VII की दोनो प्रायिकताओ का जोडा जाए तो 0 0114 प्राप्त होता है और हम उस परिणाम[14] पर पहुँचते है जो पहले के परिणाम से भिन्न है परिणामस्वरूप परिकल्पना का निराकरण नही हुआ।

सभव रुचि की दृष्टि से सारणी 25 8 सात सयोजनो मे से प्रत्येक की प्रायिकता दर्शाती है। ध्यान दीजिए कि सात प्रायिकताओ का योग 1 0000 है। पूर्णांकन के कारण सारणी 25 8 मे दर्शायी सात सख्याओ का योग 0 9999 है।

यदि हमारी रुचि केवल इस बात को जानने मे होती कि क्या उपचार स० 2 की अपेक्षा उपचार स० 1 ने बचे हुओ के सम्बन्ध मे अधिक बडा अनुपात दिखाया है, तो हम χ^2 परीक्षण से प्राप्त प्रायिकता को आधा कर देते। यह '0.005 से कम' है, और इसमे यह धारणा अन्तर्निहित है कि सभव मानो का बटन सममित है, किन्तु बात ऐसी नही है। शुद्ध प्रायिकता तो 0 0105 है, यह वह प्रायिकता है, जो सयोजन I के लिए सारणी 25 8 मे दिखायी गई है।

जब हम उस प्रकार के आँकडो को काम मे ला रहे हो जैसे हमे दो उपचारो के सम्बन्ध मे प्राप्त थे और हमे उस परिणाम का सामना करना पडा हो जो हमे अभी-अभी प्राप्त हुआ था, तो ऐसी व्यावहारिक स्थिति में हमे क्या करना चाहिए ? ऐसी स्थिति मे

14 छोटी बारबारताओ वाली 2×2 सारणियो से सम्बन्ध रखने वाले परिणामो पर पहुँचने का कार्य उस सारणी के प्रयोग से आसान हो सकता है, जिसे डी० जे० फिने तथा आर० लाश्चा ने तैयार किया था और जो चुने हुए प्रायिकता मानो पर a_2 के मानों को सार्थक दर्शाती है, जब a_1, N_1, तथा N_2 निश्चित हैं। $N_1+N_2=6$ से लेकर $N_1+N_2=30$ तक के परिसर की 2×2 सारणियो पर विचार के लिए व्यवस्था की गई है। ई० एस० पियर्सन तथा एच० ओ० हार्टले, *बायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स*, केम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लन्दन, 1954, पृ० 65—72 तथा 188—193 को देखिये। यह सारणी मूलत: *बायोमीट्रिका*, खण्ड 35, भाग 1 तथा 2, और खण्ड 40, भाग 1 तथा 2, मे दो भागो में प्रकाशित हुई थी।

सारणी 25 8

p_1, p_2 तथा $p_1 - p_2$ के मान और उन सात सयोजनो मे से प्रत्येक की प्रायिकता जिनके सीमान्त योग नीचे दिखाये गये हैं

सयोजन	पहले स्तम्भ की पक्ति योग का अनुपात तथा अन्तर	$\frac{N_1! N_2! N_a! N_b!}{N! a_1! b_1! a_2! b_2}$ से सयोजकता की प्रायिकता
I 7 | 3 || 10 0 | 6 || 6 7 | 9 || 16	$p_1 =$ 0 7 $p_, =$ 0 $p_1 - p_2 = +0$ 7	0 0105
II 6 | 4 || 10 1 | 5 || 6 7 | 9 || 16	$p_1 =$ 0 6 $p_2 =$ 0 17 $p_1 - p_2 = +0.43$	0 1101
III 5 | 5 || 10 2 | 4 || 6 7 | 9 || 16	$p_1 =$ 0 5 $p_2 =$ 0 33 $p_1 - p_2 = +0$ 17	0.3304
IV 4 | 6 || 10 3 | 3 || 6 7 | 9 || 16	$p_1 =$ 0 40 $y_2 =$ 0 50 $p_1 - p_2 =$ 0 10	0 3671
V 3 | 7 || 10 4 | 2 || 6 7 | 9 || 16	$p_1 =$ 0 30 $p_2 =$ 0 67 $p_1 - p_2 = -0$ 37	0 1573
VI 2 | 8 || 10 5 | 1 || 6 7 | 9 || 16	$p_1 =$ 0 20 $p_2 =$ 0 83 $p_1 - p_2 = -0$ 63	0 0236
VII 1 | 9 || 10 6 | 0 || 6 7 | 9 || 16	$p_1 =$ 0 10 $p_2 =$ 1 0 $p_1 - p_2 = -0$ 9	0 0009
योग..... ..	...	1 0000

निश्चय ही और अधिक प्रयोग करना ठीक है, सम्भवत बडे प्रतिदर्शों से सार्थक अन्तर दिखाई पड सकता है, या, विकल्प से, बडे प्रतिदर्श परिकल्पना को अविश्वसनीय सिद्ध करने मे असफल हो सकते है।

येट्स का शोधन—a—N परीक्षण के सम्बन्ध म उल्लिखित यह शोधन 2×2 सारणी[10] के लिए χ^2 परीक्षण पर भी लागू किया जा सकता है, जब कि वैषम्य विद्यमान न हो। प्रयोजन वही है जो पहले था सन्निकट परीक्षण म सुधार करना ताकि इससे प्राप्त होने वाली प्रायिकता यथातथ परीक्षण से अधिक सहमति प्रकट करे। येट्स के शोधन मे, यहा भी, अतिशोधन की प्रवृत्ति है।[16] दोना उपचारो के आँकडो के सम्बन्ध मे यदि येटस के शोधन का प्रयोग किया जाय, तो 0 025 से कुछ बडी प्रायिकता प्राप्त होती है, जो यथातथ विधि से प्राप्त प्रायिकता की अपेक्षा बहुत बडी है। जैसाकि पहले कहा जा चुका है, अतिशोधन की प्रवत्ति से कभी-कभी यह परिणाम निकलेगा कि अन्तर सार्थक नहीं था जबकि यथातथ प्रविधि से सार्थक अन्तर होने का सकेत मिलेगा।

1×2 से बड़ी $1\times R$ सारणियाँ

A 3×1 सारणी—अनेक वर्षों से कॉफी की बहुत सी किस्मो की ताजगी विज्ञापित लक्षण रही है। एक सस्था को यह मन्शा थि वह इस बात का पता लगाने का प्रयत्न करे कि क्या वास्तव म ताजगी से कॉफी के स्वाद म अन्तर आता है। इस उद्देश्य को पूरा करन के लिए एक पर्याप्त व्यापक खोज की गई। इसका एक पहलू था 52 चखने वाले, जिनमे से प्रत्यक को कॉफी के 6 प्याले दिय गये थे, जिनमे से 2 ताजी कॉफी के, 2 तीन सप्ताह पुरानी कॉफी के, और 2 पाच सप्ताह पुरानी कॉफी के थे। प्रत्येक चखने वाले से कहा गया था कि वह प्रत्यक प्याले की उसी जैसे दूसरे प्याले से जोडी मिलाये। अब इन छ प्यालो की 15 प्रकार से जोडी मिलाना सम्भव है। इन 15 प्रकारो मे से केवल एक ही प्रकार से प्यालो की तीनो जोडियो को ठीक-ठीक मिलाना सम्भव है। एक जोडी की ठीक से जोडी बनाने के छ ढग है और ठीक स जोडी न मिलाने के आठ ढग है। दो जोडो की ठीक-ठीक जोडी मिलाना सम्भव नही है। यदि ताजी, कुछ बासी तथा बासी कॉफी के स्वाद मे कोई अन्तर न होता, तो हम तीन, एक, तथा एक भी नही जोडो को 1 6 8 के अनुपात मे ठीक-ठीक जोडी मिलाने की आशा करते। सारणी 25 9 प्रेक्षित आँकडा तथा इन अनुपातो के आधार पर परिकलित बारबारताओं को दर्शाती है। सख्याओ के इन दो समुच्चयो से χ^2 का मान 46 08 पता चलता है। क्योंकि योग निश्चित है और प्रतिदर्श आँकडो की तीन श्रेणियाँ है[17] इसलिए $n=2$ (स्वातन्त्र्य के दो अशो के लिए χ का बटन चार्ट 25 8 मे दिखाया गया है।) परिशिष्ट ज से यह देखा जा सकता है

15 शोधन मे

$$\Sigma \frac{\{|f-f_c|-\frac{1}{2}\}^2}{f_c}$$

व्यजक से χ^2 का परिकलन सम्मिलित है। परिकलन के प्रयोजन के लिए अधिक सरल रूप उपलब्ध है। उसे यहाँ इसलिए नही दिया है क्योंकि येट्स के शोधन के प्रयोजन को उपयुक्त नही बताया गया है।

16 जर्नल ऑफ दि अमेरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन, दिसम्बर 1951, पृ० 490—501 के फेज ऐडलर द्वारा लिखित "येट्स करेक्शन एण्ड दि स्टैटिस्टीशियन्स" भी देखिये।

17 ध्यान म रखिए कि $(R-1)(C-1)$ व्यजक $1\times R$ सारणी पर लागू नही होता।

कि P का मान 0 001 से बहुत कम है और यह स्पष्ट है कि जोडियो के मिलान काकतालीय बटन स साथक रूप मे भिन्न है। स्पष्ट ही ताजी और बासी कॉफी मे भेद करना सभव है। तो भी एक बात विशेष रूप से ध्यान मे रखने योग्य है कि आँकडे कम्पनी द्वारा इस प्रकार प्रस्तुत किय गय थे कि जब केवल एक ही जोडे का ठीक जोडी मिलान हुआ था, उस समय जोडी मिलाने मे ताजी कॉफी के दो प्याल या तीन सप्ताह पुरानी कॉफी के दो प्याले या पाच सप्ताह पुरानी काफी के दो प्याले कितनी बार शामिल थे। इसके अतिरिक्त चखने वालो ने यह नही बताया कि जिन प्यालो की जोडियाँ मिलायी गई थी वे ताजी काफी के', 'कुछ बासी' के या "बासी के थे।

दूसरी $1 \times R$ सारणियाँ—प्रेक्षित आकडो के एक स्तम्भ तथा तीन स अधिक पक्तियो वाली सारणियो के लिए वैसी प्रविधि होगी जैसी कि सारणी 25 9 मे 1×3 सारणी के लिए दिखाई गई है। स्वातन्त्र्य की मात्राएँ $R-1$ होगी यदि केवल मात्र योग की अपक्षा और अधिक विशेषताओ के सम्बन्ध मे f तथा f_c मानो को सहमत न किया गया हो। एक पक्ति और C स्तम्भो वाली सारणियाँ बहुत कम मिलती है क्योकि वे

सारणी 25 9

ताजी, तीन सप्ताह पुरानी, तथा पाँच सप्ताह पुरानी काफी के प्यालो के जोडो की जोडी मिलाने के लिए / का परिकलन

ठीक जोडी मिलाये जोडा की सख्या	f	$\frac{f_c}{1\ 6\ 8}$	$f-f_c$	$(f-f_c)^2$	$\frac{(f-f)^2}{f_c}$
तीन	15	3 5	+11 5	132 25	37 79
एक	24	20 8	+ 3 2	10 24	0 49
एक भी नही	13	27.7	—14 7	216 09	7 80
सवयोग	52	52 0	0		46 08

सम्भवतया ऐसे अनुपात पाते हैं जिनका प्रयोग करना बहुत कठिन होता है। ऐसी सारणी को $1 \times R$ सारणी के रूप म ढाला जा सकता है।

$1 \times R$ सारणी के विशेष दृष्टान्त के रूप मे 'आसजन सौष्ठव" ("goodness of fit") **का परीक्षण**—अध्याय 23 मे एक प्रसामान्य वक्र को दूरी के लिए प्रथम वष हाई स्कूल की छात्राओ द्वारा किए गए बेस बाल के प्रक्षेपणो के आँकडो के साथ आसजित किया गया था। सारणी 25 10 के स्तम्भ (2) तथा (3) प्रेक्षित आँकडो तथा परिकलित बारम्बारताओ को दिखलाते हैं। सख्याओ के इन दो समुच्चयो से χ^2 का 6 65 मान प्राप्त हुआ है। अब $\bar{Y}$, s, तथा N के सम्बन्ध मे प्रेक्षित तथा आसजित आकडो को एक दूसरे से बलात मिलाया गया है। इसलिए स्वातन्त्र्य की तीन मात्राएँ कम हो गई। क्योकि प्रेक्षित आकडे 13 श्रेणियो मे है, इसलिए $n = 13 - 3 = 10$ $n = 10$ के लिए

χ^2 का वटन चार्ट 25 8 मे दिखाया गया है। परिशिष्ट ञ से यह पता चलता है कि P का मान 0 75 से अधिक किन्तु 0 80 मे कम है, और हम इस परिणाम पर पहुँचने हे कि प्रेक्षित तथा परिकलित वारवारताओ के बीच सहमति सन्तोषजनक है, हमारे पास इस परिकल्पना पर सदेह करने का कोई कारण नही है कि प्रतिदर्श प्रसामान्य समष्टि मे यादृच्छिक था।

सारणी 25.10

दूरी के लिए प्रथम वर्ष हाई स्कूल की लड़कियों द्वारा किये गये बेसबाल के प्रक्षेपणो के साथ आसंजित प्रसामान्य वक्र के लिए "आसंजन सौष्ठव" का काईवर्ग परीक्षण

दूरी फुटो मे (1)	f प्रेक्षित वारवारता (2)	f_c प्रत्याशित वारवारता (3)	$f-f_c$ (4)	$(f-f_c)^2$ (5)	$\frac{(f-f_c)^2}{f_c}$ (6)
25 से नीचे	1	1 1	—0 1	0 01	0 01
25 किन्तु 35 से नीचे	2	3 2	— 1.2	1 44	0.45
35 किन्तु 45 से नीचे	7	9 1	—2 1	4 41	0 48
45 किन्तु 55 से नीचे	25	20 2	4 8	23 04	1 14
55 किन्तु 65 से नीचे	33	35 0	—2 0	4 00	0 11
65 किन्तु 75 से नीचे	53	50 6	2.4	5.76	0 11
75 किन्तु 85 से नीचे	64	57 4	6 6	43 56	0 76
85 किन्तु 95 से नीचे	44	52 0	—8.0	64 00	1 23
95 किन्तु 105 से नीचे	31	37 0	—6 0	36 00	0.97
105 किन्तु 115 से नीचे	27	22 0	5 0	25 00	1.14
115 किन्तु 125 से नीचे	11	10 2	0 8	0 64	0 06
125 किन्तु 135 से नीचे	4	3 7	0.3	0 09	0.02
135 या अधिक	1	1 5	—0 5	0 25	0 17
योग	303	303 0	0	...	6 65

आकड़े सारणी 23.1 तथा 23 3 से लिए गये हैं।

"आसजन सौष्ठव' का परीक्षण करते समय, अन्त की श्रेणियो मे हो सकने वाले f तथा f_c के बीच के छोटे कम भेदो के χ^2 पर पडने वाले स्पष्ट प्रभाव से बचने के लिए, एक या दोनों सिरो पर होने वाली अनेक वारवारताओ का वर्गीकरण करना असाधारण नही है। क्योंकि f_c के गिर्द f मानो का बटन उस समय के प्रत्याशित बटन के ठीक अनुरूप नही होता, जिस समय f_c छोटा होता है, इसलिए यह उपयुक्त बनाया गया है कि किसी भी श्रेणी मे परिकलित वारवारताएँ 5 या 10 से कम नही होनी चाहिएँ। फिर भी यह दिखाया जा चुका है कि यदि 0 05 कसौटी काम मे लायी जा रही है, तो अन्त की वारवारताएँ इतनी वडी नही होनी चाहिएँ। देखिए डब्ल्यू० जी० कोचरण द्वारा इओवा स्टेट कालिज जर्नल ऑफ साइन्स, खण्ड XVI, अक 4, पृ० 421—436 पर प्रकाशित "दि χ^2 करेक्शन फॉर कन्टिनुइटी"।

2 × 3 तथा बड़ी सारणियाँ

$2 \times R$ सारणियाँ—प्रेक्षित आँकड़ो के दो स्तम्भो तथा R पंक्तियो वाली सारणियो के लिए ऐसी कार्य-सूची काम मे लाना आवश्यक नहीं है जैसी कि सारणी 25.7 मे है। निम्न सारणी मे निर्दिष्ट किए गये अर्थों को प्रकट करने वाले संकेतो को काम मे लाकर,

a_1	b_1	N_1
a_2	b_2	N_2
a_3	b_3	N_3
		.
N_a	N_b	N

निम्न व्यंजक से χ^2 के मान का परिकलन किया जा सकता है

$$\chi^2 = \frac{N^2}{N_a N_b}\left\{\left(\frac{a_1^2}{N_1} + \frac{a_2^2}{N_2} + \cdot\cdot\right) - \frac{N_a^2}{N}\right\}$$

सारणी 25 11

छः थल सेना क्षेत्रों मे से प्रत्येक मे परीक्षा लिए हुए बाएँ तथा दाएँ हाथ से काम करने वाले पंजीयको के प्रतिदर्श* मे उन पंजीयको की संख्या

थल सेना क्षेत्र	बाएँ हाथ से काम करने वाले	दाएँ हाथ से काम करने वाले	योग
I	161	1,636	1,797
II	223	2,195	2,418
III	193	2,130	2,323
IV	137	1,626	1,763
V	230	2,317	2,547
VI	120	1,191	1,311
योग	1,064	11,095	12,159

* प्रतिदर्श उन रिकार्डो मे बना था जिन्हे थल सेना के विभाग ने 19 जून, 28 जून, तथा 30 जून, 1952 को प्राप्त किया था।

आँकड़े ह्यूमन बायोलॉजी, खण्ड 25, अंक 1, पृ० 36—49 मे संकलित बी० डी० कारपिनोस तथा एच० ए० ग्रीममैन द्वारा लिखित "प्रैवलेन्स ऑफ लेफ्ट हैंडेडनेस अमग सिलेक्टिव सर्विस रजिस्ट्रैंट्स" से उद्धृत है।

छः थल सेना क्षेत्रों में परीक्षा लिये हुये बाएँ हाथ से तथा दाएँ हाथ से काम करने वाले पंजीयकों की संख्या के प्रतिदर्श आँकड़े उस जानकारी से प्राप्त किये गये थे जो उन चयनात्मक सेवा पंजीयकों द्वारा दिये गये थे जिनकी सैनिक सेवा के लिए परीक्षा ली गई थी। बाएँ हाथ से काम करने वालों के अनुपात क्षेत्र IV में 7 8 प्रतिशत क्षेत्र II में 9 2 प्रतिशत तक घटन-बढ़त थे। सारणी 25 11 के आँकड़ों पर χ^2 परीक्षण का प्रयोग हमें इस बात को निश्चित करने के योग्य बनाता है कि क्या बाएँ तथा दाएँ हाथ से काम करने वालों के अनुपात विभिन्न थल सेना क्षेत्रों में सार्थक रूप में भिन्न थे। इस सारणी के आधार पर परिकलन निम्न है

$$\chi^2 = \frac{(12\,159)}{(1\,064)(11\,095)}\left\{\frac{(161)^2}{1\,767}+\frac{(223)^2}{2\,418}+\frac{(193)^2}{2\,323}+\frac{(137)^2}{1{,}763}+\frac{(230)^2}{2{,}547}+\frac{(120)^2}{1{,}311}-\frac{(1{,}064)^2}{12{,}159}\right\}$$

$= 3\,98$

स्वातन्त्र्य की मात्राओं की संख्या निश्चित करने के लिए हम $n=(R-1)(C-1)=(5)(1)=5$ परिकलित करते हैं। $n=5$ के लिए χ^2 का बटन चार्ट 25.8 में दिखाया गया है। परिशिष्ट ञ में हम पता चलता है कि P का मान 0 50 तथा 0 70 के बीच में है और हम इस परिणाम पर पहुँचते हैं कि बाएँ हाथ से तथा दाएँ हाथ से काम करने वालों के छः क्षेत्रों से प्राप्त अनुपात सार्थक रूप में भिन्न नहीं हैं।

C स्तम्भों तथा दो पंक्तियों वाली सारणियों के लिए भी वह व्यंजक, संकेतों में उचित परिवर्तन करके, काम में लाया जा सकता है जो अभी-अभी χ^2 के लिए लाया गया था। वैकल्पिक रूप में, सारणी को दो स्तम्भों में फिर से परिवर्तित किया जा सकता है।

तीन या अधिक स्तम्भों तथा तीन या अधिक पंक्तियों वाली सारणियों को, जिनके सीमान्त योग निश्चित है, परिकलन के सारणी 25 7 जैसे रूप के द्वारा बहुत शीघ्रता से काम में लाया जा सकता है। स्वातन्त्र्य की मात्राएँ $(R-1)(C-1)$ हैं।

काईवर्ग परीक्षाएँ करते समय कभी-कभी एक बहुत बड़ी प्रायिकता सामने आ सकती है। कुछ लेखकों ने संकेत किया है कि 0.99 प्रायिकता ठीक वैसी असाधारण है जैसी 0 01, और यदि हम 0 01 को परिकल्पना को अविश्वसनीय बनाने वाला मानें, तो 0 99 ठीक उतनी ही स्पष्टता से परिकल्पना को अविश्वसनीय बना देती है, जितनी स्पष्टता से 0 01 प्रायिकता। यह सत्य है कि 0 99 प्रायिकता वाली घटना ठीक उतनी आश्चर्यजनक है जितनी वह घटना जिसकी प्रायिकता 0 01 है, किन्तु इससे यह परिणाम नहीं निकलता कि 0 99 प्रायिकता परिकल्पना को अविश्वसनीय कर देती है। प्रतिदर्श तथा समष्टि के बीच या दो प्रतिदर्शों के बीच आश्चर्यजनक सहमति को हमें, साधारण सावधानी की अपेक्षा कुछ अधिक सावधानी से, सम्भवत "काम चलाने के लिए अस्थायी रूप में सचालित" आँकड़ों को, अकगणित की भूलों को, यदि 'आसजन सौष्ठव" अन्तर्निहित है तो आँकड़ों के पहले ही परिष्कृत कर लेने को, अथवा असावधानी से आयोजित प्रयोग को ढूँढने की प्रेरणा देनी चाहिए।

वास्तव में P के अत्यधिक बड़े या अत्यधिक छोटे मानों के होने पर हम परिस्थिति का पुनः परीक्षण करना चाहिए। निम्न घटना पर विचार कीजिए जिसका पृष्ठ 11 पर

उल्लख है जब प्रतिदीप्त प्रकाश की पहन पहल व्यवस्था का गई थी उस समय कुछ लोगों का यह विश्वास था कि प्रतिदीप्त प्रकाश वाली बत्तियों से विकिरण मनुष्यों को अनुवर कर देगा । उनकी आशकाओं का निराकरण करने के लिए एक रेल माग ने जो पहल ही प्रतिदीप्त प्रकाश की बत्तिया लगा चुका था चूहो के एक समूह को उद्दीप्त प्रकाश के क्षेत्र म रखा और एक दूसरे समूह को प्रतिदाप्त प्रकाश के क्षत्र म। प्रथम समूह क सामान्य रूप म सन्तान हुई, कि तु दूसरे समूह के एक भी नही। इससे वास्तव म उन लोगों की आशकाएँ प्रबल होती प्रतीत हुइ जो यह सोचते थ कि सम्भवत प्रतिदीप्त प्रकाश मनुष्यो को अनुवर बना दे। परिणाम इतना अधिक आश्चयजनक प्रतीत हुआ कि एक कायकारी अधिकारी ने कहा कि चहो क दूसरे समूह की सावधानी से जाच पत्ताल होनी चाहिए। परीक्षा करन पर पता चला कि व सभी एक ही लिंग के थे।

26

सांख्यिकीय सार्थकता III : प्रसरण, प्रसरण का विश्लेषण, वैषम्य और ककुदता के माप, तथा सहसंबन्ध गुणांक

पुस्तक के इस अन्तिम अध्याय मे, प्रतिदर्शों से परिकलित प्रसरणो, अनेक माध्यो के प्रसरण (प्रसरण का विश्लेषण), प्रतिदर्शों से उपलब्ध β_1 और β_2 के मानो, तथा सहसम्बन्ध गुणाको की ओर ध्यान देंगे।

प्रसरण

प्रतिदर्श प्रसरणो, $\hat{\sigma}^2$ पर हमारा विचार-विमर्श समातर माध्यो और अनुपातो के वर्णन का इस दृष्टि से समानान्तर होगा कि हम पहले $\hat{\sigma}^2$ और σ^2 के मध्य अन्तर पर विचार करेंगे, फिर σ^2 की विश्वास्यता सीमाएँ प्राप्त करेंगे, और तब हम दो प्रतिदर्श प्रसरणो की तुलना करेंगे। इसके अतिरिक्त, अनेक प्रतिदर्श प्रसरणो की तुलना करने के एक ढग पर भी विचार करेंगे।

सामान्य समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्शो के प्रसरणो का न तो प्रसामान्य रूप से और न ही सममित रूप से वटन होता है। उनका बटन एक विषमित वक्र का अनुगमन करता है (दाएँ को विषमित), जिसका यथातथ आकार σ^2 और N पर निर्भर है। क्योंकि P के कतिपय मानो के लिए $\hat{\sigma}^2$ के मानो को प्रस्तुत करने वाली सारणियो को तक रूप मे σ^2 तथा N दोनो को ग्रहण करना पडेगा और इसलिए वे बहुत विस्तृत होगी, अत यह सौभाग्यपूर्ण है कि स्वातन्त्र्य के $N—1$ अशो के लिए $(N-1)\hat{\sigma}^2-\sigma^2$ काईवर्ग बटन का अनुगमन करता है। इस प्रकार, हम लिखते हैं

$$t=\frac{(N-1)\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}$$

यदि $\hat{\sigma}^2$ की अपेक्षा s^2 प्रदत्त हो, तो हम $\hat{\sigma}^2$ को निम्न व्यजक से प्राप्त कर सकते हैं

$$\hat{\sigma}=\frac{N}{N-1}s^2.$$

विकल्पत, हम χ^2 परीक्षण का χ^2 के लिए $n=N-1$ के साथ निम्न रूप मे प्रयोग कर सकते हैं

$$t^2=\frac{Ns^2}{\ }.$$

$\hat{\sigma}^2$ और σ^2 के मध्य अन्तर की सार्थकता—सारणी 24.1 के नीचे यह देखा जा सकता है कि 10 टुकड़े तांबे के मस्न तार के लिए $\hat{\sigma}^2$ का मान 75 73 था। इस स्थिति म, अन्य अनेक स्थितियों के समान, हम σ^2 का मान नहीं जानत, लेकिन, उदाहरण के लिये, हम मान लेंगे कि $\sigma^2=46\ 42$ और इस परिकल्पना का परीक्षण करेंगे कि $\hat{\sigma}^2=75\ 73$, $\sigma^2=46\ 42$ वाली समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श का प्रसरण है। 0 05 का हम अपनी कसौटी के रूप म प्रयोग करेंगे। χ^2 के परिकलन से हम पाते हैं

$$\chi^2=\frac{(N-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\frac{(9)(75\ 73)}{46\ 42}=14\ 683$$

क्योंकि $n=N-1=9$ परिशिष्ट ञ की χ^2 सारणी से यह प्रकट होता है कि यदि $\sigma^2=46\ 42$ तो $\sigma^2=75\ 73$ या अधिक को प्राप्त करने की प्रायिकता, 10 के प्रतिदर्शों के लिए, प्राय निश्चित रूप से 0 10 है। हमारी परिकल्पना अविश्वसनीय नहीं है। ध्यान दीजिए कि, इस प्रयोग म, χ से हमें एक सिरे वाला परीक्षण प्राप्त होता है क्योंकि जो प्रायिकता प्राप्त की गई वह $\hat{\sigma}^2$ के मानों को प्रेक्षित के तुल्य या अधिक की ओर संकेत करती है।

यदि हम $\hat{\sigma}^2$ के मानों पर विचार करने म रुचि रखते है जो कि σ^2 के मान की अपेक्षा कम है तो हमारे लिए पहुँच क एक से अधिक मार्ग खुल जाते है। वही पूर्ण अन्तर दिखाते हुए परन्तु विपरीत दिशा म हम $\hat{\sigma}^2$ के मान की प्रायिकता अभिनिश्चित कर सकते है। अर्थात $\hat{\sigma}^2=17\ 11$ विकल्पत, हम $\hat{\sigma}^2$ का मान निर्धारित कर सकते है जो कि $n=9$ के लिए χ के बटन के निचले 10 प्रतिशत सिरे को काटता है। बारी बारी इन दोनो का विचार करने पर हम पाते है कि जब $\hat{\sigma}^2=17\ 11$ तो

$$\chi^2=\frac{(9)(17\ 11)}{46\ 42}=3\ 317,$$

और प्रायिकता लगभग 0 05 है कि $\hat{\sigma}^2$ के मान 17.11 के बराबर अथवा इससे कम होंगे। $\hat{\sigma}$ का मान जो कि χ^2 के बटन के निचले 10 प्रतिशत सिरे को काटता है, $P=0\ 90$ के लिए χ^2 के मान का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है जब परिशिष्ट ञ मे $n=9$ है। यह 4 168 है और हम लिखते हैं

$$4\ 168=\frac{9\hat{\sigma}^2}{46\ 42},\ \text{अत}\ \ \hat{\sigma}^2=21\ 50$$

χ^2 परीक्षण म $\hat{\sigma}$ से σ तक का अनुपात समन्वित है। इस तथ्य से पाठकों को पहले ही सूझ गया होगा कि जब $n=9$ और जब $\chi^2=14\ 684$ (χ^2 का मान ऊपरी 0 10 बिन्दु पर) तो परिणामत 0 10 की प्रायिकता $\hat{\sigma}^2$ और σ^2 के लिए $14\ 684\div9=1\ 632$ अनुपात प्रदान करती हुई मानो के किसी भी युग्म की ओर संकेत कर सकती है। जब कभी $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=1\ 632$ तो $\hat{\sigma}^2$ का मान ऊपरी 0 10 बिन्दु पर होगा। संकेत चिह्नो मे[1],

$$\frac{\chi^2}{n}=\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2},$$

1 अनुपात $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\frac{\chi^2}{n}$, F का विशेष प्रसंग है (देखिए पृष्ठ 645) जब $n_2=\infty$.

और इस सम्बन्ध से परिशिष्ट ट की सारणी तैयार की गई थी। यह सारणी केवल $\hat{\sigma}^2$ को σ^2 से विभाजित करके $\hat{\sigma}^2$ की प्रतिदर्शी सीमाओं का परिकलन करने के योग्य बनाती है, इस प्रकार χ^2 का परिकलन अनावश्यक हो जाता है। पूर्ववर्ती उदाहरण के लिए, जहाँ $\hat{\sigma}^2=17.11$ और $\sigma^2=46\ 42$ वहाँ अनुपात 0 3686 है। इस अनुपात को परिशिष्ट ट में $n=9$ के लिए देखने पर लगभग 0 05 की प्रायिकता (निम्नतर बिन्दु) प्राप्त होती है जो ठीक वही है जो पहले प्राप्त हुई थी।

σ^2 की विश्वास्यता सीमाएँ—हम σ^2 की विश्वास्यता सीमाएँ प्राप्त करने के लिए χ^2 का भी प्रयोग कर सकते हैं। कठोर ताँबे के तार के आँकड़ों के लिए $\hat{\sigma}^2=75\ 73$ और $N=10$ σ^2 की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ क्या हैं? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए, हम परिशिष्ट ज से $n=9$ के लिए दो काईवर्ग मानों का प्रयोग करते हैं एक तो उच्च 0 05 बिन्दु पर तथा एक निम्न 0 05 बिन्दु पर (परिशिष्ट ञ में 0 95 बिन्दु)। ये χ^2 मान हैं 16 919 और 3 325 और हम σ^2 के लिए $\chi^2=\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ को हल करते हैं

$$16\ 919=\frac{(9)(75\ 73)}{\sigma_1^2},$$
$$16\ 919\sigma_1^2=681\ 57,$$
$$\sigma_1^2=40\ 28,$$

और

$$3\ 325=\frac{(9)(75\ 73)}{\sigma_2^2},$$
$$3\ 325\sigma_2^2=681\ 57,$$
$$\sigma_2^2=205\ 0$$

σ^2 की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ 40 28 और 205 0 है। पूर्ववत् यदि हम प्रसामान्य समष्टि के यादृच्छिक प्रतिदर्शों से इस प्रकार की अनेक 90 प्रतिशत सीमाओं का परिकलन करें तो हमारे कथनों में समय के 90 प्रतिशत में समष्टि मान सम्मिलित होगा और समय के 10 प्रतिशत में इसे सम्मिलित करने में हम असफल रहेंगे। रौजर पी० डोयल ने *प्रसामान्य समष्टि से श्यूहार्ट के* 1,000 *प्रतिदर्शों में स प्रत्येक के लिए* σ^2 *की* 90 *प्रतिशत* विश्वास्यता सीमाओं[2] का परिकलन किया। 904 उदाहरणों में उसकी सीमाओं में σ^2 सम्मिलित था, लेकिन 96 प्रतिदर्शों म ऐसा नही था।

हम χ^2 व्यंजक को नया रूप दे सकते हैं

$$\chi^2=\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

जो इस प्रकार पढा जाए

$$\frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2}=\frac{n}{\chi^2}$$

2. अप्रकाशित सामग्री से।

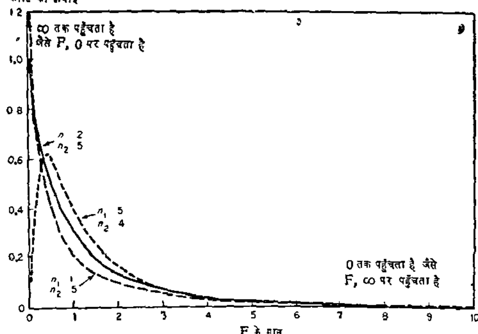
ताकि हम एक ऐसी सारणी बनाने में समर्थ हो सकें जिससे σ^2 की विश्वास्यता सीमाएँ प्राप्त की जा सकें। इस प्रकार की सारणी परिशिष्ट ठ के रूप में दी गई है। σ^2 की 90 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ प्राप्त करने के लिए इसका प्रयोग करते हुए, जब $n=9$, जिसे γ^2 का प्रयोग करके अभी प्राप्त किया गया था, हम परिकलन करेंगे

$$\sigma_1^2 = 0\ 5319\hat{\sigma}^2 = (0\ 5319)(75\ 73) = 40\ 28,$$

और

$$\sigma_2^2 = 2\ 707\hat{\sigma}^2 = (2\ 707)(75\ 73) = 205\ 0$$

दो प्रतिदर्श प्रसरणों के मध्य अन्तर की सार्थकता— अध्याय 24 में हमने निम्न प्रथम चर्वणदंतों (दाढों) के दो समुच्चय की माध्य लम्बाइयों के मध्य अन्तर की सार्थकता पर विचार किया था जिनके $N_1 = 16$, $s_1 = 0\ 72$, $N_2 = 9$, और $s_2 = 0\ 62$ थे। हमने पहले ही पाया था कि $\bar{X}_1$ और $\bar{X}_2$ के मध्य कोई सार्थक अन्तर नहीं था। 0 05 स्तर को अपनी कसौटी के रूप में प्रयोग करते हुए, आइए, हम इस परिकल्पना का परीक्षण करें कि σ^2 के सम्बन्ध में दो प्रतिदर्श एक ही समष्टि में से थे।



चार्ट 26 1 $n_1=1, n_2=5,\ n_1=2, n_2=5,$ और $n_1=5, n_2=4$ के लिए F का बटन। क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर पैमाने ∞ तक जाते हैं। F बटन की कोटियां निम्न व्यंजक से प्राप्त हुई हैं

$$Y_c = \frac{F^{\frac{n_1-2}{2}} \left(\frac{n_1+n_2-2}{2}\right)! \, (n_1)^{\frac{n_1}{2}} (n_2)^{\frac{n_2}{2}}}{(n_1F+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}} \left(\frac{n_1-2}{2}\right)! \left(\frac{n_2-2}{2}\right)!}.$$

जब $\hat{\sigma}_1^2$ और $\hat{\sigma}_2^2$ एक ही प्रसामान्य समष्टि से σ^2 के स्वतन्त्र आकलन है तो इनका अनुपात $\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$, $n_1 = N_1$, और $n_2 = N_2 - 1$ स्वातन्त्र्य-अंशों के साथ F बटन के अनुसार विभाजित है। यदि $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2$ तो F का मान 1 0 होगा। F के मान 0 से 0 999...तक विचरण करते है, जब $\hat{\sigma}_1^2 < \hat{\sigma}_2^2$, और 1.000.. 1 से ∞ तक जब $\hat{\sigma}_1^2 > \hat{\sigma}_2^2$. F बटन "विपरीत-J" आकार का है, जब $n_1 = 1$, अथवा $n_1 = 2$, और दाहिनी ओर को तिरछा है, जब $n_1 \geqq 3$ कतिपय F बटन चार्ट 26 1 म दिखाए गए हैं।

निम्न प्रथम चर्वणदतों के आंकड़ों के लिए अध्याय 24 म, हमने देखा $\Sigma x_1^2 = 8\ 29$ तथा $\Sigma x_2^2 = 3\ 46$. परिणामत,

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\Sigma x_1^2}{N_1 - 1} = \frac{8\ 29}{16 - 1} = 0\ 553,$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{\Sigma x_2^2}{N_2 - 1} = \frac{3.46}{9 - 1} = 0\ 432,$$

और

$$F = \frac{0\ 553}{0\ 432} = 1\ 28,$$

$n_1 = 15$ और $n_2 = 8$ के साथ। n_1 और n_2 के चुने हुए मानो और बटन के दाहिने सिरे मे 0 10, 0 05, 0 025, 0 01, और 0 001 की प्रायिकताओ के लिए F के मान परिशिष्ट ड मे दिए गए हैं। उस परिशिष्ट के सदर्भ से हम पाते हैं कि $n_1 - 15$ दिया नही गया है, लेकिन $n_1 = 12$ और $n_1 = 24$ दिए हैं, और ऐसे ही $n_2 = 8$ है। $n_1 = 15$ के लिए अन्तर्वेशन करना आवश्यक नही है, क्योकि $F \geqq 1\ 28$ की प्रायिकता 0 10 से बढ जाती है, चाहे हम $n_1 - 12$ और $n_2 = 8$ पर विचार करे, अथवा $n_1 = 24$ और $n_2 = 8$ पर। $\hat{\sigma}_1^2$ का प्रेक्षित मान $\hat{\sigma}_2^2$ के प्रेक्षित मान से सार्थक रूप मे नहीं बढता। परन्तु विपरीत दिशा मे अन्तरों का क्या करण है?

यदि $\hat{\sigma}_1^2$, $N_1 = 16$ के साथ 0 432 होता और $\hat{\sigma}_2^2$, $N_2 = 9$ के साथ 0 553 होता तो $n_1 = 15$ तथा $n_2 = 8$ के साथ हमारे पास रहता $F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{0\ 432}{0\ 553} = 0\ 781$ अब, परिशिष्ट ड की सारणी F के 1 0 से छोटे किसी भी मान को सम्मिलित नही करती। जब F का मान एक से कम हो, हम उस F मान या कम की प्रायिकता[3] को $\frac{1}{F}$ के परिकलन के द्वारा प्राप्त कर सकते है जो 1 0 से बढ जाएगी, और स्वतन्त्रता की मात्राओ को विपरीत दिशा मे मोड देगी। अर्थात्, $n_1 = 8$ तथा $n_2 = 15$ के साथ हम देखेंगे

$$F = \frac{1}{0\ 781} = 1\ 28$$

---

3 इस पुस्तक के लेखको द्वारा एक संक्षिप्त सारणी तैयार की गई थी जो दोनो उच्च तथा निम्न बिन्दुओ को दिखाती है। वह एफ० ई० क्रॉक्स्टन के ग्रन्थ *ऐलीमेंट्री स्टैटिस्टिक्स विद ऐप्लीकेशन्स इन मेडिसिन, एन्ड दि बायलॉजिकल साइन्सिस*, डावर प्रकाशन, इका०, न्यूयार्क, 1959 पृष्ठ 334 – 335 पर मिल सकती है।

यह करते हुए, हम पाते है कि $F \geqq 1.28$ की प्रायिकता, जब $n_1 = 8$ और $n_2 = 15$ है, 0.10 से अधिक, इसलिए, $F \leqq 0.781$ के मान के लिए, $n_1 = 15$ और $n_2 = 8$ के साथ भी प्रायिकता 0.10 से अधिक होगी।

$\hat{\sigma}^2$ **के कतिपय मानो की तुलना**—कभी-कभी यह जानना महत्त्वपूर्ण होता है कि $\hat{\sigma}^2$ के कतिपय मानो के मध्य एकरूपता रहती है अथवा नही। एक पैन्सिल बनाने वाली कम्पनी ने अपनी तथा अन्य पाँच प्रतियोगी कम्पनियो के द्वारा बनाई हुई पैन्सिलो के सिक्कों की शक्ति का परीक्षण किया। परीक्षण मे 1, 2, 2.5, 3 और 4 मे से प्रत्येक कठोरता की पाँच-पाँच पैन्सिले हर कम्पनी को सम्मिलित की गई। प्रत्येक पैन्सिल का चार बार परीक्षण किया गया।

एक कम्पनी द्वारा बनाई हुई 2 नम्बर की पाँच पेंसिलो के लिए, जिसे हम "कम्पनी D" कहेगे परीक्षण[4] दिखाता है $\hat{\sigma}_1^2 = 0.01316$ $\hat{\sigma}_2^2 = 0.05667$, $\hat{\sigma}_3^2 = 0.02787$, $\hat{\sigma}_4^2 = 0.01930$, $\hat{\sigma}_5^2 = 0.01529$, $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_5 = 4$ इन प्रसरणो की तुलना करने का एक ढग $\hat{\sigma}_1^2$ तथा $\hat{\sigma}_2^2$ के लिए $\hat{\sigma}_1^2$ और $\hat{\sigma}_3^2$ के लिए और इसी प्रकार से आगे भी F का परिकलन करना होगा। तुरन्त अन्य प्रविधि $\hat{\sigma}_2$ सभी मानो की L माप के माध्यम द्वारा तुलना करने की होगी जिसका उल्लेख कभी-कभी प्रायिकता की कसौटी के रूप मे किया जाता है।

$$L = \frac{\sqrt[k]{\hat{\sigma}_1^2 \times \hat{\sigma}_2^2 \times \cdots \times \hat{\sigma}_k^2}}{\frac{1}{k}(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \cdots + \hat{\sigma}_k^2)}$$

यदि $N_1 = N_2 = \ldots = N_k$। यदि प्रतिदर्शो मे मदो की बदलती संख्याएँ सम्मिलित हो,

$$L = \frac{\sqrt[n]{(\hat{\sigma}_1^2)^{n_1} \times (\hat{\sigma}_2^2)^{n_2} \times \cdots (\hat{\sigma}_k^2)^{n_k}}}{\frac{1}{n}\left(n_1\hat{\sigma}_1^2 + n_2\hat{\sigma}_2^2 + \cdots + n_k\hat{\sigma}_k^2\right)},$$

जहाँ $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$। अश सब $\hat{\sigma}^2$, का गुणोत्तर माध्य है जब कि हर सब $\hat{\sigma}^2$, का समातर माध्य है। हम पहले ही जानते है (अध्याय 9) कि मानो की एक श्रेणी का गुणोत्तर माध्य, जो सब एकसमान नही है, उन्ही मानो के समातर माध्य की अपेक्षा कम है। साथ ही, जितने अधिक विभिन्न मान होगे, G और $\bar{X}$ के मध्य उसी मात्रा मे अन्तर अधिक होगा। अब, यदि $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2 = \cdots = \hat{\sigma}_k^2$, तो अधिकतम एकरूपता की अवस्था प्राप्त होगी और L का मान 1.0 होगा। यदि सब $\hat{\sigma}^2$ के मध्य कोई अन्तर है, तो L का मान 1.0 से कम होगा और निम्न सीमा पर 0 को स्पर्श करेगा। $L=0$ एकरूपता के अधिकतम अभाव की स्थिति का प्रतिनिधित्व करती है और एक सैद्धान्तिक सीमा है जो वास्तविक व्यवहार मे प्राप्त नही होगी।

4 परीक्षण आंकड़े सारणी 26.3 मे दिए गए हैं।

D कम्पनी द्वारा बनाई हुई 2 नम्बर की पाँच पैन्सिलो के लिए L के परिकलन से हम प्राप्त करते है

$$L=\frac{\sqrt[5]{0\ 01316\times 0\ 05667\times 0\ 02787\times 0\ 01930\times 0\ 01529}}{\frac{1}{5}(0\ 01316+0\ 05667+0\ 02787+0\ 01930+0\ 01529)},$$

$$=\frac{0\ 02278}{0\ 02646}=0\ 86$$

क्योंकि 0 86 1 0 से बहुत भिन्न नही है, यह प्रतीत होगा कि $\hat{\sigma}^2$ के पाँच मानो के मध्य एकरूपता विद्यमान है। तो भी हम जानना चाहते हैं कि क्या $L=0\ 86$ सार्थक रूप से 1 0 से भिन्न है। परीक्षण के अन्तर्गत परिकल्पना है कि पांच प्रसरण σ^2 के सम्बन्ध म एक ही समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्शो म से थे। प्रसामान्य समष्टि से लिए गए प्रतिदर्शों के लिए L का बटन J आकार का है, जैसा कि परिशिष्ट ढ के ऊपर छोटे चार्ट के द्वारा दिखाया गया है। यह परिशिष्ट N_i और k के विभिन्न मानो के लिए, 0 05 और 0 01 बिन्दुओ पर L के मान देता है, जहाँ N_i समान आकार के प्रतिदर्शों मे से किसी एक म मदो की सख्या का उल्लेख करता है। हमारे प्रमेय के लिए, $N_i=4$ और $k=5$, और परिशिष्ट ढ से यह प्रकट होता है कि 0 05 बिन्दु पर $L=0\ 491$ है जब कि 0 01 बिन्दु पर $L=0\ 370$ है। यह स्पष्ट है कि $L=0\ 86$ का प्रेक्षित मान 1 0 से सार्थक रूप मे भिन्न नही है, परिकल्पना अविश्वसनीय नही है।

L के माना का परिकलन अन्य पाँच कम्पनियो मे से प्रत्येक द्वारा बनाई हुई 2 नम्बर की पैन्सिलो के प्रसरणो के लिए किया गया था। एक उदाहरण मे पूर्ववत्, $N_i=4$ तथा $k=5$ के साथ $L=0\ 30$ है। L के लिए यह मान 0 01 बिन्दु से परे है और सार्थक रूप से 1 0 से भिन्न समझा जाएगा।

प्रसरण का विश्लेषण

अध्याय 24 म हमने दो माध्यो के बीच अन्तर की सार्थकता पर विचार किया था। प्रसरण के विश्लेषण की आगामी चर्चा दो अथवा अधिक माध्यों से सम्बन्ध रखती हैं। अपन सरलतम रूप म प्रसरण का विश्लेषण σ^2 के दो स्वतन्त्र आकलनो से सम्बन्धित होगा जिसकी पारस्परिक तुलना F के माध्यम से की जायेगी।

वर्गीकरण की एक कसौटी—सारणी 26 1 म तीन दूसरी जातियो के पक्षियो के घोसलो से प्राप्त यूरोपीय कोयल के अण्डो की लम्बाई के आँकडे प्रस्तुत किए गए हैं। यूरोपीय कोयल अपने अण्डे दूसरे पक्षियो से सेवाती है तथा उनसे ही अपने बच्चे पलवाती है। हमारी रुचि यह जानने मे है कि क्या गौरैया, रॉबिन तथा फुदकनी चिडियो के घोसलो मे पाये कोयल के अण्डो की माध्य लम्बाई एक दूसरे से सार्थक रूप मे भिन्न है। हम प्रथम माध्य की द्वितीय से, प्रथम की तृतीय से और द्वितीय की तृतीय से तुलना नही करेंगे। हम तीनो माध्यो का विचार एक समूह म करेंगे। और उन तीनो माध्यो (समष्टि मे प्रसरण का एक आकलन) के आकलित प्रसरण की तुलना तीनो स्तम्भो (समष्टि मे सरण का द्वितीय आकलन) के भीतर आकलित प्रसरण के साथ करेंगे।

सारणी 26 1 के आँकड़ो का श्रेणी विभाजन एक निकष के अनुसार हुआ है: पक्षी की जातियां जिनके घोसलो मे कोयल के अण्डे पाये गए थे। इस प्रकार की सारणी के लिए विचरण के तीन स्रोत है।

1 *स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण*—स्तम्भ माध्यो के बीच विचरण प्रत्येक स्तम्भ माध्य ($\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \cdots$) और "महामाध्य" के बीच अन्तरो को लेकर, ($\bar{X}$, सभी मानो का समातर माध्य) प्रत्येक अन्तर का वर्ग बनाते हुए, प्रत्येक वर्गीकृत अन्तर को समुचित स्तम्भ ($N_1, N_2, N_3,$) मे मदो की सख्या से गुणा करते हुए, और योग करते हुए प्राप्त किया गया है। साकेतिक रूप से, यह है

$$N_1(\bar{X}_1-\bar{X})^2+N_2(\bar{X}_2-\bar{X})^2+N_3(\bar{X}_3-\bar{X})^2+\cdots$$

$\bar{X}_c$ का स्तम्भ माध्य के लिए, N_c का स्तम्भ मे मदो की सख्या के लिए और k_c का स्तम्भो की सख्या के लिए प्रयोग करते हुए, स्तम्भ माध्यो के बीच विचरण निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\sum^{k_c}[N_c(\bar{X}_c-\bar{X})^2].$$

जहाँ $\sum_1^{k_c}$ बताता है कि k_c स्तम्भो के ऊपर सकलन करना है। जो व्यजक अभी दिया गया था वह k_c स्तम्भ माध्यो और महामाध्य के परिकलन को आवश्यक बताता है। जैसा कि परिशिष्ट ध, परिच्छेद 26 1 मे दिखाया गया है, यह आवश्यक नही है कि[5]

$$\sum_1^{k_c}[N_c(\bar{Y}_c-\bar{X})^2=\sum_1^{k_c}\left[\frac{\left(\sum_1^{N_c}X\right)^2}{N_c}\right]-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2,$$

जहाँ $\sum_1^{N_c}$ स्तम्भ मे N_c मदो के सकलन की ओर उल्लख करता है $N=N_1+N_2+N_3$

सारणी 26 1 के नीचे दिखाए गए परि कलनो से

$$\sum_1^{k_c}\left[\frac{\left(\sum_1^{N_c}X\right)^2}{N_c}\right]-\frac{(\Sigma X)^2}{N}=22,311\ 15-\frac{1,002,601\ 69}{45},$$

$$=22,311\ 15\quad 22,280\ 04,$$

$$=31\ 11$$

5. यदि $N_1=N_2=N_3=$. तो व्यजक

$$\sum_1^{k_c}\left[\frac{\left(\sum_1^{N_c}X\right)^2}{N_c}\right]$$

को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{\sum_1^{k_c}\left(\sum_1^{N_c}Y\right)^2}{N_c}$$

सारणी 26 1

मानो के परिकलन जो कि पक्षियो की तीन विभिन्न जातियो के घोसलो मे प्राप्त कोयल के अण्डों की लम्बाई के आँकडो के प्रसरण का विश्लेषण करने के लिए आवश्यक हैं

गौरैया		रॉबिन		फुदकनी चिड़िया	
X_1	X_1^2	X_2	$X_{_}$	X_3	X_3^2
22 0	484 00	21 8	475 24	19 8	392 04
23 9	571 21	23 0	529 00	22 1	488 41
20 9	436 81	23 3	542 89	21 5	462 25
23 8	566 44	22 4	501 76	20 9	436 81
25 0	625 00	22 4	501 76	22 0	484 00
24 0	576 00	23 0	529 00	21 0	441 00
21 7	470 89	23 0	529 00	22 3	497 29
23 8	566 44	23 0	529 00	21 0	441 00
22 8	519 84	23 9	571 21	20 3	412 09
23 1	533 61	22 3	497 29	20 9	436 81
23 1	533 61	22 0	484 00	22 0	484 00
23 5	552 25	22 6	510 76	20 0	400 00
23 0	529 00	22 0	484 00	20 8	432 64
23 0	529 00	22 1	488 41	21 2	449 44
		21 1	445 21	21 0	441 00
	.	23 0	529 00		
323 6	7,494 10	360 9	8 147 53	316 8	6,698 78

जाकड, ओस्वाल्ड एच० लैटर के दि एग आफ क्यूक्यूलस कैनोरस, *बायोमीट्रिका*, खण्ड 1, पृष्ठ 173 से।

$$N=45$$

$$\Sigma X=323\ 6+360\ 9+316\ 8=1\ 001\ 3$$

$$(\Sigma X)^2=(1\ 001\ 3)^2=1{,}002\ 601\ 69$$

$$\Sigma Y^2=7\ 494\ 10+8{,}147\ 53+6{,}698\ 78=22{,}340\ 41$$

$$\sum_1^k\left[\frac{\begin{pmatrix}N_c\\ \Sigma X\end{pmatrix}^3}{\dfrac{1}{N_c}}\right]=\frac{(323\ 6)^2}{14}+\frac{(360\ 9)^2}{16}+\frac{(316\ 8)^2}{15}=22\ 311\ 1495$$

2 *स्तम्भों के भीतर विचरण*—स्तम्भों के भीतर विचरण स्तम्भ माध्या से स्तम्भों मे मानों का विचरण है। यह एक स्तम्भ और स्तम्भ माध्य मे प्रत्यक मद के बीच अन्तर लेकर अन्तरो का वर्ग बनाकर स्तम्भ के लिए वर्ग अन्तरों का योग करके दूसरे स्तम्भो के लिए भी यही प्रक्रिया दोहरा कर और सभी स्तम्भा के योगो को जोड कर प्राप्त किया गया है। साकेतिक रूप से स्तम्भा के भीतर विचरण है

$$\sum_{1}^{k}\left[\sum_{1}^{N_c}(X-\lambda)\right]$$

इस व्यजक मे k स्तम्भ माध्या का परिकलन और N अन्तरो का निर्धारण सम्मिलित है। ये क्रियाए अनावश्यक हैं क्योंकि परिशिष्ट ध परिच्छेद 26 2 को दिखाता है कि

$$\sum_{1}^{k}\left[\sum_{1}^{N}(X-\lambda)^2\right] \quad \Sigma X - \sum_{1}^{k_c}\left[\frac{\left(\sum_{1}^{N} X\right)}{N}\right]$$

और फिर से सारणी 26 1 के नीचे परिकलनों का उल्लेख करते हुए हम पाते है

$$\Sigma Y - \sum_{1}^{k}\left[\frac{\left(\sum_{1}^{N} X\right)^2}{N_c}\right] = 22\ 340\ 41 - 22\ 311\ 15$$

$$-29\ 26$$

3 *कुल विचरण*—कुल विचरण महामाध्य से सभी मानो के वर्गीकृत विचलनो का योग है। यह Ns^2 जैसा ही है जहा s प्रामाणिक विचलन है जिसकी व्याख्या अध्याय 10 मे की गई थी। साकेतिक रूप से कुल विचरण है

$$\sum_{1}^{N}(Y-\lambda)$$

यह आवश्यक नहीं है कि इस व्यजक मे उल्लिखित N विचलन प्राप्त किये जाए क्योकि परिशिष्ट ध परिच्छेद 10 2 मे दिखाई गई प्रविधि के समान प्रविधि से यह दिखाया जा सकता है कि

$$\sum_{1}^{N}(X-\lambda)^2 \quad \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

कोयल के अण्डों के आँकडो के लिए

$$\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N} = 22\ 340\ 41 - \frac{1\ 002\ 601\ 69}{45}$$

$$-22\ 340\ 41 - 22\ 280\ 04 = 60\ 37$$

ध्यान दीजिये हमारे द्वारा प्राप्त प्रथम दो मानों का योग तृतीय मान के बराबर है। अर्थात स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण + स्तम्भा के भीतर विचरण कुल विचरण। यह इस प्रकार के सभी प्रमेयो के लिए सत्य है क्योंकि

$$\left\{\sum_{1}^{kc}\left[\frac{\left(\sum_{1}^{k_c} X\right)^2}{N_c}\right]-\frac{(\Sigma X)^2}{N}\right\}+\left\{\Sigma X^2-\sum_{1}^{k_c}\left[\frac{\left(\sum_{1}^{N_c} X\right)}{N_c}\right]\right\}=\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N}.$$

जैसाकि बाद मे देखा जाएगा कुल विचरण के लिए सख्यात्मक मान का कोई उपयोग नही किया जाएगा । तथापि, अन्य मानो के ऊपर रोक के रूप मे इसका परिकलन करना अच्छा है ।

आकलित प्रसरण—यह निश्चित करने के लिये कि क्या सयोगवश प्राप्त गणना की अपेक्षा स्तम्भ माध्य अधिक भिन्न हैं, हमारा उद्देश्य स्तम्भ माध्यो के बीच आकलित प्रसरण का स्तम्भो के भीतर आकलित प्रसरण से तुलना करना है । स्तम्भो के भीतर आकलित प्रसरण हमारी सयोग प्रसरण की कसौटी है, क्योकि स्तम्भो म मदो का विचलन $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$ के माध्य अन्तरो द्वारा प्रभावित नही होता । विचलन को स्वतन्त्रता के अशो की उपयुक्त सख्या के द्वारा विभाजित करके विचलन से आकलित प्रसरण प्राप्त किया गया है । हमारे प्रमेय के लिए, स्तम्भ माध्यो के बीच आकलित प्रसरण का $n=2$ है, क्योकि तीन स्तम्भ माध्यो के विचलन X से लिये गये थे । स्तम्भो मे आकलित प्रसरण के लिए, $n=N_1-1+N_2-1+N_3-1=14-1+16-1+15-1=42$, क्योकि प्रत्येक स्तम्भ मे विचलन स्तम्भ माध्य से लिए गए थे ।

आकलित प्रसरणो का परिकलन सारणी 26 2 म दिखाया गया है और उनसे हम पाते हैं

$$F=\frac{15\ 56}{0\ 6967}=22\ 3,$$

$n_1=2$ और $n_2=42$ के साथ । परिशिष्ट ड की F सारणी मे $n_2=42$ के लिए पवित नही है तथापि यह स्पष्ट है कि $F\geq 22\ 3$ की प्राप्ति की प्रायिकता 0 001 की अपेक्षा बहुत कम है और हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि पक्षियो की तीन विभिन्न जातियो के घोसलो मे प्राप्त अण्डो की माध्य लम्बाई के बीच वास्तविक अन्तर है । यह रुचिकर है कि बाद मे साख्यिकी-रहित खोज मे पता चला कि यूरोपीय कोयल *आतिथेय विशिष्टता*[6] प्रकट करती है, *जिसका अर्थ है जाति के अन्तर्गत एक ही क्षेत्र मे "विभिन्न जातियाँ, अथवा जनन समूह* विद्यमान हैं, प्रत्येक एक भिन्न आतिथेय जाति से सम्बन्धित है और प्रत्येक उसी जाति की कम से कम किसी एक विशेषता मे अपने को निपुण कर लेती है ।"

परिकल्पना, जिसका हमने परीक्षण किया, यह थी कि स्तम्भ माध्यो के बीच आकलित प्रसरण और स्तम्भो के भीतर आकलित प्रसरण σ^2 के सम्बन्ध मे एक ही समष्टि से थे । परिकल्पना अविश्वसनीय थी । यदि एक प्रसामान्य एकरूप समष्टि से प्रतिदर्श लिया जाता है तब हम अपेक्षा कर सकते हैं कि दो आकलित प्रसरण जिनका अभी उल्लेख हुआ है और $\hat{\sigma}^2$ (कुल विचरण पर आधारित आकलन) $\hat{\sigma}^2$ के उतने ही अच्छे आकलन हैं । परन्तु यदि भिन्नरूपता उपस्थित है, जैसाकि हमारे उदाहरण मे था, तो $\hat{\sigma}^2$ और स्तम्भ माध्यो क

6. ऐल्डन एच० मिलर "सोशल पैरासाइट्स अमग बर्ड्स,' द्वारा लिखित दि *साइंटिफिक मथली* खण्ड LXII, पृष्ठ 243, देख ।

बीच आकलित प्रसरण दोनो उस भिन्नरूपता से प्रभावित होगे। स्तम्भो के अन्दर आकलित प्रसरण प्रभावित नही होता है और इसलिए यह हमारे संयोग प्रसरण का माप सिद्ध हुआ।

कोयल के अण्डो की लम्बाई के आँकडो के F परीक्षण मे ऐसी स्थिति थी जिसमे $n_1=2$ और $n_2=42$। यदि सारणी 26 1 मे हमारे पास तीन स्तम्भो की अपेक्षा प्रेक्षित आँकडो के दो स्तम्भ होते तो n_1 1 होता और हमारी समस्या $\bar{X}_1$ और $\bar{X}_2$ के बीच अन्तर की सार्थकता का परीक्षण करना होती जिस पर अध्याय 24 मे विचार किया गया था। वास्तव मे, जब कभी भी आकलित प्रसरण का F परीक्षण मे $n_1=1$ है, तो t परीक्षण एक विकल्प होता है जो समान प्रायिकता प्रदान करता है। यदि हम परिशिष्ट भ और ड पर दृष्टिपात करें तो यह स्पष्ट हो जाएगा। इनमे यह देखा जा सकता है कि, किसी भी प्रदत्त प्रायिकता के लिए, t^2 का मान F के मान के समान है जब t के लिए n बराबर है F के लिए n_2 के और जब F के लिए $n_1=1$ एक उदाहरण, जहाँ F के स्थान पर t : परीक्षण का प्रयोग हो सकता था, सारणी 26 6 म प्रदर्शित स्तम्भ माध्यो के बीच आकलित प्रसरण के परीक्षण मे घटित होता है।

सारणी 26 2

कोयल के अण्डों की लम्बाई के आँकडो के प्रसरण के विश्लेषण के परिकलनो का सार

विचरण का स्रोत	विचरण की मात्रा	स्वातत्र्य कोटियाँ	आकलित प्रसरण
स्तम्भ माध्यो के मध्य	31 11	2	15 56
स्तम्भो के अन्तर्गत	29 26	42	0 6967
योग.. ...	60 37	44	

वर्गीकरण के दो निकष, प्रत्येक बक्स मे एक प्रविष्टि—सारणी 26 1 के आँकडो मे श्रेणीकरण का केवल एक निकष विद्यमान है, घोसले का प्रकार जिसम कोयल के अण्डे पाये गए। सारणी 26 3 मे वर्गीकरण के दो निकष है (1) विभिन्न पेन्सिले, जिनमे से वहाँ पाँच थी, और (2) पेन्सिल का स्थल जहाँ परीक्षण किया गया था, प्रत्येक पेन्सिल के चार स्थलो पर परीक्षण किया गया था। प्रत्येक पेन्सिल तेज की गई और परीक्षण किया गया, फिर दुबारा तेज करके परीक्षण किया गया, और फिर यही प्रक्रिया दुहराई गई। यह सभव है कि स्थल के परिवर्तन को सिक्के की शक्ति की उत्तरोत्तर वृद्धि अथवा कमी से सम्बद्ध किया जा सके।

सारणी 26 3 मे $5\times4=20$ बक्सो[7] अथवा प्रेक्षित आँकडो की कोशिकाएँ है, जिनमे से प्रत्येक मे केवल एक प्रविष्टि है। हम बाद म देखेंगे कि यह वाछित होगा कि बक्स मे एक स अधिक प्रविष्टि हो, यदि यह सम्भव हो। तो भी, कुछ ऐसी स्थितियाँ हैं, जैसी कि वर्तमान, जिनमे केवल एक ही प्रविष्टि सम्भव है। हम अधिक पेन्सिलें सम्मिलित कर सकते थे अथवा प्रत्येक पेंसिल का अधिक स्थलो पर परीक्षण कर सकते थे, परन्तु हम एक पेन्सिल पर प्रदत्त स्थल पर एक से अधिक परीक्षण नही कर सकते।

7 इस पाठ मे 'बक्स' शब्द प्रयुक्त किया गया है, क्योकि स्तम्भ का माध्य दिखाने के लिए हमने पहले ही $\bar{X}_c$ का प्रयोग किया है और बाद मे $\bar{X}_b$ का प्रयोग बक्स का माध्य दिखाने के लिए करेंगे।

सारणी 26 3 के आँकड़ों के लिए हम पहले के समान स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण और कुल विचरण लेते है। तो भी स्तम्भा मे कोई विचरण नही है किन्तु इसके स्थान पर, पंक्ति माध्यो के बीच विचरण है और अवशिष्ट विचरण है जो (1) कुल विचरण और (2) स्तम्भ माध्यो के बीच विचरण पंक्ति माध्यो के बीच विचरण, के बीच अन्तर, का प्रतिनिधित्व करता है। प्रथम हम इनमे से प्रत्येक विचरण का परिकलन करेंगे।

कुल विचरण—व्यजक वही है जो पहले प्रयुक्त किया था, और 26 3 के आँकडो के लिये, हमारे पास है

$$\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N} = 62\ 3517 - \frac{1{,}236\ 9289}{20} = 0\ 505255.$$

सारणी 26.3

मानो का परिकलन जोकि "D कम्पनी" द्वारा बनाई हुई पेन्सिल नम्बर 2 के सिक्के की शक्ति के आँकड़ो के प्रसरण का विश्लेषण करने के लिए आवश्यक है

क प्रक्षित आँकड, किलोग्रामो और योगा मे

पेन्सिल पर परीक्षण का स्थल	पेन्सिल 1 X_1	पेन्मिल 2 X_2	पेन्मिल 3 X_3	पेन्सिल 4 X_4	पेन्मिल 5 X_5	$\sum_1^{N_r} X$	$\left(\sum_1^{N_r} X\right)^2$
I	1.82	1 70	1 70	1 82	1 92	8 96	80 2816
II	1 56	1 36	1 68	1 98	1 86	8 44	71.2336
III	1 78	1 54	2 02	1 82	1 64	8.80	77 4400
IV	1 74	1 92	1 92	1 64	1 75	8 97	80 4609
$\sum_1^{N_r} X$	6 90	6 52	7 32	7 26	7 17	35 17 ΣX	309 4161 $\sum_1^{k_r}\left(\sum_1^{N_r} X\right)^2$

आकड ईगल पेन्सिल क क लिए किए गए विभिन्न प्रकार की पेन्सिलो के परीक्षणों से।

ख प्रेक्षित आँकडो के वर्ग और योग

पेन्सिल पर परीक्षण का स्थल	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_5^2	योग
I	3 3124	2 8900	2 8900	3 3124	3 6864	16 0912
II	2 4336	1 8496	2 8224	3 9204	3.4596	14 4856
III	3 1684	2 3716	4 0804	3 3124	2 6896	15 6224
IV	3 0276	3 6864	3 6864	2 6896	3 0625	16 1525
योग	11 9420	10 7976	13 4792	13 2348	12 8981	62 3517 $=\Sigma X^2$

$N_c = 4,\ N_r = 5,\ N = 20.$

$(\Sigma X)^2 = (35\ 17)^2 = 1{,}236.9289$

$$\sum_1^{k_c}\left(\sum_1^{N_c} X\right)^2 = (6\ 90)^2 + (6\ 52)^2 + (7\ 32)^2 + (7.26)^2 + (7\ 17)^2 = 247\ 8193$$

स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण पूर्व प्रयुक्त व्यजक के प्रयोग द्वारा भी प्राप्त किया जा सकता है, लेकिन जैसा कि पाद-टिप्पणी 5 मे सकेत किया गया है, जब स्तम्भो मे मदो की सख्या समान हो तो यह तनिक सरल किया जा सकता है। पेंसिल ग्रांकडो के लिए,

$$\frac{\sum\limits_{1}^{k_c}\left(\sum\limits_{1}^{N_c} Y\right)^2}{N_c}-\frac{(\Sigma X)^2}{N}=\frac{247\ 8193}{4}-\frac{1{,}236\ 9289}{20}=0.108380$$

पक्ति माध्यों के बीच विचरण—यह सकल्पना अभी दी गई सकल्पना के ठीक समानान्तर है। निम्न सकेतो का प्रयोग करते हुए,

$\bar{Y}_r$, पक्ति का माध्य,

N_r, पक्ति मे मदो की सख्या,

k_r, पक्तियों की सख्या,

$\sum\limits_{1}^{N_r}$ एक पक्ति मे N_r मदो के ऊपर योग, और

$\sum\limits_{1}^{k_r}$, k_r पक्तियो के ऊपर योग,

और यह याद रखते हुए कि पक्तियों म मदों की सख्या समान है, हमारे पास है

$$\frac{\sum\limits_{1}^{k_r}\left(\sum\limits_{1}^{N_r} Y\right)^2}{N_r}-\frac{(\Sigma X)^2}{N}=\frac{309\ 961}{5}-\frac{1{,}236\ 4289}{20}=0\ 036775$$

ग्रवशिष्ट विचरण—स्तम्भ माध्यो के बीच विचरण तथा पक्ति माध्यो क बीच विचरण का योग कुल विचरण से कम है। यह ग्रन्तर, जो

$$(0\ 505255)-(0\ 108380+0\ 036775)=0\ 360100$$

है, जिसे प्राय "ग्रवशिष्ट विचरण" कहा जाता है, क्योकि इसका प्रायः ग्राकलन ग्रवशिष्ट के रूप मे किया जाता है। इस मान का परिकलन सीधे निम्न व्यजक द्वारा करना सम्भव है

$$\Sigma(X+\bar{Y}-\bar{X}_r-\bar{X}_c)^2$$

सारणी 26 3 के ग्रांकडों के लिए, यह समय-साध्य परिकलन 0 360100 देता है, ठीक वही मान जो ग्रवशिष्ट के रूप म प्राप्त हुग्रा था।

ग्राकलित प्रसरण—सारणी 26 4 पूर्वगामी परिणामो का सार है और स्वतन्त्रता की कोटियो की सख्या तथा ग्राकलित प्रसरणों को भी प्रदर्शित करती है। क्योकि पॉच स्तम्भ माध्य हैं, जिनके विचरण का परिकलन X के चारो ग्रोर किया गया था, ग्रत स्तम्भ माध्यो के बीच विचरण मे चार स्वातन्त्र्य कोटियाँ है। पक्ति माध्यो के बीच विचरण क चार माध्य है, जिनका विचरण X के सम्बन्ध म था, ग्रत. पक्ति माध्या के बीच विचरण की तीन स्वातन्त्र्य कोटिया है। क्योंकि कुल विचरण मे

सारणी 26 4

पेन्सिलो के सिक्के की शक्ति के आंकड़ो के प्रसरण का विश्लेषण करने के लिये परिकलनो का सार

विचरण का स्रोत	विचरण की मात्रा	स्वातन्त्र्य कोटियाँ	आकलित प्रसरण
स्तम्भ माध्यो के मध्य ..	0 108380	4	0 027095
पंक्ति माध्यो के मध्य	0 036775	3	0 012258
अवशिष्ट	0 360100	12	0 030008
योग .. .	0 505255	19	...

$N-1=20-1=19$ स्वातन्त्र्य कोटियाँ है, अतः अवशिष्ट विचरण मे $19-(4+3)=12$ स्वातन्त्र्य कोटियाँ है ।

सारणी 26 4 के आकलित प्रसरणो से, अब हम दो F परीक्षण कर सकते है, जिनमे से एक स्तम्भ माध्यो के लिए

$$F=\frac{0\ 027095}{0\ 030008}=0\ 903,\ n_1=4,\ n_2=12,$$

और दूसरा पंक्ति माध्यो के लिए

$$F=\frac{0\ 012258}{0\ 030008}=0\ 408,\ n_1=3,\ n_2=12$$

क्योंकि इनमे से कोई भी F मान 1 0 से अधिक नही बढता, अत यह स्पष्ट है कि न तो स्तम्भ माध्यो के बीच आकलित प्रसरण (अर्थात् पेन्सिलो के बीच) और न पंक्ति माध्यो के बीच आकलित प्रसरण (अर्थात् स्थलो के बीच) हमारे सयोग प्रसरण के आकलन से नही बढता। इसलिए कोई भी सार्थकता परीक्षण आवश्यक नही है ।[8] यदि पाठक की यह जानने मे रुचि हो कि क्या दोनो मे से कोई F का मान 1 0 से सार्थक रूप मे कम है तो उसे पूर्व निर्देशित रीति से कार्य करना चाहिए : अर्थात् $\frac{1}{F}$ का परिकलन करें और यह मान परिशिष्ट ड म विपरीत स्वातन्त्र्य कोटियो के साथ देखें। वह पायेगा कि F का कोई भी मान 1 0 से सार्थक रूप मे कम नही है ।

ऊपर परिकलित F के दोनो मानो के लिए हर आकलित अवशिष्ट प्रसरण था; वह सयोग प्रसरण का हमारा माप था, क्योंकि यह विचरण के चार स्रोतो मे से केवल एक था जो भिन्नरूपता से प्रभावित नही होगा । इस तथ्य से कि सारणी 26 3 मे एक बक्स मे केवल एक प्रविष्टि है यह असभव हो जाता है कि जब एक बक्स मे एक से अधिक प्रविष्टि हो तो *विद्यमान और अलग किए जा सकने वाले दो तत्त्वो का मूल्याकन किया जाए ।* ये

8 यदि हम पेन्सिलो पर उन स्थलो की उपेक्षा करें जहाँ परीक्षण किये गये थे तो सारणी 26 3 के आँकडे वर्गीकरण के एक निकष के साथ एक समस्या होगे । इस आधार पर भी स्तम्भ माध्यो के बीच प्रसरण (अर्थात् पेन्सिलो के बीच) सार्थक नही है । मूल अग्रेजी ग्रन्थ का प्रथम सस्करण, पृष्ठ 356—359 देखिए ।

है : (1) वर्गीकरण के दो निकषों के बीच परस्पर क्रिया तथा (2) बक्सों में विचरण।

वर्गीकरण के दो निकष, बक्स में एक से अधिक प्रविष्टियां—सारणी 26 5 का प्रथम भाग नौ प्रकार के कौधमेलों के, मिनटों में, नई दशा में और 6 मास से 12 मास तक रखने के उपरान्त, जीवन आंकड़े दिखाता है। पहले की तरह यहां वर्गीकरण के दो निकष है परन्तु प्रत्येक बक्स में पाँच प्रविष्टियां है। कुल विचरण अब चार अवयवों से बना है स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण, पंक्ति माध्यों के बीच विचरण, स्तम्भ तथा पंक्ति माध्यों के बीच परस्पर क्रिया, और बक्सों के अन्दर विचरण। सारणी 26 5 मे दिखाये योगों का प्रयोग करके हम इन सभी का सख्यात्मक मान प्राप्त करेंगे।

कुल विचरण—कुल विचरण के लिए व्यजक वही है जो पहले प्रयुक्त हुआ है।

$$\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N} = 34,325,736 - \frac{2,874,460,996}{90},$$

$$= 2,387,280\ 49$$

स्तम्भ माध्यों के बीच विचरण म वही सूत्र प्रयुक्त हुआ है जैसाकि पूर्व उदाहरण मे, क्योंकि सारणी 26 5 के प्रथम भाग के दोनों स्तम्भों मे मदो की सख्या समान है।

$$\frac{\sum_{1}^{k_c}\left(\sum_{1}^{N_c} X\right)^2}{N_c} - \frac{(\Sigma X)^2}{N} = \frac{1,454,015,716}{45} - \frac{2,874,460,996}{90},$$

$$= 373,004\ 85$$

पंक्ति माध्यों के बीच विचरण मे भी पूर्व उदाहरण मे प्रयुक्त व्यजक का ही प्रयोग हुआ है क्योंकि सारणी 26 5 के प्रथम भाग की नौ पंक्तियों मे मदो की सख्या समान है।

$$\frac{\sum_{1}^{k_r}\left(\sum_{1}^{N_r} X\right)^2}{N_r} - \frac{(\Sigma X)^2}{N} = \frac{333,359,050}{10} - \frac{2,874,460,996}{90},$$

$$= 1,397,449\ 49$$

बक्सों के भीतर विचरण—यह बक्सों के माध्यों के चारों ओर बक्सों में मदो का विचरण है। साकेतिक रूप मे यह

$$\sum_{1}^{k_b}\left[\sum_{1}^{N_b}(X - \bar{X}_b)^2\right]$$

है जहाँ

$\bar{X}_b$ बक्स का माध्य है,

N_b बक्स मे मदो की सख्या है,

K_b बक्सों की सख्या है,

सारणी 26 5

D प्रकार के कौंध सलों* के जीवन के आकड़ों के प्रसरण का विश्लेषण करने के लिए आवश्यक मानों का परिकलन

I स्तम्भों और पंक्तिया के लिए प्रेक्षित आकड़े तथा योग

छाप	नया	प्रचयन के बाद	$\sum_{1}^{N_r} X$
	696	612	
	78	513	
A	730	558	6 214
	683	4 9	
	720	49	
	661	643	
	646	642	
B	693	636	6 97
	674	678	
	678	646	
	749	7	
	757	670	
C	832	649	7 09
	87	718	
	760	448	
	840	06	
	734	657	
D	845	728	7 515
	798	576	
	885	746	
	690	628	
	733	648	
E	736	60	6 649
	691	672	
	659	640	
	733	67	
	757	604	
F	714	627	6 637
	608	576	
	693	658	
	478	296	
	734	455	
G	635	320	4 752
	672	272	
	410	480	
	470	413	
	586	543	
H	395	138	3 669
	414	38	
	438	234	
	680	352	
	507	408	
I	362	544	4 489
	458	22	
	555	396	
$\sum_{1}^{N_c} X$	29 704	23 910	53 614 $= \sum X$

II स्तम्भों और पंक्तिया के लिए वर्ग तथा योग

छाप	नया	प्रचयन के बाद	$\sum_{1}^{N_r} X^2$
	484 416	374 544	
	529 984	263 169	
A	532 900	311 364	3 935 732
	466 489	229 441	
	518 400	245 02	
	436 921	413 449	
	417 316	412 164	
B	480 249	404 496	4 355 555
	454 275	459 684	
	459 684	417 316	
	561 001	521 284	
	573 049	448 900	
C	692 224	421 201	5 130 856
	616 369	515 524	
	577 600	200 704	
	705 600	498 436	
	538 756	431 649	
D	714 025	529 984	5 726 771
	636 804	331 7 6	
	783 225	556 516	
	476 100	394 384	
	537 289	419 904	
E	541 696	362 404	4 440 023
	477 481	386 884	
	434 281	409 600	
	537 289	451 585	
	573 049	364 816	
F	509 796	386 884	4 438 071
	369 664	331 776	
	480 249	432 964	
	228 484	87 616	
	538 756	201 025	
G	403 225	102,400	2 491 574
	451 584	73 984	
	168 100	230 400	
	220 900	170 569	
	343 396	294 849	
H	156 025	19 044	1 624 223
	171 396	1 444	
	191 844	54 756	
	462 400	123 904	
	257 049	166 464	
I	131 044	295 936	2 162 931
	209 764	51 529	
	308 025	856 816	
$\sum_{1}^{N_c} X^2$	20 361 174	13 964 562	34 325 736 $\sum X^2$

सारणी 26.5 (वितत)

III बक्सों के लिए योग और योगों के वर्ग

बक्स	$\sum_1^{N_b} Y$	$\left(\sum_1^{N_b} Y\right)^2$
पंक्ति 1, स्तंभ 1	3,557	12,652,249
स्तंभ 2	2,657	7,059,649
पंक्ति 2, स्तंभ 1	3,352	11 235,904
स्तंभ 2	3,245	10 530,025
पंक्ति 3, स्तंभ 1	3,885	15,093,225
स्तंभ 2	3,207	10,284,849
पंक्ति 4, स्तंभ 1	4,102	16,826,404
स्तंभ 2	3,413	11,648,569
पंक्ति 5, स्तंभ 1	3,509	12,313,081
स्तंभ 2	3,140	9,859,600
पंक्ति 6, स्तंभ 1	3,505	12,285,025
स्तंभ 2	3,132	9,809,424
पंक्ति 7, स्तंभ 1	2 929	8,579,041
स्तंभ 2	1 823	3,323 329
पंक्ति 8, स्तंभ 1	2,303	5,303.809
स्तंभ 2	1 366	1,865,956
पंक्ति 9, स्तंभ 1	2,562	6,563,844
स्तंभ 2	1,927	3,713,329
योग	53 614	$168\ 947,312 = \sum_1^{k_b}\left(\sum_1^{N_b} X\right)^2$

* सेल का जीवन, सेल वोल्टेज के परीक्षण के समय 0.90 वोल्ट तक गिरने में लगने वाला समय (मिनटों में) है, कंमट फेडरल स्पेसिफिकेशन डब्ल्यू—बी—101 को के निर्दिष्ट है। D प्रकार के सेल कौंध-प्रकाश आकार में सबसे बड़े होते हैं।

प्रथम भाग में प्रस्तुत आंकड़े, कौंध प्रकाश बैटरियों के परीक्षण में, जो सी० आर० के अगस्त 1953 के बुलेटिन में प्रकाशित हुए हैं, कन्ज्यूमर्स रिसर्च, वाशिंगटन, न्यू जर्सी के सौजन्य से प्राप्त हुए हैं।

$$(\Sigma Y)^2 = (53.614)^2 = 2,874,460,996$$

$$\sum_1^{k_c}\left(\sum_1^{N_c} X\right)^2 = (29,704)^2 + (23,910)^2 = 1,454,015,716.$$

$$\sum_1^{k_r}\left(\sum_1^{N_r} X\right)^2 = (6,214)^2 + (6,597)^2 + (7,092)^2 + (7,515)^2$$

$$+ (6,649)^2 + (6,637)^2 + (4,752)^2 + (3,669)^2$$

$$+ (4,489)^2 = 333,359,050.$$

$\sum_{1}^{N_b}$ बक्स मे N_b मदो के ऊपर योग है, और

$\sum_{1}^{k_b}$ K_b बक्सो के ऊपर योग है।

परिशिष्ट घ, परिच्छेद 26 2 मे दिखाई गई प्रक्रिया के समान ही, यह व्यंजक

$$\Sigma X^2 = \sum_{1}^{k_b}\left[\frac{\left(\sum_{1}^{N_b} X\right)^2}{N_b}\right]$$

होगा। फिर भी सारणी 26 5, भाग 1 के प्रत्येक बक्स म मदो की सख्या समान है; अतः हम लिख सकते है

$$\Sigma X^2 - \frac{\sum_{1}^{k_t}\left(\sum_{1}^{N_b} X\right)^2}{N_t} = 34,325,736 - \frac{168,947,312}{5},$$

$$= 34\ 325,736 - 33,789,462\ 4,$$

$$= 536,273\ 6$$

अन्त क्रिया—गत प्राप्त तीन विचरणो के योग से, कुल विचरण सख्यात्मक मान बढ जाता है। यह अन्तर, स्तम्भ माध्यो और पक्ति माध्यों के बीच अन्त.क्रिया के कारण, विचरण है। इसका सख्यात्मक मान है

$$2,387,280\ 49 - (373,004\ 85 + 1,397,449\ 49 + 536,273\ 6) = 80,552\ 55.$$

विकल्पत, परन्तु अधिक परिश्रम से, अन्त क्रिया का परिकलन सीधा निम्न से किया जा सकता है

$$\sum_{1}^{k_b}[N_b(\bar{X}_b + \bar{X} - \bar{X}_r - \bar{X}_c)^2]$$

आकलित प्रसरण—सारणी 26 6 मे विचरण की मात्रा, स्वातन्त्र्य कोटियाँ और विचरण के प्रत्यक स्रोत के लिए आकलित प्रसरण दिखाए हैं, कुल विचरण और कुल विचरण के लिए स्वातत्र्य कोटियाँ भी दिखाई गई है। बक्सों मे विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियो की सख्या है $k_b(N_b - 1) = 72$, क्योंकि बक्स की प्रत्येक मद का विचलन बक्स के माध्य से प्राप्त किया गया था। अन्त.क्रिया के लिए स्वातत्र्य कोटियाँ विचरण के अन्य तीन स्रोतो के लिए स्वातत्र्य कोटियो को कुल विचरण के लिए स्वातत्र्य कोटियो मे से घटा कर प्राप्त की गई है। इस प्रकार, अन्त क्रिया के लिए स्वातत्र्य कोटियो की सख्या है।

$$89 - (1 + 8 + 72) = 8$$

सारणी 26 6

D प्रकार के कौंच सेलों के जीवन के आँकडो के प्रसरण के विश्लेषण के लिए परिकलनो का सार

विचरण का स्रोत	विचरण की मात्रा	स्वातन्त्र्य कोटियाँ	आकलित प्रसरण
स्तम्भ माध्यो के बीच	373,004 85	1	373,004 85
पंक्ति माध्यो के बीच	1 397 449 49	8	174,681 19
अन्त क्रिया	80,552 55	8	10 069 07
बक्सो म	536,273 6	72	7,448 24
योग	2 387 280 49	89	

अब हम स्तम्भ माध्यो के बीच आकलित प्रसरण तथा पंक्ति माध्यो के बीच आकलित प्रसरण का परीक्षण करने के लिए तैयार है। फिर भी हम पहले यह निर्णय करना चाहिए कि अन्य दो प्रसरणो म से F परीक्षण का हर कौनसा होगा। यह सत्य है कि बक्सो म विचरण विचरण के उन चार स्रोतो म स केवल एक है जो स्तम्भ पंक्ति अथवा माध्यो के बीच विषमता से अप्रभावित रहते है। अत यह प्रतीत होता है कि बक्सो मे आकलित बक्स प्रसरण सयोग का हमारा माप होगा। लेकिन एक अन्य बिन्दु भी विचार योग्य है यदि पंक्ति (अथवा स्तम्भ) माध्यो के बीच अन्तर पंक्ति और स्तम्भ माध्यो के बीच अन्त क्रिया से अधिक न हो तो अन्तर बहुत साथक नही हो सकता।[9] परिणामत सामान्य प्रविधि निम्न प्रकार होगी प्रथम अन्त क्रिया के आकलित प्रसरण का बक्सा मे आकलित प्रसरण के प्रति परीक्षण करो यदि अन्त क्रिया का आकलित प्रसरण बक्सो के अन्दर आकलित प्रसरण की अपेक्षा साथक रूप स अधिक है तब अन्य दो आकलित प्रसरणो मे स प्रत्येक का अन्त क्रिया के आकलित प्रसरण प्रति परीक्षण करो, यदि अन्त क्रिया का आकलित प्रसरण बक्सो मे आकलित प्रसरण की अपेक्षा कम है अथवा साथक रूप से अधिक नही है तो इन दो स्रोतो से प्राप्त स्वातन्त्र्य कोटियो और विचरण को मिलाओ और

9 यह बिन्दु सारणी 26 5 के आकडो से समझना इतना सरल नही है जितना मूड द्वारा दिये हुए एक उदाहरण म। उसका उदाहरण जिसके लिए कोई आकड नही दिय गय है पाच मनुष्यो (स्तम्भो) से सम्बन्धित है जो चार मशीन (पंक्तियाँ) चलाते हैं और प्रत्येक बक्स मे तीन प्रक्षण हैं। वह देखता है कि एक आदमी एक मशीन पर दूसरे की अपेक्षा अधिक अच्छा काम कर सकता है, लेकिन वही आदमी दूसरी मशीन पर उतना अच्छा काम न कर सके या अधिक खराब काम भी कर सकता है। सार्थकता के लिए, मशीनो के मध्य अन्तर अन्त क्रिया से अधिक होना चाहिए अन्यथा सबसे अच्छी मशीन लगाने पर भी व्यक्ति को यह प्रतीत हो सकता है कि उस मशीन पर काम करने वाला व्यक्ति उतना उत्पादक नही है जितना कि वह दूसरी मशीन पर हो सकता था। ए० एम० मूड इंट्रोडक्शन टु दि थीअरि ऑफ स्टैटिस्टिक्स, मैक्ग्रा हिल बुक कम्पनी न्यूयार्क, 1950 पृष्ठ 334—337 देखिए।

एक नवीन आकलित प्रसरण का परिकलन करो जोकि F परीक्षण के लिए हर का कार्य कर सके।[10]

प्रथम बक्सो म आकलित प्रसरण के प्रति अन्त क्रिया के आकलित प्रसरण का परीक्षण करने पर, हमारे पास है

$$F = \frac{10\ 069\ 07}{7\ 448\ 24} = 1\ 35 \quad (n_1 = 8, n_2 = 72)$$

परिशिष्ट ड से यह दिखलाई पडता ह कि यह F का मान 1 0 से सार्थक रूप से अधिक नही है, इसलिए अन्त क्रिया का आकलित प्रसरण, बक्सो मे आकलित प्रसरण से सार्थक रूप मे अधिक नही होता।

क्योकि अन्त क्रिया सार्थक नही है, हम अन्त क्रिया के विचरण और बक्सो के अन्दर विचरण को मिला देते है और विचरण के इन दो स्रोतो की स्वातन्त्र्य कोटियो से इस मान को विभाजित करते है और प्राप्त करत है

$$616{,}826\ 15 - 80 = 7\ 710\ 33$$

यह स्तम्भ माध्यो के बीच आकलित प्रसरण और पंक्ति माध्यो के बीच आकलित प्रसरण के परीक्षण के लिए F का हर है।

स्तम्भ माध्यो के लिए,

$$F = \frac{373\ 004\ 85}{7{,}710\ 33} = 48\ 38 \quad (n_1 = 1,\ n_2 = 80).$$

परिशिष्ट ड मे यह दिखाई पडता है कि F का यह मान 0 001 बिन्दु से पर्याप्त दूर है, इसलिए स्तम्भ माध्यो के बीच अन्तर (ताजे तथा रखे हुए सेलो के बीच) वास्तविक है।

पंक्ति माध्यो के लिए,

$$F = \frac{174\ 681.19}{7\ 710\ 33} = 22\ 66. \quad (n_1 = 8,\ n_2 = 80)$$

F का यह मान भी 0 001 बिन्दु से दूर है, और पंक्ति माध्यो के बीच अन्तर (सेलो के छापो के बीच) सार्थक है।

वे स्थितियाँ जिनमे बक्सो मे मदो की असमान सख्या के साथ वर्गीकरण के दो निकष है, और वर्गीकरण के तीन अथवा अधिक के निकषो वाली स्थितियाँ इस पुस्तक के सीमा-क्षेत्र से बाहर है।

---

10 कुछ अधिकारियो ने अन्त क्रिया के कारण होने वाले अथवा बक्सो के भीतर सबसे बडे दो प्रसरणो के प्रयोग की संस्तुति की है। यदि अन्त क्रिया का आकलित प्रसरण अधिक है लेकिन सार्थक रूप से नही, तो इस प्रविधि मे अन्त क्रिया के सम्भव छोटे प्रभावो के न ज्ञात होने की सभावना है जब अन्त क्रिया के आकलित प्रसरण का परीक्षण करते हैं। इससे प्रकार II की अशुद्धियो की सख्या मे वृद्धि की सम्भावना भी है।

$\frac{x}{\sigma}$, t, / और F के मध्य अन्त:सम्बन्ध

अध्याय 24 में यह देखा गया था कि t बटन प्रसामान्य बटन की ओर पहुँचता है जैसे n अनन्त की ओर बढ़ता। इसलिए प्रसामान्य बटन t बटन की एक विशेष दशा है जैसा कि परिशिष्ट भ की अन्तिम पंक्ति में दिखाया गया है।

अध्याय 25 में यह संकेत किया गया था कि एक ही प्रकार के आँकड़ों के समुच्चय के लिए प्रसामान्य विचलन वही प्रायिकताएँ उत्पन्न करते हैं जैसी t^2 के मान करते हैं जब t^2 के लिए $n=1$ है। विशेष रूप से, ज और ञ परिशिष्टों की तुलना करने पर हमें ज्ञात हुआ कि दत्त प्रायिकता के लिए $\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2=t^2$ जबकि t^2 के लिये $n=1$

इस अध्याय में यह उल्लेख किया गया था कि किसी भी दत्त प्रायिकता के लिए $\frac{\chi^2}{n}=F$, जब χ^2 के लिए n F के लिए n_1 के बराबर है और जब F के लिए $n_2=\infty$ है। यह परिशिष्ट ञ और ड की तुलना करने पर देखा जा सकता है।

इस अध्याय में यह भी संकेत किया गया था कि किसी भी दत्त प्रायिकता के लिए $t^2=F$ जब t के लिए n, F के लिए n_2 के बराबर है और जब F के लिए $n_1=1$। यह परिशिष्ट क और ड की परीक्षा से स्पष्ट है।

पूर्वगत चार अनुच्छेदों में जो कुछ कहा गया है, वह सब चार्ट 26 2 में एकत्र किया गया है। इस चार्ट से यह स्पष्ट है कि F सम्मिलनकारी बटन है जब कि अन्य तीन बटन केवल F की विशेष स्थितियां हैं।

वैषम्य और ककुदता के माप

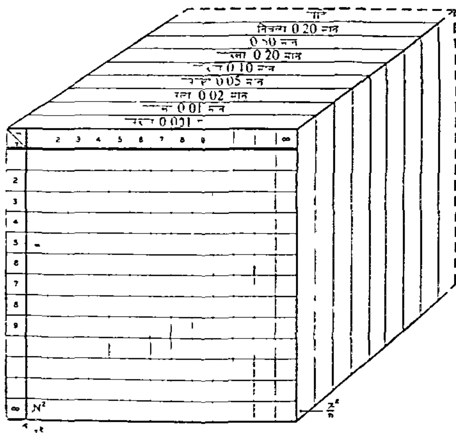
वैषम्य—अध्याय 10 म 409 विद्यार्थियों के ग्रेडों के बटन का वैषम्य, जैसा कि β_1 के द्वारा मापा गया था, 0 16 पाया गया था। 0 05 का प्रयोग निकष के रूप मे करने पर, क्या β_1 का यह मान 0 से सार्थक रूप में अधिक होगा ? इगोन एस० पियरसन ने β_1 की सीमाओं 0 10 और 0 02 की सारणियाँ तैयार की हैं जब वह सामान्य समष्टि से प्राप्त प्रतिदर्शों पर आधारित है। यह सारणी परिशिष्ट ण के रूप में दिखाई गई है, और इस परिशिष्ट मे सलग्न छोटा चार्ट β_1 के बटन का रूप दिखाता है। परिशिष्ट ण, $N=409$ के लिए β_1 का मान नहीं दिखाता, लेकिन $N=400$, अथवा $N=450$ के लिए $\beta_1=0\ 16$ मान जो 0 02 बिन्दु से परे है। सार्थक वैषम्य उपस्थित है।

अध्याय 10 में 371 अमरीकी आविष्कर्ताओं की मृत्यु पर आयु के बटन के लिए β_1 का मान 0 16 पाया गया था। परिशिष्ट ण से यह मान भी शून्य से सार्थक रूप में अधिक दिखाई पड़ता है।

अध्याय 23 में, नवम कक्षा की 103 छात्राओं द्वारा दूरी के लिए आधार-गेंद के प्रक्षेपणों के बटन पर एक प्रसामान्य वक्र आसजित किया गया था। $\beta_1=0\ 0104$ पाया गया था। β_1 का मान 0 से सार्थक रूप में भिन्न नहीं है, जैसा कि परिशिष्ट ण में देखा जा सकता है।

ककुदता—सारणी 10 9 में एक तुंग ककुद बटन दिखाया गया, जो पाँच कमरों वाले लकड़ी के मकानों का निर्माण मूल्य $\beta_2=4\ 46$ और $N=82$ के साथ था। 0 05 को

निकाय मान क्या, क्या यह 4.46 का मान सार्थक स्तर से 3.0 से भिन्न है, जो कि प्रसामान्य बटन के लिए β_2 का मान है ? परिशिष्ट में, β_2 की ऊपरी तथा निम्न 0.01 और 0.05 सीमाएँ दिखाता है जब वह प्रसामान्य बटन से यादृच्छिक प्रतिदर्शों पर आधारित है। क्योंकि परिशिष्ट में N के मानों के लिए 1000 से कम किसी भी प्रविष्टि को नहीं दिखाता, हम विश्वस्त नहीं हो सकते कि β_2=4.46 ऊपरी 0.01 बिन्दु से परे है अथवा नहीं, लेकिन सम्भवतः यह 0.05 से परे है।



चार्ट 26.2 प्रसामान्य, t, χ^2, और F बटनों के मध्य सम्बन्ध। इकहरी रेखाओं के बाच प्रत्येक बक्स चार्ट के किसी के रूप में सोचा जा सकता है, जो अन्दर बाहर खींचा जाता है, F मानों को ओर, कुछ गहराई में, प्रायिकता सार्थकताओं के लिए चार प्रसामान्य (N^2), t^2, और $\frac{\chi^2}{n}$ मानों को प्रकट करता है सम्मुख आरेख F है। नीचे बाएँ सिरे का बक्स N^2 है। ऊपरी स्तम्भ t^2 है। नीचे की पंक्ति $\frac{\chi^2}{n}$ है। यह चार्ट क्व० नायर का "स्टैटिस्टिकल अर्नेलिसिस इन बायोलोजी", इंटरसाइंस पब्लिशर्स, न्यूयार्क, पृष्ठ 47, से दिये गए चार्ट का रूपान्तर है।

सारणी 10.10 में बिजली के लैम्पों के एक समूह के जीवन की लम्बाई के बटन का β_2=2.22 पाया गया था। हम यह निर्धारित करने के लिए परीक्षण नहीं कर सकते कि 2.22 सार्थक रूप से 3.0 से कम है अथवा नहीं, क्योंकि सारणी 10.10 के आँकड़े प्रतिशत

वारंवारताओं के रूप में थे और हमें सन्निहित लैम्पों की संख्या ज्ञात नहीं है। फिर भी, परिशिष्ट न देखें, तो हम देख सकते हैं कि $\beta_2 = 2.18$ निम्न 0.01 सीमा पर है और $\beta_2 = 2.35$ निम्न 0.05 सीमा पर, जबकि प्रतिदर्श केवल 100 मदों का है। 125 अथवा अधिक मदों के प्रतिदर्शों के लिए, $\beta_2 = 2.22$, 0.01 बिन्दु में पड़ते हैं। यदि सारणी 10.10 के आँकड़ों में 100 अथवा अधिक लैम्प सम्मिलित हों (होने चाहिएँ, नहीं तो प्रतिशतताएँ प्रकट न की जातीं) तो बंटन सार्थक रूप से चपटककुदी है।

सहसम्बन्ध गुणांक

सरल सहसम्बन्ध—जब किसी प्रतिदर्श के लिए सहसम्बन्ध विश्लेषण किया जा चुका है, तो अनेक प्रश्न उत्पन्न हो सकते हैं। उनमें से कुछ हैं : क्या r का मान शून्य से सार्थक रूप में भिन्न है? क्या r का मान शून्य से भिन्न निश्चित मान से सार्थक रूप में भिन्न है? क्या दो r के मान सार्थक रूप में एक दूसरे से भिन्न हैं? समष्टि में सहसम्बन्ध की विश्वास्यता सीमाएँ क्या हैं? समष्टि में सहसम्बन्ध का एकाकी अनुमान क्या लगाया जा सकता है? हम इनमें से प्रत्येक पर क्रमानुसार विचार करेंगे।

क्या r का मान सार्थक रूप में शून्य से भिन्न है? यहाँ हम इस परिकल्पना का परीक्षण करेंगे कि समष्टि में कोई सहसम्बन्ध नहीं है। अर्थात् r_ρ^2 अथवा $r_\rho = 0$। यदि यह परिकल्पना अविश्वसनीय है तो सहसम्बन्ध सार्थक माना जायेगा। इस प्रविधि में t परीक्षण संलग्न है जिससे पाठक पूर्व परिचित है। t का मान

$$t = r\sqrt{\frac{(N-2)}{1-r^2}} \text{ अथवा } \sqrt{\frac{r^2(N-2)}{1-r^2}}$$

से प्राप्त किया गया है जिसके बाद हम परिशिष्ट भ में P का $n = N-2$ के साथ निर्धारण करेंगे। (आकलन समीकरण में दो स्थिरांकों के कारण दो स्वातन्त्र्य कोटियाँ नष्ट हो गई हैं।) पेड़ों की ऊँचाई वृद्धि और मोटाई वृद्धि के आँकड़ों के लिए N था 20, और r था $+0.758$। य

$$t = 0.758\sqrt{\frac{(20-2)}{1-0.574}} = 4.93$$

देते हैं। जब $n = 20-2 = 18$ है, तो परिशिष्ट भ दिखाता है कि $t = 4.93$ से $P < 0.001$। फलस्वरूप, r का मान सार्थक है।

---

11 अधिक पूर्ण वक्तव्य यह है हम जानते हैं कि $t^2 = F$ जब F के लिए $n_1 = 1$ और जब t के लिए n, F के लिए n_2 के बराबर है। उपर्युक्त t परीक्षण के समकक्ष F परीक्षण है,

$$F = \frac{\Sigma y_c^2 - (2-1)}{\Sigma y_s^2 - (N-2)}$$

व्याख्यात विचरण की $2-1=1$ स्वातन्त्र्य कोटि है क्योंकि यह $\bar{Y}$ से Y_c मानों $(Y_c = a+bX)$ के विचलनों पर आधारित है। अव्याख्यात विचरण की $N-2$ स्वातन्त्र्य कोटियाँ हैं क्योंकि यह $Y_c = a+bX$ से N मानों के विचलनों पर आधारित है।

यह रुचिकर है कि यह परीक्षण ठीक वैसा ही है जैसाकि यह निश्चित करने के लिये कि b सार्थक रूपेण शून्य से भिन्न है अथवा नहीं । प्रयोज्य व्यजक है[12]

$$t=b\sqrt{\frac{\Sigma x^2(N-2)}{\Sigma y_s^2}}$$

पेडो के आंकड़ो के लिए, हमने पाया कि $b=+1\ 677$, $\Sigma x^2=42\ 6055$, और $\Sigma y_s^2=88\ 74$ परिणामस्वरूप,

$$t=1\ 677\sqrt{\frac{42\ 6055(20-2)}{88\ 74}}=4\ 93,$$

ठीक वैसा ही जैसाकि पहले प्राप्त हुआ था ।

क्या r का मान शून्य से भिन्न निर्दिष्ट मान से सार्थक रूप मे भिन्न है ? जब $r_\rho=0$, यादृच्छिक प्रतिदर्शों से तब r के मानो का बटन 0 के आसपास सममित है जिसका परिसर $-1\ 0$ से $+1\ 0$ तक है । जब $r_\rho\neq0$, तब यादृच्छिक प्रतिदर्शों से r के मानो का बटन r_ρ के आसपास सममित नहीं है, और t परीक्षण अनुपयुक्त है । यह परीक्षण करने के लिए कि r सार्थक रूप से $r_\rho\neq0$ के मान से भिन्न है या नहीं, हम r को निम्न मे परिवर्तित करते हैं[13]

$$z=1\ 15129\ \text{लघु}\ \frac{1+r}{1-r},$$

जिसका बटन लगभग

$$z_\rho=1\ 15129\ \text{लघु}\ \frac{1+r_\rho}{1-r_\rho},$$ के आसपास प्रसामान्य है

जबकि z की मानक त्रुटि है ।[14]

$$\sigma_z=\frac{1}{\sqrt{N-2\ 6667}}$$

12. समानता के प्रमाण के लिए, देखिए परिशिष्ट ध, परिच्छेद 26 3 । r अथवा b का परीक्षण करने के लिए अनेक वैकल्पिक सूत्र उपलब्ध हैं । उनमे निम्नलिखित हैं

$$t=\sqrt{\frac{b\Sigma xy(N-2)}{\Sigma y_s^2}}=\sqrt{\frac{(\Sigma xy)^2(N-2)}{\Sigma x^2\Sigma y^2-(\Sigma xy)^2}},\quad \sqrt{\frac{\Sigma y_s^2(N-2)}{\Sigma y_s^2}}$$

13. देखिए आर० ए० फिशर, *स्टेटिस्टिकल मैथड्स फॉर रिसर्च वर्कर्स*, यथापूर्व, पृष्ठ 197–204 ।

14 सामान्य व्यजक है $\sigma_z=\frac{1}{\sqrt{N-3}}$, जो यहाँ दिया गया है उसकी व्याख्या के लिए देखिए, हैरल्ड होटेलिंग का लेख "न्यू लाइट ऑन दि कोरिलेशन कोएफ़िशेन्ट एन्ड इट्स ट्रांसफार्म्स", *जर्नल आफ दि रॉयल स्टेटिस्टिकल सोसायटी*, सीरीज B, खण्ड XV, सख्या 2, 1953, पृष्ठ 220 । पृष्ठ 223–224 पर होटेलिंग ने z के दो सुधार सुझाए हैं जो ऊपर निर्दिष्ट रूप की अपेक्षा प्रसामान्य के अधिक निकट हो सकते हैं ।

मान लो हम यह जानना चाहते है कि पेड़ की वृद्धि के आँकडो के लिए +0 758 का हमारा r +0 750 के काल्पनिक r_ρ से सार्थक रूप मे भिन्न है अथवा नही। हम निम्न परिकलन करेंगे

$$z = 1\ 15129 \text{ लघु } \frac{1+0\ 758}{1-0\ 758} = 0\ 992$$

$$z_\rho = 1\ 15129 \text{ लघु } \frac{1+0\ 750}{1-0\ 750} = 0\ 973,$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{20-2\ 6667}} = 0\ 240, \text{ और}$$

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{z-z_\rho}{\sigma} = \frac{0\ 992-0\ 973}{0\ 240} = \frac{0\ 019}{0\ 240} = 0\ 08$$

परिशिष्ट ज हमे बताता है कि 100 मे से लगभग 94 बार इतने बडे या अधिक बडे अन्तर की सयोग कारणो से आशा कर सकते है। यह परिकल्पना कि $r = +0\ 758$ उस यादृच्छिक प्रतिदर्श का सहसम्बन्ध है, जो ऐसी समष्टि से लिया गया है जिसका $r_\rho = +0\ 750$, सन्दिग्ध नही है। अन्तर सार्थक नही है।

क्या r के दो मान सार्थक रूप मे एक दूसरे से भिन्न है? यदि अपने प्रतिदर्श के लिए $r = +0\ 758$ ($z_1 = 0\ 992$) के मान तथा +0 750($z_2 = 0\ 973$) के अन्य प्रतिदर्श r के मान मे, जो मदो के 20 युग्मो से प्राप्त हुआ था, अन्तर की सार्थकता के परीक्षण मे हमारी रुचि होती तो हम निम्न परिकलन करते

$$\sigma_{z1} = \frac{1}{\sqrt{20-2\ 6667}} = 0\ 240,$$

$$\sigma_{z2} = \frac{1}{\sqrt{20-2\ 6667}} = 0\ 240,$$

$$\sigma_{z1-z2} = \sqrt{\sigma^2_{z1}+\sigma^2_{z2}} = \sqrt{(0\ 240)^2+(0\ 240)^2},$$

$$= 0\ 339 \text{ तथा}$$

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{z_1-z_2}{\sigma_{z1-z2}} = \frac{0\ 992-0\ 973}{0\ 339} = \frac{0\ 019}{0\ 339} = 0\ 06$$

सामान्य क्षेत्रो की सारणी (परिशिष्ट ज) प्रदान करती है $P = 0\ 95$, और हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि अन्तर सार्थक नही है।

r_ρ की विश्वास्यता सीमाएँ—जैसाकि $\bar{X}_\rho$, π, और σ की स्थिति मे है, हम r_ρ की विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करने की इच्छा कर सकते है। ये निम्न व्यजक के प्रयोग द्वारा प्राप्त होती है

$$z = z_\rho \pm \frac{x}{\sigma}\sigma_z$$

यह हमे z_ρ के दो मान प्रदान करेगा, जोकि तब r_ρ मानो मे परिवर्तित कर दिये जाते है।

यदि हम पेड की वृद्धि के आँकडो के लिए 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ $\left(\frac{x}{\sigma}=1\ 960\right)$ प्राप्त करना चाहते है जहाँ r था $+0\ 758$ और $z=0\ 992$, तो हमारे पास आता है

$$0\ 992=z_{\rho} \pm (1\ 960)(0\ 240)$$
$$z_{\rho}=0\ 992 \pm 0\ 4704$$
$$z_{\rho_1}=0\ 5216 \text{ तथा}$$
$$z_{\rho_2}=1\ 4624$$

z_{ρ_1} को r_{ρ_1} मे और z_{ρ_2} को r_{ρ_2} म बदलने से प्राप्त होगा

$$r_{\rho_1}=+0\ 479 \text{ और}$$
$$r_{\rho_2}=+0\ 898$$

जो 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाए हैं।

r_{ρ} का एकल आकलन प्रमरणो पर विचार करते हुए, हमने देखा था कि एक प्रतिदर्श σ^2 का एकल आकलन से

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\Sigma x^2}{N-1}$$

के द्वारा किया जा सकता है। लगभग इसी प्रकार r_{ρ}^2 का आकलन भी किया जा सकता है। हम इसका $\hat{r}^2$ के रूप मे उल्लेख करेंगे। हम समष्टि में निर्धारण के गुणाक का आकलन प्रकट करने के लिए $\hat{r}^2$ का प्रयोग अधिक तर्कसगत $\hat{r}_{\rho}^2$ के स्थान पर करते है, ताकि इस अध्याय के अन्तिम भाग मे पचीदा पादाको से बचा जा सके

हम अध्याय 19 की पादटिप्पणी 8 के द्वारा पहले ही जानते हैं कि

$$r^2=1-\frac{\Sigma y_e^2}{\Sigma y^2}=1-\frac{\Sigma y_e^2-N}{\Sigma y^2-N},$$
$$=1-\frac{s_{Y\cdot X}^2}{s_Y^2}$$

अब, $S_{Y\cdot X}^2$, $\sigma_{Y\cdot X}^2$ का अभिनत आकलन और S_Y^2, σ_Y^2 का अभिनत आकलन है। अनभिनत आकलन विचरण के मापो को स्वातन्त्र्य कोटियो की उपयुक्त सख्या से भाग देकर प्राप्त किए जाते, न कि N से। इस प्रकार,

$$\hat{\sigma}_Y^2=\frac{\Sigma y^2}{N-1},$$
$$\hat{\sigma}_{Y\cdot X}^2=\frac{\Sigma y_e^2}{N-2}; \text{ और}$$
$$\hat{r}^2=1-\frac{\hat{\sigma}_{Y\cdot X}^2}{\hat{\sigma}_Y^2}=1-\frac{\Sigma y_e^2-(N-2)}{\Sigma y^2-(N-1)},$$
$$=1-\frac{\Sigma y_e^2}{\Sigma y^2}\ \frac{N-1}{N-2}.$$

क्योंकि

$$\frac{\Sigma y_s^2}{\Sigma y^2} = 1 - r^2,$$

अत हम लिख सकते है

$$\hat{r}^2 = 1 - (1 - r^2)\frac{N-1}{N-2}$$

पेड की वृद्धि के आँकडो के लिये, जहाँ $r^2 = 0\ 574$ और $r = +0\ 758$

$$\hat{r}^2 = 1 - (1 - 0\ 574)\frac{20-1}{20-2}$$

$$= 0\ 550$$

$$\hat{r} = +0\ 742$$

जब r^2 बहुत निम्न हो तो $\hat{r}$ ऋणात्मक हो सकता है। ऐसी स्थिति में, समष्टि मे सहसम्बन्ध को शून्य समझा जाना चाहिए।

अरेखिक सहसम्बन्ध द्वितीयाश वक्र, तृतीयाश वक्र अथवा उच्च स्तर के वक्र से व्यवहार करते समय, हमारी यह जानने की इच्छा हो सकती है कि (1) क्या निर्धारण का अरेखिक गुणाक निम्न स्तर के वक्र पर आधारित गुणाक से, सार्थक रूप मे बडा है, अथवा (2) क्या अरेखिक गुणाक शून्य से सार्थक रूप मे बडा है। कभी-कभी हमारी यह भी इच्छा हो सकती है कि समष्टि म सहसम्बन्ध का आकलन किया जाए।

द्वितीयाश वक्र— भारी चीड के पेडो के व्यास और आयतन के आँकडो के लिए, अध्याय 20 मे हमने देखा था कि

$$r^2 = \frac{\text{सीधी रेखा द्वारा व्याख्यात विचरण}}{\text{कुल विचरण}}$$

$$= \frac{\Sigma \hat{y}^2}{\Sigma y^2} = \frac{152,259\ 2}{159,698} = 0\ 953,$$

और

$$r^2_{Y\cdot X X^2} = \frac{\text{द्वितीयाश वक्र द्वारा व्याख्यात विचरण,}}{\text{कुल विचरण}}$$

$$= \frac{\Sigma \hat{y}^2_{Y\cdot X X^2}}{\Sigma y^2} = \frac{156,235\ 5}{159,698} = 0\ 978.$$

यह निश्चित करने की कि क्या $r^2_{Y\cdot X X^2}$ सार्थक रूप से r^2 से अधिक है, सरलतम विधि है, $r^2_{YX^2\cdot X}$ के माप का परिकलन करना, जिसका उल्लेख अध्याय 20 की पाद-टिप्पणी 2 म किया गया है, और $n = N-2$ के साथ $r^2_{YX^2\cdot Y}$ का t परीक्षण करना। ($N-3$ के प्रयोग की व्याख्या अगले पृष्ठ पर दी गई है।) आंशिक निर्धारण का यह गुणाक, $r^2_{YX^2 X}$, जो

हमें वह अनुपात बताता है जो (1) X^2 के प्रयोग द्वारा व्याख्यात मयुक्त विचरण का (2) सीधी रेखा द्वारा अव्याख्यात विचरण के साथ है,

$$r^2_{YX^2 \cdot X} = \frac{r^2_{Y \cdot XX^2} - r^2}{1 - r}$$

$$= \frac{0.978 - 0.953}{1 - 0.953} = 0.532$$

t-परीक्षण ठीक वही है जैसा कि r के लिए t-परीक्षण, अपवाद यह है कि हमने $N-2$ के स्थान पर $N-3$ का प्रयोग किया है।

$$t = \sqrt{\frac{r^2_{YX^2 \cdot X}(N-3)}{1 - r^2_{YX^2 \cdot X}}},$$

$$= \sqrt{\frac{0.532(20-3)}{0.468}} = 4.4$$

जब $n=17$, $t=4.4$ का मान 0.001 स्तर से परे है (देखिए परिशिष्ट क), इस प्रकार हम उपसंहार कर सकते है कि X के प्रयोग द्वारा विचरण की सार्थक रूप से बड़ी मात्रा की व्याख्या हुई है।

पूर्ववर्ती सामान्य F-परीक्षण[15] का सरल समकक्ष है जिसमें

$$F = \frac{\left[\begin{pmatrix}\text{द्वितीयाश वक्र द्वारा}\\\text{व्याख्यात विचरण}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{सीधी रेखा द्वारा व्याख्यात}\\\text{विचरण}\end{pmatrix}\right] - \text{स्वातंत्र्य कोटियाँ}}{\left[\begin{pmatrix}\text{कुल विचरण}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{द्वितीयाश वक्र द्वारा}\\\text{व्याख्यात विचरण}\end{pmatrix}\right] - \text{स्वातंत्र्य कोटियाँ}},$$

$$= \frac{(\Sigma y'^2_{cY \cdot XX^2} - \Sigma y^2_c) - 1}{(\Sigma y^2 - \Sigma y'^2_{cY \cdot XX^2}) - (N-3)},$$

$N_1 = 1$ और $N_2 = N-3$ के साथ। अंश मे स्वातन्त्र्य कोटियो की सख्या $2-1=1$, है क्योंकि यह द्वितीयाश वक्र से परिकलित व्याख्यात विचरण के लिए स्वातन्त्र्य कोटियो की सख्या (जो दो है) और सीधी रेखा मे परिकलित व्याख्यात विचरण के लिए स्वातंत्र्य कोटियो की सख्या (जो एक है) के बीच का अन्तर है। द्वितीयाश वक्र से प्राप्त व्याख्यात विचरण मे स्वातंत्र्य कोटियाँ $3-1=2$ हैं क्योंकि समीकरण में तीन स्थिराक है और परिकलित मानों का विचरण $\bar{Y}$ के आसपास लिया गया था, व्याख्यात विचरण मे, जो कि सीधी रेखा से प्राप्त किया गया, स्वातन्त्र्य कोटि $2-1=1$ है, क्योंकि समीकरण मे दो स्थिराक है और परिकलित मानो का विचरण $\bar{Y}$ के आसपास लिया गया था। हर मे $\Sigma y^2_{sY \cdot XX^2} = \Sigma y^2 - \Sigma y'^2_{cY \cdot XX^2}$ के लिए स्वातन्त्र्य कोटियों की सख्या $N-3$ है, क्योंकि तीन स्थिराकों वाले द्वितीयाश वक्र से Y मानो (जो N है) के वर्गित अन्तरों से अव्याख्यात विचरण प्राप्त किया गया

15. आंशिक निर्धारण के इस और अन्य गुणाकों के लिए t परीक्षण तथा F-परीक्षण की समानता घ परिशिष्ट के परिच्छेद 26.4 मे दिखाई गई है।

था। विकल्पत, हम देख सकते हैं कि कुल विचरण में $N-1$ स्वातंत्र्य कोटियाँ और व्याख्यात विचरण में 3—1 स्वातंत्र्य कोटियाँ है, इसलिए, उनके अन्तर में जो कि अव्याख्यात विचरण है $(N-1)-(3-1)=N-3$ स्वातंत्र्य कोटियाँ हैं।

यदि F के लिए ऊपर दिए हुए व्यंजक के अंश और हर में से प्रत्येक को Σy^2 से विभाजित कर दें, तो हमारे पास विकल्प रूप होगा

$$F=\frac{r^2_{YXX^2}-r^2)-1}{(1-r^2_{YXX^2})-(N-3)}$$

$n_1=1$ और $n_2=N-3$ के साथ।

यह निश्चित करने के लिए कि $r^2_{YXX^2}=0.978$ सार्थक रूप से 0 से बड़ा है अथवा नहीं, हम F-परीक्षण का प्रयोग निम्न दो में से किसी एक का परिकलन करते हुए, करते हैं [16]

$$F=\frac{r^2_{YXX^2}\div(3-1)}{(1-r^2_{YXX^2})-(N-3)}$$

अथवा

$$F=\frac{\Sigma y^2_{cYXX^2}-(3-1)}{(\Sigma y^2-\Sigma y^2_{cYXX^2})-(N-3)},$$

$n_1=3-1$ तथा $n_2=N-3$ के साथ। हम अंश में $(3-1)$ स्वातंत्र्य कोटियों का प्रयोग करते है क्योंकि द्वितीयांश वक्र में तीन स्थिरांक है और उस वक्र से परिकलित व्याख्यात विचरण Y के आसपास लिया गया था, अधिक सामान्य रूप से, व्याख्यात विचरण के लिए स्वातंत्र्य कोटियाँ हैं $(m-1)$, जहाँ m आकलन समीकरण में स्थिरांकों की संख्या है। हर में स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या की व्याख्या पूर्व अनुच्छेद में की गई थी, सामान्यतः, अव्याख्यात विचरण के लिए स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या $(N-m)$ है।

भारी चीड के पेडो के आंकडो के लिए प्रथम व्यंजक का प्रयोग करने से हम पाते हैं

$$F=\frac{0.978-(3-1)}{(1-0.978)-(20-3)},$$

$$=379.1 \text{ (केवल दो अंक ही सार्थक है)},$$

$n_1=2$ और $n_2=17$ के साथ। परिशिष्ट ड की सारणी F का उल्लेख करते हुए, यह स्पष्ट हो जाता है कि यह F मान 1.0 से सार्थक रूप मे बढ जाता है, क्योंकि इसमें प्रायिकता 0.001 से पर्याप्त कम है, और इसलिए $r^2_{YXX^2}$ सार्थक रूप में शून्य से बढ जाता है।

समष्टि में सहसम्बन्ध का आकलन करने के लिए वैसी ही प्रविधि है जिसका पूर्व उल्लेख रैखिक सहसम्बन्ध के लिए किया गया था। अर्थात्

$$\rho^2_{YXX^2}=1-\frac{\Sigma y^2_{sYXX^2}-(N-3)}{\Sigma y^2\div(N-1)},$$

$$=1-(1-r^2_{YXX^2})\frac{N-1}{N-3}$$

$$=1-(1-0.978)\tfrac{19}{17}=0.975.$$

16 यदि द्वितीय व्यंजक के अंश और हर दोनों Σy^2 से विभाजित किये जाएँ तो प्रथम व्यंजक प्राप्त हो जाएगा।

तृतीयाश वक्र—यह निश्चित करने के लिए कि X^3 का प्रयोग निम्न प्रकार के वक्र में विचरण की सार्थक अतिरिक्त मात्रा की व्याख्या करता है अथवा नही,

$$Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$$

का परिकलन करे

$$r^2_{YX^3 \cdot X X^2} = \frac{r^2_{Y \cdot XX^2X^3} - r^2_{Y \cdot XX^2}}{1 - r^2_{Y \cdot XX^2}}$$

और तब t परीक्षण निम्न का प्रयोग करते हुए करें

$$t = \sqrt{\frac{r^2_{YX^3 \cdot XX^2}\,(N-4)}{1 - r^2_{YX^3 \cdot XX^2}}}$$

$n = N - 4$ के साथ। उसके समान F परीक्षण है

$$F = \frac{(\Sigma y^2_{cY \cdot XX^2X^3} - \Sigma y^2_{cY \cdot XX^2}) \div 1}{(\Sigma y^2 - \Sigma y^2_{cY \cdot XX^2X^3}) \div (N-4)},$$

$$= \frac{(r^2_{Y \cdot XX^2X^3} - r^2_{Y \cdot XX^2}) \div 1}{(1 - r^2_{Y \cdot XX^2X^3}) \div (N-4)}$$

$n_1 = 1$ और $n_2 = N - 4$ के साथ।

इस परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए कि समष्टि का सहसम्बन्ध शून्य है, परिकलन कीजिए

$$F = \frac{r^2_{Y \cdot XX^2X^3} \div (4-1)}{(1 - r^2_{Y \cdot XX^2X^3}) \div (N-4)} \quad \text{अथवा}$$

$$F = \frac{\Sigma y^2_{cY \cdot XX^2X^3} \div (4-1)}{\Sigma y^2_{sY \cdot XX^2X^3} \div (N-4)}$$

$n_1 = 4 - 1$ और $n_2 = N - 4$ के साथ। याद रखिए कि $\Sigma y^2_{sY \cdot XX^2X^3} =$
$\Sigma y^2 - \Sigma y^2_{cY \cdot XX^2X^3}$

समष्टि मे सहसम्बन्ध का आकलन है

$$\hat{r}^2_{Y \cdot XX^2X^3} = 1 - \frac{\Sigma y^2_{sY \cdot XX^2X^3} \div (N-4)}{\Sigma y^2 \div (N-1)},$$

$$= 1 - (1 - r^2_{Y \cdot XX^2X^3})\ \frac{N-1}{N-4}$$

पाठक इन व्यंजकों को उच्च स्तर के वक्रों के लिए सरलतापूर्वक अनुकूलित कर सकता है। परन्तु यह कदाचित् ही आवश्यक होगा क्योकि तृतीयाश वक्र प्राय प्रयुक्त नही होते और उच्च स्तर के वक्र तो और भी कम प्रयोग मे आते है।

सहसम्बन्ध अनुपात – छितरी हुई मक्का की प्रति एकड उपज और प्रति टन काम के घण्टो के आँकडो के लिए हमने अध्याय 20 मे देखा कि

$$\eta^2_{YX} = \frac{\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा व्याख्यात विचरण}}{\text{श्रेणी का कुल विचरण}}$$

$$= \frac{148\,115}{217\,515} = 0\,681.$$

यदि एक द्वितीयाश वक्र उन्ही आँकडो पर आसजित किया जाए तो हम पायेंगे[17]

$$r^2_{Y\,XX^2} = \frac{\Sigma y^2_{Y\,XX^2}}{\Sigma y} = \frac{140\,743}{217\,515} = 0\,647.$$

यह निश्चित करने के लिए कि η^2_{YX} सार्थक रूप मे $r^2_{Y\,XX^2}$ की अपक्षा अधिक है, हम परिकलन करते है

$$F = \frac{(\eta^2_{YX} - r^2_{Y\,XX^2}) - \text{स्वातत्र्य कोटियाँ}}{(1 - \eta^2_{YX}) - \text{स्वातत्र्य कोटियाँ}}$$

$$= \frac{(0\,681 - 0\,647) - (11-2)}{(1 - 0\,681) - (103-12)} = \frac{0\,00378}{0\,00351} = 1\,1,$$

$n_1 = 9$ और $n_2 = 91$ के साथ। अथवा, हम प्रयाग कर सकते है

$$F = \frac{\left[\left(\begin{matrix}\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा}\\ \text{व्याख्यात विचरण}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{द्वितीयाश वक्र द्वारा}\\ \text{व्याख्यात विचरण}\end{matrix}\right)\right] - \text{स्वातत्र्य कोटियाँ}}{\left[\left(\begin{matrix}Y\ \text{श्रेणी का कुल}\\ \text{विचरण}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा}\\ \text{व्याख्यात विचरण}\end{matrix}\right)\right] - \text{स्वातत्र्य कोटिया}}$$

$$= \frac{(148\,115 - 140\,743) - (11-2)}{(217\,515 - 148\,115) - (103-12)} = \frac{0\,8191}{0\,7626} = 1\,1,$$

$n_1 = 9$ और $n_2 = 91$ के साथ। अश मे स्वातत्र्य कोटिया व्याख्यात विचरण के लिए स्वातत्र्य कोटियों, स्तम्भ माध्यों का प्रयोग करते हुए (जो 11 है) और द्वितीयाश वक्र का प्रयोग करते हुए (जो 2 है) व्याख्यात विचरण के लिए स्वातत्र्य कोटियों के बीच अन्तर को प्रकट करती है। स्तम्भ माध्यो का प्रयोग करते हुए व्याख्यात विचरण के लिए स्वातत्र्य कोटियो की सख्या $12-1=11$ है क्योंकि 12 स्तम्भ माध्य थे और उन माध्यों के विचरण का परिकलन $\overline{Y}$ के सम्बन्ध से किया गया था। द्वितीयाश वक्र का प्रयोग करते हुए व्याख्यात विचरण के लिए स्वातत्र्य कोटियो की सख्या $3-1=2$ है क्योंकि समीकरण में तीन स्थिराक हैं और परिकलित मानो का विचरण $\overline{Y}$ के आसपास लिया गया था। हर में स्वातत्र्य कोटिया, स्तम्भ माध्यो के द्वारा अव्याख्यात विचरण के लिए, N स्तम्भ माध्यों की सख्या है, अर्थात् $103-12=91$

$F=1\,1$ की प्रायिकता को जानने के लिए परिशिष्ट ड के सकेत से जब कि $n_1=9$ और $n_2=91$, हम पाते है कि न तो $n_1=9$ और न ही $n_2=91$ को सारणी मे दिखाया गया है। फिर भी, यह आवश्यक नही है कि अन्तर्वेशन किया जाए। F मानो की ओर

17. इन आँकडो के सहसम्बन्ध विश्लेषण के लिए, जिसमें द्वितीयाश वक्र का प्रयोग हुआ है, मूल अंग्रेजी पुस्तक का प्रथम सस्करण, पृष्ठ 721—727 देखिए।

देख कर जब कि $n_1 = 8$ और 12 तथा $n_2 = 60$ और 120, यह स्पष्ट है कि प्रायिकता 0 10 की अपेक्षा अधिक है और $\eta^2_{Y \cdot X}$ सार्थक रूप से r^2_{YX} की अपेक्षा बड़ा नहीं है।

यह निर्धारित करने के लिए कि $\eta^2_{Y \cdot X}$ सार्थक रूप से शून्य से अधिक है या नहीं, हम F के लिए उसी प्रकार के व्यंजकों का प्रयोग करते हैं जैसे इसी प्रयोजन के लिए अरेखिक गुणांकों के लिए पहले प्रयोग किए गए थे। वे हैं

$$F = \frac{\eta^2_{Y \cdot X} - (\text{स्वातन्त्र्य कोटियां} = \text{स्तम्भ माध्यों की संख्या} - 1)}{(1 - \eta^2_{Y \cdot X}) - (\text{स्वातन्त्र्य कोटियां} = N - \text{स्तम्भ माध्यों की संख्या})}$$

$$= \frac{0\ 681 - (21 - 1)}{(1 - 0\ 681) - (103 - 12)} = \frac{0\ 0619}{0\ 00351} = 17\ 6, \text{ अथवा},$$

$$F = \frac{\begin{pmatrix}\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा व्याख्यात} \\ \text{विचरण}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{स्वातन्त्र्य कोटियां} = \text{स्तम्भ} \\ \text{माध्यों की संख्या} - 1\end{pmatrix}}{\left[\begin{pmatrix}Y \text{ श्रेणी का} \\ \text{कुल विचरण}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा} \\ \text{व्याख्यात विचरण}\end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix}\text{स्वातन्त्र्य कोटियां} = N - \\ \text{स्तम्भ माध्यों की संख्या}\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{148\ 115 - (12 - 1)}{(217\ 515 - 148\ 115) - (103 - 12)} = \frac{13\ 46}{0\ 763} = 17\ 6$$

F के इस मान के लिए, $n_1 = 11$ और $n_2 = 91$। इनमें से कोई भी परिशिष्ट ड में नहीं दिखाया गया है लेकिन $n_1 = 8$ अथवा 12 और $n_2 = 60$ अथवा 120 को देख कर यह स्पष्ट है कि $F = 17\ 7$ ऊपरी 0 00 1 बिन्दु से बहुत परे है। $\eta_{Y \cdot X}$ सार्थक रूप से शून्य से अधिक है।

समष्टि के लिए आकलन, $\eta^2_{Y \cdot X}$ का मान है

$$\eta^2_{Y \cdot X} = \frac{\left[\begin{pmatrix}Y \text{ श्रेणी का कुल} \\ \text{विचरण}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{स्तम्भ माध्यों द्वारा} \\ \text{व्याख्यात विचरण}\end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix}N - \text{स्तम्भ माध्यों} \\ \text{की संख्या}\end{pmatrix}}{(Y \text{ श्रेणी का कुल विचरण}) - (N - 1)},$$

अथवा

$$\eta^2_{Y \cdot X} = 1 - (1 - \eta^2_{Y \cdot X}) \quad \frac{N - 1}{N - \text{स्तम्भ माध्यों की संख्या}},$$

$$= 1 - (1 - 0\ 681) \ \frac{102}{91} = 0\ 642.$$

अनेकधा सहसम्बन्ध—अनेकधा सहसम्बन्ध गुणांकों पर विचार करते समय, हम प्राथमिकत: यह जानने में रुचि रखते हैं कि प्रदत्त R^2 (अथवा R) का मान सार्थक है अथवा नहीं। हम अध्याय 21 के उदाहरण का निदर्शन के रूप में प्रयोग नहीं करेंगे, क्योंकि वहां प्रयुक्त आंकड़े प्रतिदर्श नहीं थे। उसके स्थान पर हम चार चर-वाली समस्या पर विचार करेंगे जो उन 27 बालकों के शारीरिक मापों से संबंधित है जिनकी आयु 12, 13 अथवा 14 सप्ताह थी।[18]

18. विभिन्न आयु के बालक और बालिकाओं के लिए ये और अन्य आंकड़े डॉ० अल्फ्रेड जे० विगनेक के सौजन्य से न्यूयार्क फाउंडलिंग हास्पिटल द्वारा किए गए थे। मिस मेरियन मी० जैंटाइल ने कृपापूर्वक इन अंकों की प्रतिलिपि।

चर थे

X_1, भार किलोग्रामो मे

X_2, ऊँचाई सेन्टीमीटरो मे,

X_3, सिर की परिधि सेन्टीमीटरो म, और

X_4, छाती की परिधि सेन्टीमीटरो मे।

हम $R^2_{1.23}$ और $R^2_{1.234}$ का परीक्षण करेगे, और ऐसा करने के लिए हमे निम्न मानो की आवश्यकता पडेगी :

$$N = 27$$

$$\Sigma x^2_1 = 11.6258$$

$$\Sigma x^2_{c1.23} = 9.1085,$$

$$\Sigma x^2_{s1.23} = 2.5173,$$

$$R^2_{1.23} = 0.783$$

$$\Sigma x^2_{c1.234} = 10.0152,$$

$$\Sigma x^2_{s1.34} = 1.6106,$$

$$R_{1.234} = 0.861$$

यह निश्चित करन के लिए कि निर्धारण का अनेकधा सहसम्बन्ध सार्थक रूप से शून्य से अधिक है अथवा नही, हम F परीक्षण का प्रयोग करते है, जो वैसा ही है जैसे इसी उद्देश्य के लिए अरेखिक सहसम्बन्ध के लिए प्रयुक्त किए गए थे। सामान्य रूप से, हम प्रयोग कर सकते है। तो ,[19] या

$$F = \frac{R^2_{1.234 \ldots m} - (m-1)}{(1 - R^2_{1.234 \ldots m}) - (N-m)},$$

अथवा,

$$F = \frac{\Sigma x^2_{c1.234 \ldots m} - (m-1)}{\Sigma x^2_{s1.234 \ldots m} - (N-m)},$$

$n_1 = m - 1$ तथा $N_2 = N - m$ के साथ।

$R^2_{1.23}$ का परीक्षण करने के लिए प्रथम व्यजक का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है

$$F = \frac{0.783 - (3-1)}{(1-0.783) - (27-3)} = 43.4,$$

$n_1 = 2$ और $n_2 = 24$ के साथ। परिशिष्ट ड मे F के लिए प्राप्त मान ऊपरी 0.001 बिन्दु से बहुत परे दिखाई पडता है, और $R^2_{1.23}$ स्पष्टत सार्थक है।

---

19 दो व्यजको का समकक्ष पर्याप्त स्पष्ट है: दूसरे व्यजक के हर में, $\Sigma x^2_1 - \Sigma x^2_{c1.234 \ldots m}$, $\Sigma x^2_{s1.234 \ldots m}$ के स्थान पर लिखो, तब अश और हर को Σx^2_1 से विभाजित करो, परिणाम प्रथम व्यजक होगा।

पुन दो मे से प्रथम व्यजक का प्रयोग करके लेकिन इस बार $R^2_{1\,234}$ का परीकण करने के लिए, हम निम्न प्राप्त होगा

$$F = \frac{0\,861 - (4-1)}{(1-0\,861) - (27-4)} = 47\,5,$$

$n_1 = 3$ और $n_2 = 23$ के साथ। $R^2_{1\,234}$ भी सार्थक है।

कभी-कभी कोई $R^2_{1\,234 \quad m}$ के मान की इच्छा कर सकता है, जो समष्टि मे अनेकधा निर्धारण का आकलित गुणाक है। यह है

$$\hat{R}^2_{1\,234 \quad m} = 1 - \frac{\Sigma x_s{}^2_{1\,234 \quad m} - (N-m)}{\Sigma x^2_{1\,234} - (N \quad 1)},$$

$$= 1 - \frac{\Sigma x_s{}^2_{1\,234 \quad m}}{\Sigma x^2_1} \quad \frac{N-1}{N-m},$$

$$= 1 - (1 - R^2_{1\,234 \quad m}) \frac{N-1}{N-m}$$

27 बालको के आँकडो के लिए केवल $\hat{R}^2_{1\,234}$ का परिकलन करने पर, हम पायेंगे

$$\hat{R}^2_{1\,234} = 1 - (1 - R^2_{1\,234}) \frac{N-1}{N-m}$$

$$= 1 - (1 - 0\,861) \frac{27-1}{27-4},$$

$$= 0\,843$$

आंशिक सहसम्बन्ध—क्योकि आंशिक निर्धारण का गुणाक हमे वह अनुपात बताता है जो (1) अनिरिक्त व्याख्यात विचरण, जिसका श्रेय प्रदत्त स्वतन्त्र चर को है, का (2) उस स्वतन्त्र चर के प्रयोग के पूर्व, अव्याख्यात विचरण के सम्बन्ध मे है, अतः हम प्राय यह जानने म रुचि रखते हैं कि गुणाक शून्य मे सार्थक रूप मे भिन्न है अथवा नहीं। परीक्षण मे निम्न परिकलन सन्निहित है

$$t = \sqrt{\frac{r^2_{1m\,23 \quad (m-1)}}{1 - r^2_{m1\,23 \cdot \quad (m-1)}} (N-m)},$$

$n = N - m$ के साथ।

27 बालको के शारीरिक मापो के आँकडो के लिए,

$$r^2_{14\,23} = \frac{R^2_{1\,234} - R^2_{1\,23}}{1 - R^2_{1\,23}} \quad \text{अथवा} \quad \frac{\Sigma x^2_{c1\,234} - \Sigma x^2_{c1\,23}}{\Sigma x^2_1 - \Sigma x^2_{c1\,23}}$$

प्रथम व्यजक का प्रयोग करने पर निम्न प्राप्त होता है

$$r^2_{14\,32} = \frac{0\,861 - 0\,783}{1 - 0\,783} = 0\,359$$

चर X_4 ने विचरण के 36 प्रतिशत की व्याख्या की जिसकी व्याख्या करने मे X_2 और X_3 असफल रहे थे।

t के मान के लिए, हम पाते है

$$t=\sqrt{\frac{0\ 359(27-4)}{1-0\ 359}}=3\ 59,$$

$n=23$ के साथ। परिशिष्ट भ की t सारणी से यह ज्ञात होता है कि $0\ 001<P<0\ 01$, और हम $r^2_{14\ 23}$ को सार्थक समझते हैं।

इसी प्रकार से, यह निश्चित किया जा सकता है कि $r^2_{12\ 24}$ और $r^2_{12\ 34}$ सार्थक हैं अथवा नही। यहाँ बिना परीक्षण किये, हम केवल यह देखेगे कि 0 01 स्तर पर $r^2_{12\ 34}$ सार्थक है और 0 05 स्तर पर भी $r^2_{13\ 24}$ सार्थक नही है, क्योकि $r^2_{13\ 24}$ के लिए P, 0 30 और 0 40 के बीच है। यह हमें यह नही बताता कि हमे X_3 को अपने विश्लेषण से अवश्य बाहर कर देना चाहिए, क्योकि X_3 कुछ उपयोगी जानकारी प्रदान कर सकता है यद्यपि हम उसकी सार्थकता प्रदर्शित नहीं कर सके। तो भी, यदि हमे केवल दो स्वतन्त्र चरो के प्रयोग की इच्छा है तो निस्सन्देह वे X_2 और X_4 होगे।

जैसा कि पृष्ठ 652—653 पर देखा गया t परीक्षण, निर्धारण के आशिक गुणाक की सार्थकता का परीक्षण करने के लिए F परीक्षण का विकल्प है। सामान्य शब्दो मे F परीक्षण है

$$F=\frac{(\Sigma x^2_{c1\ 234\ \cdots\ m}-\Sigma x^2_{c1\ 234\ \cdots\ (m-1)})-[m-(m-1)],}{(\Sigma x_1^2-\Sigma x^2_{c1\ 234\ \cdots\ m})-(N-m)}$$

जहाँ पर $m-(m-1)$ निस्सन्देह हमेशा 1 है। F के लिए यह व्यजक और t के लिए ऊपर दिए गए वर्ग के समान हैं, यह परिशिष्ट घ, परिच्छेद 26 4 मे प्रदर्शित किया गया है।

बहुत कम अवसरो पर यह जानने की इच्छा हो सकती है कि आशिक निर्धारण का गुणाक उस समष्टि मान से सार्थक रूप मे भिन्न है अथवा नही, जो शून्य नही है। इस प्रकार का परीक्षण ठीक उसी प्रकार किया जा सकता है। जैसा कि साधारण रेखिक सहसम्बन्ध गुणाक के लिए (647–648), z की निम्न मानक त्रुटि के साथ,

$$\sigma_z=\frac{1}{\sqrt{N-2\ 6667-(m-2)}}=\frac{1}{\sqrt{N-m-0\ 6667}},$$

जहाँ m समाविष्ट चरो की सख्या है, जो कि वही है जैसी कि अनेकधा आकलन समीकरण मे स्थिराको की सख्या है, क्योकि हम केवल रेखिक अनेकधा सहसम्बन्ध पर विचार कर रहे है।

यदि कोई $\hat{\rho}^2_{1m\ 23\ \cdots\ (m-1)}$ का मान, जो समष्टि के लिए आकलन है, चाहता है तो यह

$$\hat{\rho}^2_{1m\ 23\ \cdots\ (m-1)}=1-\frac{\Sigma x^2_{s1\ 234\ \cdots\ m}-(N-m)}{\Sigma x^2_{s1\ 234\ \cdots\ (m-1)}-[(N-m-1)]}$$

से प्राप्त हो सकता है, अथवा, यदि हम अंश और हर में से प्रत्येक को Σx_1^2 से विभाजित कर दें तो निम्न से

$$\hat{r}^2_{1m.23} \cdot (m-1) = 1 \frac{1-\hat{R}^2_{1.234} \quad m}{1-\hat{R}^2_{1.234} \cdot (m-1)},$$

$$= \frac{\hat{R}^2_{1.234} \quad m - \hat{R}^2_{1.234} \cdot (m-1)}{1-\hat{R}^2_{1.234} \cdot (m-1)}$$

परिशिष्ट

परिशिष्ट क

प्रत्येक अध्याय मे प्रयुक्त संकेत चिह्न

अध्याय 9 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

β_1 छोटा ग्रीक बीटा तिरछापन का माप। अध्याय 10 देखिए।

β_2 छोटा ग्रीक बीटा ककुदता का माप। अध्याय 10 देखिए।

d एक X मान का X_a से विचलन।

d' एक X मान का X_a मे वर्ग अन्तरालो के रूप मे विचलन।

Δ_1 बडा ग्रीक डल्टा बहुलक वर्ग की बारबारता और ग्राफ की दृष्टि से बहुलक वर्ग के बाई ओर के वर्ग की बारबारता का अन्तर।

Δ_2 बडा ग्रीक डल्टा बहुलक वर्ग की बारबारता और ग्राफ की दृष्टि से बहुलक वर्ग के दाई ओर के वर्ग की बारबारता का अन्तर।

f बारबारता।

f_1, f_2, f_3 X_1, X_2, X_3 मे सम्बन्धित बारबारताएँ।

G गुणोत्तर माध्य।

H हरात्मक माध्य।

i वर्ग अन्तराल।

l_1 वर्ग की निचली सीमा।

l_2 वर्ग का ऊपरी सीमा।

Med माध्यिका।

Mo बहुलक।

n चक्रवृद्धि ब्याज सूत्र मे प्रयोग के समान, अवधि के प्रारभ से अन्त तक वर्षो (या अन्य समय इकाइयो) की संख्या।

N प्रतिदर्श मे मदो की संख्या।

P_0 तथा P_n चक्रवृद्धि ब्याज सूत्र' मे प्रयोग के समान क्रमश अवधि के प्रारभ मे और अन्त मे मूल्य।

Q_1 Q_2 Q_3 चतुर्थक। Q_2= माध्यिका।

Σ बडा ग्रीक सिग्मा जिसका अर्थ है योग लो'।

r "चक्रवृद्धि ब्याज सूत्र' मे प्रयोग के समान, प्रतिवर्ष (या अन्य समय इकाई) वृद्धि या कमी का अनुपात।

s प्रतिदर्श का मानक विचलन। अध्याय 10 देखिए।

x एक मूल्य का $\bar{X}$ से विचलन।

$x_1, x_2, x_3,$ $X_1, X_2, X_3,$ के $\bar{X}$ से विचलन।

X : श्रेणी मे एक मूल्य, साथ ही, एक बारबारता बटन मे एक वर्ग का मध्य मूल्य।

X_1, X_2, X_3 एक श्रेणी में मूल्य, साथ ही, एक बारबारता बटन के वर्गों के मध्य मूल्य ।

$\bar{X}_d$ एक बारबारता बटन के $\bar{Y}$ के परिकलन को सरल करने के लिए प्रथम सन्निकट के तौर पर प्रयुक्त निर्दिष्ट माध्य ।

$\bar{X}$ · समान्तर माध्य । बाद के अध्यायो मे हम एक प्रतिदर्श के समातर माध्य $\bar{X}$, तथा समष्टि के समातर माध्य $\bar{X}_p$ मे भेद करेंगे ।

∞ : अनन्त ।

अध्याय 10 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

AD औसत (या माध्य) विचलन ।

α_3 छोटा ग्रीक अल्फा x मूल्यो की तृतीय घातो का प्रयोग करने वाले तिरछेपन का माप ।

α_4 छोटा ग्रीक अल्फा x मूल्या की चतुर्थ घातों का प्रयोग करने वाली ककुदता का माप ।

β_1 छोटा ग्रीक बीटा, x मूल्यो की तृतीय घातो का प्रयोग करने वाले तिरछेपन का माप ।

β_2 छोटा ग्रीक बीटा x मूल्यो की चतुर्थ घातो का प्रयोग करने वाली ककुदता का माप ।

d $\bar{X}_d$ मे एक X मूल्य का विचलन ।

d $\bar{X}_d$ से एक X मूल्य का वर्ग अन्तरालो के रूप म, विचलन ।

f बारबारता ।

h^2 : समानता का माप, $2s^2$ का व्युत्क्रम ।

i वर्ग अन्तराल ।

M s के साथ प्रयुक्त s के एक विशिष्ट गुणा का सकेत करन क लिए ।

Med माध्यिका ।

Mo बहुलक ।

μ_1 μ_2 μ_3, μ_4 छोटे ग्रीक मू, शेपर्ड के सुधारो के साथ, $\bar{X}$ के आसपास क्रमश. प्रथम, द्वितीय, तृतीय, तथा चतुर्थ घूर्ण । $\mu_1=\pi_1=0$ तथा $\mu_3=\pi_3$

N एक प्रतिदर्श मे मदो की सख्या ।

ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 छोटे ग्रीक नू, $\bar{X}_d$ के आसपास क्रमश. प्रथम, द्वितीय, तृतीय, तथा चतुर्थ घूर्ण ।

$P_1, P_2, \quad P_{99}$ शततमक।

π_1, π_2, π_3, π_4 छोटे ग्रीक पाई; $\bar{X}$ के आसपास क्रमश प्रथम, द्वितीय, तृतीय, तथा चतुर्थ घूर्ण । π_1-0

Q अर्ध अन्तश्चतुर्थ परिसर ।

Q_1, Q_2, Q_3 चतुर्थक । Q_2=माध्यिका ।

s : एक प्रतिदर्श का मानक विचलन ।

s^2 एक प्रतिदर्श का प्रसरण ।

Sk तिरछेपन का पियसन का माप ।

Sk_q चतुर्थका पर आधारित तिरछेपन का माप ।

$\hat{\sigma}$ छोटा ग्रीक सिग्मा सिग्मा कैरेट या 'सिग्मा हैट समष्टि के मानक विचलन का आकलन ।

σ छोटा ग्रीक सिग्मा समष्टि का मानक विचलन ।

Σ बडा ग्रीक सिग्मा जिसका अथ है योग लो ।'

V विचरण का गुणाक ।

x X से Y का विचलन ।

X श्रेणी मे एक मूल्य साथ ही बारबारता बटन म वग का मध्य-मान ।

$\bar{X}$ समान्तर माध्य । बाद के अध्यायो म हम प्रतिदश के समान्तर माध्य $\bar{Y}$ तथा समष्टि के समान्तर माध्य $\bar{X}_g$ म भेद करगे ।

$\bar{X}_d$ निर्दिष्ट माध्य ।

| | चिह्नो की उपेक्षा करो इस प्रकार $\Sigma|x|$ का अथ है 'x मूल्यो का चिह्नो की उपेक्षा करके योग लो ।

अध्याय 12 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

a समीकरण $Y = a + bX$ म एक स्थिराक Y का मान जब $X=0$, Y अवरोध ।

b समीकरण $Y = a + bY$ म एक स्थिराक ढाल ।

N एक श्रेणी मे मदो की सख्या ।

Σ बडा ग्रीक सिग्मा जिसका अथ है योग लो ।

X X श्रेणी का एक मान ।

$X_1\ X_2\ X_3$ X_N X श्रेणी के विशिष्ट मान ।

$\bar{X}$ X मानो का समान्तर माध्य ।

Y Y श्रेणी का एक प्रक्षित मान ।

Y_c Y श्रेणी का एक परिकलित मान ।

$Y_1,\ Y_2\ Y_3$ Y_N Y श्रेणी के विशिष्ट मान ।

$\bar{Y}$ Y मानो का समान्तर माध्य ।

अध्याय 13 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

a विभिन्न उपनति समीकरणो म एक स्थिराक ।

b विभिन्न उपनति समीकरणो मे एक स्थिराक ।

c द्वितीय या उच्चतर अश के बहुपद मे एक स्थिराक । पादाक के रूप मे c एक परिकलित मूल्य का एक प्रक्षित मूल्य से अ तर बताता है, देखें Y_c ।

d तृतीय या उच्चतर अश के बहुपद मे एक स्थिराक ।

e चतुथ या उच्चतर अश के बहुपद म एक स्थिराक ।

f पचम या उच्चतर अश के बहुपद म एक स्थिराक ।

k एक अनन्तस्पर्शीय विकास वक्र का अनन्तस्पर्शी ।

k_0, k_1, k_2 जब एक वृद्धिघात वक्र को अन्य किसी के एक भाग पर बनाया जाता है तो k_0 प्रथम वृद्धिघात वक्र का ऊपरी अनन्तस्पर्शी है और k_1 तथा k_2 क्रमश द्वितीय वृद्धिघात वक्र के निम्न तथा ऊपरी अनन्तस्पर्शी हैं ।

μ छोटे ग्रीक मू वृद्धिघात वक्र के लिए उपनति मानो के निर्धारण मे सहायता के लिए प्रयुक्त । $\mu = 10^{a+bx}$

n सशोधित घातीय या गाम्पर्ज वक्र के लिए श्रेणी के प्रत्येक तृतीय भाग मे वर्षों की सख्या एक वृद्धिघात वक्र के लिए, x_0 और x_1 या x_1 और x_2 के बीच समय इकाइयो की सख्या ।

N श्रेणी मे मदा की सख्या ।

Σ बडा ग्रीक सिग्मा जिसका अथ है ' योग लो ।

$\Sigma_1, \Sigma_2 \; \Sigma_3$ क्रमश एक श्रेणी के प्रथम द्वितीय और तृतीय बराबर भागो के लिए मानो का योग ।

$x \; x_1 \; x_2$ वृद्धिघात वक्र का आसजन करते समय $y_0 \; y_1$, तथा y_2 के साथ सम्बद्ध वष ।

X X श्रेणी का एक मान ।

$y_0 \; y_1, y_2$ वृद्धिघात वक्र क आसजन क लिए प्रयुक्त तीन चुने हुए Y मान ।

Y Y श्रेणी का प्रक्षित मान ।

Y_c Y श्रेणी का परिकलित मान ।

$!$ क्रमगुणित $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

अध्याय 16 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

β_1 छोटा ग्रीक बीटा निरपेक्षन का माप । अध्याय 10 देखिए ।

β_2 छोटा ग्रीक बीटा ककुदता का माप । अध्याय 10 देखिए ।

C चक्रीय ।

I अनियमित ।

N एक श्रेणी म मदो की सख्या ।

s मानक विचलन । अध्याय 10 देखिए ।

S ऋतुनिष्ठ ।

Σ बडा ग्रीक सिग्मा जिसका तात्पय है योग लो'' ।

T उपनति ।

X X श्रेणी का एक मान ।

y एक चक्रीय विचलन, अनियमित गतियो के सरलन के उपरान्त, उपनति तथा ऋतुनिष्ठ के सयुक्त आकलन से एक काल श्रेणी मे मान का विचलन ।

Y_c Y श्रेणी का परिकलित मान ।

अध्याय 17 और अध्याय 18 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

p वस्तु की कीमत ।

P : कीमत सूचकांक ।
q वस्तु की मात्रा ।
Q मात्रा सूचकांक ।
n : प्रदत्त अवधि अथवा वर्तमान अवधि का द्योतक पादांक ।
o आधार अवधि का द्योतक पादांक ।
Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा जिसका अर्थ है 'योग लो' ।
उदाहरणार्थ 59 64 लिखे हुए सख्यात्मक पादांक P अथवा Q (p या q) के साथ आ सकते हैं और 1959 आधार पर 1964 के सूचकांक को प्रदर्शित करते है। उदाहरणार्थ जब 64 या 59 61 लिखे जाते हैं तो ऐसे पादांक p या q के साथ आ सकते है और यह दर्शाते हैं कि निर्दिष्ट कीमत अथवा मात्रा उन विशिष्ट वर्ष के लिए है या हाइफन के द्वारा अलग किए गए वर्षों के लिए औसत (या योग) है ।
u : प्रति डालर क्रय शक्ति की इकाइयाँ

अध्याय 19 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

a . Y_c का मूल्य जब समीकरण $Y_c = a + bX$ मे $X=0$.
a' : X_c का मूल्य जब समीकरण $X_c = a + b'Y$ मे $Y=0$.
a_1 2×2 सारणी के ऊपरी बाएँ सेल म प्रेक्षित बारबारताओ की सख्या ।
a_2 2×2 सारणी के निम्न बाएँ सेल मे प्रेक्षित बारबारताओं की सख्या ।
b . आकलन समीकरण $Y_c = a - bX$ का ढाल ।
b' . आकलन समीकरण $X_c = a + b'Y$ का ढाल ।
b_1 . 2×2 सारणी के ऊपरी दाएँ सेल मे प्रेक्षित बारबारताओ की सख्या ।
b_2 . 2×2 सारणी के निम्न बाएँ सेल म प्रेक्षित बारबारताओ की सख्या ।
C : माध्य वर्ग आकस्मिकता का गुणांक ।
d'_x : वर्गों के रूप मे $\bar{X}_a$ से एक सेल का विचलन ।
d'_y वर्गों के रूप म $\bar{Y}_a$ से एक सेल का विचलन ।
D : युग्मित मानो के स्तरों मे अन्तर ।
f : बारबारता, सामूहिक सहसम्बन्ध म, सेल मे बारबारता ।
f_X X श्रेणी की बारबारता, सामूहिक सहसम्बन्ध मे, स्तम्भ बारबारता ।
f_Y : Y श्रेणी की बारबारता, सामूहिक सहसम्बन्ध मे, पंक्ति बारबारता ।
k : अन्य सक्रमण गुणांक ।
k^2 : अनिर्धारण का गुणांक ।
N : एक प्रतिदर्श मे मदो की सख्या । द्विचर सहसम्बन्ध मे, N मदो के जोड़ो की सख्या है ।
r : सहसम्बन्ध का गुणांक ।
r^2 : निर्धारण का गुणांक ।
r_{rank} . स्तर सहसम्बन्ध का गुणांक ।
S_X : X श्रेणी का मानक विचलन ।

s_Y : Y श्रेणी का मानक विचलन।

S_{YX} : आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के लिए आकलन की मानक त्रुटि।

Σ : बड़ा ग्रीक सिग्मा जिसका अर्थ है 'योग लो।'

Σy^2 Y मूल्यों का कुल विचरण।

Σy_c^2 आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के प्रयोग द्वारा वर्णित Y का विचरण।

Σy_s^2 आकलन समीकरण $Y = a + bX$ के प्रयोग द्वारा अवर्णित Y का विचरण।

x : $X - \bar{X}$.

X : X श्रेणी; साथ ही X श्रेणी में प्रेक्षित मूल्य। इस प्रकार हम X और Y के सहसम्बन्ध का संकेत करते हैं परन्तु ΣX का अर्थ है "X श्रेणी में मूल्यों को जोड़ो।"

X_{axis} समस्तरीय (क्षैतिज) अक्ष।

X_c परिकलित X मूल्य।

$\bar{X}$ X श्रेणी का समान्तर माध्य।

χ^2 काई वर्ग। संकेत चिह्न छोटा ग्रीक काई है।

y $Y - \bar{Y}$ Y श्रेणी में कुल विचरण Σy^2 है।

y_c $Y_c - \bar{Y}$ Y श्रेणी में वर्णित विचरण Σy_c^2 है।

y_s $Y - Y_c$ Y श्रेणी में अवर्णित विचरण Σy_s^2 है।

Y Y श्रेणी तथा Y श्रेणी में प्रेक्षित मूल्य। इस प्रकार हम सहसम्बन्ध वाले X और Y का संकेत करते हैं, परन्तु ΣX का अर्थ है "Y श्रेणी में मूल्यों को जोड़ करो"।

Y_{axis} : उर्ध्वाधर अक्ष।

Y_c परिकलित Y मूल्य।

$\bar{Y}$ Y श्रेणी का समान्तर माध्य।

$\bar{Y}_c$ Y_c मूल्यों का समान्तर माध्य, $\bar{Y}_c = \bar{Y}$।

अध्याय 20 में प्रयुक्त संकेत चिह्न

a Y_c का मूल्य जब $X=0$ आकलन समीकरणों $X_c = a + bX$, $Y_c = a - bX + cX^2$, तथा $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$; $(\sqrt{Y})_c$ का मूल्य जब $Y=0$ आकलन समीकरण $(\sqrt{Y})_c = a + bX$ में, $\left(\frac{1}{Y}\right)_c$ का मूल्य जब $X=0$ आकलन समीकरण $\left(\frac{1}{Y}\right)_c = a + bX$ में। आकलन समीकरण (लघु $Y)_c$ = लघु $a + X$ लघु b में जब $X=0$ तथा आकलन समीकरण (लघु $Y)_c$ = लघु $a + b$ लघु X में जब $X=1$ तब लघु a, (लघु $Y)_c$ का मूल्य है।

b . a के लिए ऊपर वर्णित विभिन्न आकलन समीकरणों में b, या लघु b, एक स्थिराक है।

c . आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ तथा $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ में एक स्थिराक।

d आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ मे एक स्थिराक ।

η छोटा ग्रीक एटा सहसम्बन्ध अनुपात ।

k सहसम्बन्ध सारणी म स्तम्भो की सख्या ।

N एक प्रतिदश म मदो की सख्या । द्वि चर रखिक या अरेखिक सहसम्बन्ध मे N मदो क युग्मो की सख्या है ।

N_c सहसम्बन्ध सारणी म एक स्तम्भ म मदो की सख्या ।

r^2_{YX} X और Y के लिए निर्धारण का गुणाक ।

$r^2_{YXX^2}$ Y और X के लिए निर्धारण का गुणाक आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ का प्रयोग किया गया है ।

$r^2_{YXX^2X^3}$ Y और X के लिए निर्धारण का गुणाक आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ का प्रयोग किया गया है ।

$r^2_{YX^2 \cdot X}$ (1) X^2 के प्रयोग के कारण बढ हुए विचरण का (2) अकेले X के प्रयोग द्वारा अव्याख्यात विचरण की मात्रा के अनुपात के रूप मे व्यक्त एक माप । अध्याय 21 मे वर्णित आशिक निर्धारण के गुणाक को देखिए ।

r^2 लघु $_{YX}$ X और लघु Y के लिये निर्धारण का गुणाक ।

r^2 लघु Y लघु X लघु X और लघु Y के लिये निर्धारण का गुणाक ।

$r^2_{\frac{1}{Y}X}$ X और $\frac{1}{Y}$ के लिय निर्धारण का गुणाक ।

$r^2_{\sqrt{Y}X}$ X और $\sqrt{Y}$ के लिय निर्धारण का गुणाक ।

s_{YX} आकलन समीकरण $Y = a + bX$ के लिये आकलन की मानक त्रुटि ।

s_{YXX^2} आकलन समीकरण $Y = a + bX + cX^2$ के लिये आकलन की मानक त्रुटि ।

$s_{YXX^2X^3}$ आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ के लिय आकलन की मानक त्रुटि ।

s लघु $_{YX}$ आकलन समीकरण (लघु $Y)_c$ = लघु $a + X$ लघु b के लिये आकलन की मानक त्रुटि ।

s लघु $_Y$ लघु $_X$ आकलन समीकरण (लघु $Y)_c$ = लघु $a + b$ लघु X के लिए आकलन की मानक त्रुटि ।

$s_{\frac{1}{Y}X}$ आकलन समीकरण $\left(\frac{1}{Y}\right) = a + bX$ के लिये आकलन की मानक त्रुटि ।

$s_{\sqrt{Y}X}$ आकलन समीकरण $(\sqrt{Y})_c = a + bX$ के लिए आकलन की मानक त्रुटि ।

Σ बडा ग्रीक सिग्मा जिसका अर्थ है का योग लो ।

$\sum_{1}^{k}$ सहसम्बन्ध सारणी म k स्तम्भो के ऊपर योग ।

$\sum_{1}^{N_c}$ सहसम्बन्ध सारणी म एक स्तम्भ मे N_c मदो के ऊपर जोड ।

Σy^2 Y मूल्यो का कुल विचरण ।

Σ(लघु y)^2 : लघु Y मूल्यों का कुल विचरण। पाद-टिप्पणी 10 और 11 देखिये।

$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2$: $\left(\frac{1}{Y}\right)$ मूल्यों का कुल विचरण। पाद-टिप्पणी 15 देखिये।

$\Sigma(\sqrt{y})^2$ $\sqrt{Y}$ मूल्यों का कुल विचरण। पाद-टिप्पणी 12 देखिये।

Σy_c^2 आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के लिए व्याख्यात विचरण।

$\Sigma y^2_{cY \cdot XX^2}$ आकलन समीकरण $Yc = a + bX + cX^2$ के लिए व्याख्यात विचरण।

$\Sigma y^2_{cY \cdot XX^2X^3}$ आकलन समीकरण $Yc = a + bX + cX^2 + dX^3$ के लिये व्याख्यात विचरण।

Σ (लघु y)$_c^2$. आकलन समीकरण (लघु Y)$_c$ = लघु $a + b$ लघु X या आकलन समीकरण (लघु Y)$_c$ – लघु $a + X$ लघु b के लिए व्याख्यात विचरण। पाद-टिप्पणी 11 देखें।

$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)_c^2$ आकलन समीकरण $\left(\frac{1}{Y}\right)_c = a + bX$ के लिए व्याख्यात विचरण।

$\Sigma(\sqrt{y})_c^2$ आकलन समीकरण $(\sqrt{Y})_c = a + bX$ के लिए व्याख्यात विचरण।

Σy_s^2 आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma y^2_{sY \cdot XX^2}$ आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma y^2_{sY \cdot XX^2X^3}$ आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + +cX^2 + dX^3$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

Σ(लघु y)$_s^2$: आकलन समीकरण (लघु Y)$_c$=लघु $a + b$ लघु X, अथवा आकलन समीकरण (लघु Y)$_c$ = लघु $a + X$ लघु b के लिए अव्याख्यात विचरण। पाद-टिप्पणी 11 देखें।

$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)_s^2$: आकलन समीकरण $\left(\frac{1}{Y}\right)_c = a + bX$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

$\Sigma(\sqrt{y})_s^2$ आकलन समीकरण $(\sqrt{Y})_c = a + bX$ के लिए अव्याख्यात विचरण।

X X श्रेणी, तथा X श्रेणी मे प्रेक्षित मूल्य। इस प्रकार हम X तथा Y का सहसम्बन्ध करने का संकेत करते हैं, परन्तु ΣX का अर्थ है "X श्रेणी में मूल्यों को जोड़ो"।

y Σy^2 देखें, $y = Y - \bar{Y}$

y_c : विभिन्न अतिरिक्त पादाको के साथ Σy_c^2 तथा Σy_c^2 देखें। सामान्यतः y_c (अतिरिक्त पादको के साथ या उनके बिना), उचित परिकलित Y, या परिकलित रूपान्तरित Y, मूल्य तथा सगत समान्तर माध्य के बीच अन्तर है।

y_s . विभिन्न अतिरिक्त पादाको सहित Σy_s^2 तथा Σy_s^2 को देखें। सामान्यत y_s (अतिरिक्त पादाको सहित या उनके बिना) प्रेक्षित Y, या रूपान्तरित प्रेक्षित Y, मूल्य तथा सगत परिकलित मूल्य के बीच अन्तर है।

Y Y श्रेणी, तथा Y श्रेणी मे प्रेक्षित मूल्य। इस प्रकार हम X तथा Y का सहसम्बन्ध करने का सकेत करते है, परन्तु ΣY का अर्थ है "Y श्रेणी मे मूल्यों को जोडो"।

$\overline{Y}$: Y मूल्यो का समातर माध्य।

$\overline{Y}_c$: सहसम्बन्ध अनुपात के सम्बन्ध मे प्रयोग किए जाने पर स्तम्भ का समातर माध्य। (पिछले अध्याय मे इस चिह्न को परिकलित Y मूल्यो के समान्तर माध्य के अर्थ मे प्रयुक्त किया गया था, परन्तु इस अध्याय मे इसे इस प्रकार प्रयुक्त नही किया गया।)

$\overline{\text{लघु } Y}$: लघु Y मूल्यो का समान्तर माध्य।

$\left(\overline{\frac{1}{Y}}\right)$ $\frac{1}{Y}$ मूल्यो का समातर माध्य।

$\overline{\sqrt{Y}}$: $\sqrt{Y}$ मूल्यो का समानर माध्य।

Y_c : परिकलित Y मूल्य।

(लघु $Y)_c$ परिकलित लघु Y मूल्य :

$\left(\frac{1}{Y}\right)_c$: परिकलित $\frac{1}{Y}$ मूल्य।

$(\sqrt{Y})_c$ परिकलित Y मूल्य।

अध्याय 21 मे प्रयुक्त संकेत चिह्न

इस अध्याय के प्रथम अनुच्छेद मे प्रयुक्त सकेत चिह्न के लिए अध्याय 19 की सूची देखिए।

$a_{1.2}$: $X_{c1.2}$ का मान जब $X_2=0$ आकलन समीकरण $X_{c1.2}=a_{1.2}+b_{12}X_2$ मे। अध्याय 19 मे प्रयुक्त आकलन समीकरण $Y_{c13}=a+bX$ मे a के समान।

$a_{1.3}$: $X_{c1.3}$ का मान जब $X_3=0$ आकलन समीकरण $X_{c1.3}=a_{1.3}+b_{13}X_3$

$a_{1.23}$: $X_{c1.23}$ का मान जब $X_2=0$ तथा $X_3=0$ आकलन समीकरण $X_{c1.23}=a_{1.23}+b_{12.3}X_2+b_{13.2}X_3$ मे।

$a_{1.24}$: $X_{c1.24}$ का मान जब $X_2=0$ तथा $X_4=0$ आकलन समीकरण $X_{c1.24}=a_{1.24}+b_{12.4}X_2+b_{14.2}X_4$ मे।

$a_{1.34}$: $X_{c1.34}$ का मान जब $X_3=0$ तथा $X_4=0$ आकलन समीकरण $X_{c1.34}=a_{1.34}+b_{13.4}X_3+b_{14.3}X_4$ मे।

$a_{1.22'3}$: $X_{c1.22'3}$ का मान जब X_2, X_2^2, तथा $X_3=0$ आकलन समीकरण $X_{c1.22'3}=a_{1.22'3}+b_{12.2'3}X_2+b_{12'.23}X_2^2+b_{13.22'}X_3$ मे।

b_{12} : X_2 का गुणाक आकलन समीकरण $X_{c1.2}=a_{1.2}+b_{12}X_2$ मे। अध्याय 19 मे b के समान।

b_{13} : X_3 का गुणाक आकलन समीकरण $X_{c1.3}=a_{1.3}+b_{13}X_3$ मे।

$b_{12.3}$: X_2 का गुणाक आकलन समीकरण $X_{c1.23}=a_{1.23}+b_{12.3}X_2+b_{13.2}X_3$ मे।

$b_{13\cdot 2}$ Y_3 का गुणाक आकलन समीकरण $Y_{c1\cdot 23} = a_{1\cdot 23} + b_{12\cdot 3}Y_2 + b_{13\cdot 2}X_3$ म ।

$b_{12\cdot 4}$, $b_{14\cdot 2}$ क्रमश X_2 तथा X_4 के गुणाक $a_{1\cdot 24}$ के लिए ऊपर निर्दिष्ट आकलन समीकरण म ।

$b_{13\cdot 4}$, $b_{14\cdot 3}$ क्रमश X_3 तथा X_4 के गुणाक $a_{1\cdot 34}$ के लिए ऊपर निर्दिष्ट आकलन समीकरण म ।

$b_{12\cdot 34}$ X_2 का गुणाक आकलन समीकरण $X_{c1\cdot 234} = a_{1\cdot 234} + b_{12\cdot 34}X_2 + b_{13\cdot 24}X_3 + b_{14\cdot 23}X_4$ म ।

$b_{13\cdot 24}$ X_3 का गुणाक आकलन समीकरण $X_{c1\cdot 234} = a_{1\cdot 234} + b_{12\cdot 34}X_2 + b_{13\cdot 24}X_3 + b_{14\cdot 23}X_4$ म ।

$b_{14\cdot 23}$ X_4 का गुणाक आकलन समीकरण $X_{c1\cdot 234} = a_{1\cdot 234} + b_{12\cdot 34}X_2 + b_{13\cdot 24}X_3 + b_{14\cdot 23}X_4$ म ।

$b_{12\cdot 34 \ldots m}$, $b_{13\cdot 24 \ldots m}$, $b_{14\cdot 23 \ldots m}$, $b_{1m\cdot 23 \ldots (m-1)}$ क्रमश X_2, X_3, X_4 ... X_m के गुणाक $X_{c1\cdot 234 \ldots m}$ के लिए आकलन समीकरण म ।

$b_{12\cdot 3}$, $b_{12\cdot 3}$, $b_{13\cdot 2}$ क्रमश X_2, X_3, तथा X_3 का गुणाक आकलन समीकरण म $a_{1\cdot 23}$ के लिए ऊपर निर्दिष्ट ।

b_{21} X_1 का गुणाक आकलन समीकरण $X_{c2\cdot 1} = a_{2\cdot 1} + b_{21}X_1$ म ।

इस अध्याय म केवल $d_{1\cdot 234}$ के परिकलन म सहायतार्थ प्रयुक्त ।

N किसी प्रतिदर्श म मदो की सख्या । अनेकधा अथवा आशिक सहसम्बन्ध म N प्रेक्षण समुच्चयो की सख्या होती है ।

r_{12} निर्धारण का गुणाक X_1 तथा X_2 के लिए ।

r_{13} निर्धारण का गुणाक X_1 तथा X_3 के लिए ।

r_{14} निर्धारण का गुणाक X_1 तथा X_4 के लिए ।

r_{23} निर्धारण का गुणाक X_2 तथा X_3 के लिए ।

r_{24} निर्धारण का गुणाक X_2 तथा X_4 के लिए ।

r_{34} निर्धारण का गुणाक X_3 तथा X_4 के लिए ।

$r_{12\cdot 3}$ आशिक निर्धारण का गुणाक X_1 म अतिरिक्त घटबढ X_2 द्वारा व्याख्यात, X_1 म घटबढ के अनुपात के रूप म अभिव्यक्त जो X_3 द्वारा अव्याख्यात थी ।

$r_{13\cdot 2}$ आशिक निर्धारण का गुणाक, X_1 म अतिरिक्त घटबढ X_3 द्वारा व्याख्यात, X_1 म घटबढ के अनुपात के रूप म अभिव्यक्त जो X_2 द्वारा अव्याख्यात थी ।

$r_{12\cdot 4}$, $r_{13\cdot 4}$, $r_{14\cdot 2}$, $r_{14\cdot 3}$, $r_{24\cdot 3}$, $r_{34\cdot 2}$ आशिक सहसम्बन्ध के गुणाक विभिन्न अन्य मापो के परिकलन म सहायता के लिए इस अध्याय म प्रयुक्त किय गय हैं ।

$r^2_{12\cdot 34}$ आशिक निर्धारण का गुणाक, X_1 म अतिरिक्त घटबढ X_2 द्वारा व्याख्यात X_1 म घटबढ के अनुपात के रूप म अभिव्यक्त जो X_3 तथा X_4 द्वारा अव्याख्यात थी ।

$r_{13\cdot 24}$ आशिक निर्धारण का गुणाक X_1 म अतिरिक्त घटबढ X_3 द्वारा व्याख्यात X_1 म घटबढ के अनुपात के रूप म अभिव्यक्त जो X_2 तथा X_4 द्वारा अव्याख्यात थी ।

$r^2_{14 \cdot 3}$ आशिक निर्धारण का गुणाक Y म अतिरिक्त घटबढ X_4 द्वारा व्याख्यान Y_1 मे घटबढ के अनुपात के रूप म अभि यक्त जो X_2 तथा X_3 द्वारा अव्याख्यात थी।

$r^2_{12 \cdot 34 \ldots m}$ आशिक निर्धा ग के गुणाक का सामान्य रूप, X_1 मे अतिरिक्त घटबढ X_2 द्वारा व्याख्यान X म घटबढ के अनुपात क रूप म अभिव्यक्त जो $X_3, X_4 \ldots X_m$ द्वारा अव्याख्यात थी।

$r_{1n \cdot 3 \ldots (n-1)}$ आशिक निधारण क गुणाक का सामान्य रूप X_1 मे अतिरिक्त घटबढ Y द्वारा व्याख्यान X म घटबढ के अनुपात के रूप मे अभिव्यक्त जो Y X_3 X द्वारा अव्याख्यात थी।

$r_{1 \cdot 23} \ldots (-2)$ r_1 ... ( ) क परिकलन के लिए इस अध्याय म प्रयुक्त आशिक सह-
$r_{1m \cdot 3}$ ( ) सम्बन्ध के गुणाको क सामान्य रूप। ध्यान द कि तीन गुणाक परिकलित किये जाने वाले गुणाक म एक क्रम नीचे हैं प्रथम X , को अपवर्जित कर देता है दूसरा X का अपवर्जन करता है तथा तीसरा X_1 को अपवर्जित करता है।

$R_{1 \cdot 3}$ अनेकधा निर्धारण का गुणाक X मे घटबढ का अनुपात जो X_2 तथा X_3 द्वारा व्याख्यात था।

$R_{1 \cdot 4}$ अनेकधा निर्धारण का गुणाक X_1 मे घटबढ का अनुपात जो X_2 तथा X_4 द्वारा व्याख्यात था।

$R^2_{1 \cdot 34}$ अनेकधा निर्धारण का गुणाक, X_1 म घटबढ का अनुपात जो X_3 तथा X_4 द्वारा व्याख्यात था।

$R_{1 \cdot 34}$ अनेकधा निर्धारण का गुणाक, Y_1 म घटबढ का अनुपात जो X_2 X_3 तथा Y_4 द्वारा व्याख्यात था।

$R_{1 \cdot 34 \ldots n}$ अनेकधा निर्धारण के गुणाक का सामान्य रूप, X_1 म घटबढ का अनुपात जो Y_2 X_3 X_4 ... X_n द्वारा व्याख्यात था।

$R_{1 \cdot 34 \ldots (n-1)}$ $r_{1m \cdot 23}$ ... क परिकलन म सहायता के लिए प्रयुक्त अनेकधा निर्धारण के गुणाक का सामान्य रूप, X_1 म घटबढ का अनुपात जो X_2 X_3, X_4 ... X_{n-1} द्वारा व्याख्यात था।

$R_{134 \ldots n}$ $r^2_{1n \cdot 34}$ के परिकलन म सहायता के लिए प्रयुक्त अनेकधा निर्धारण के गुणाक का सामान्य रूप X_1 मे घटबढ का अनुपात जो X_3, X_4 ..., X_m द्वारा व्याख्यात था।

s_1, s_2, s_3, s_4 क्रमश X_1 X_2 X_3 X_4 श्रेणी के मानक विचलन।

$s_{1 \cdot 2}$ आकलन समीकरण $X_{c1 \cdot 2} = a_{1 \cdot 2} + b_{12} X_2$ के लिए आकलन मानक त्रुटि। अध्याय 19 म $s_{Y \cdot X}$ के समान।

$s_{1 \cdot 3}$ आकलन समीकरण $X_{c1 \cdot 3} = a_{1 \cdot 3} + b_{13} Y_3$ के लिए आकलन मानक त्रुटि।

$s_{1 \cdot 23}$ आकलन समीकरण $X_{c1 \cdot 23} = a_{1 \cdot 23} + b_{12 \cdot 3} X_2 + b_{13 \cdot 2} X_3$ के लिए आकलन मानक त्रुटि।

$s_{1 \cdot 24}$ आकलन समीकरण $Y_{c1 \cdot 24} = a_{1 \cdot 24} + b_{12 \cdot 4} X_2 + b_{14 \cdot 2} X_4$ के लिए आकलन मानक त्रुटि।

$s_{1.34}$: आकलन समीकरण $X_{c1.34} = a_{1.34} + b_{13.4}X_3 + b_{14.3}X_4$ के लिए आकलन मानक त्रुटि ।

$s_{1.234}$: आकलन समीकरण $X_{c1.234} = a_{1.234} + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4$ के लिए आकलन मानक त्रुटि ।

$s_{1.234 \ldots m}$ आकलन की मानक त्रुटि का सामान्य रूप ।

$s_{m.123 \ldots (m-1)}$ · $b_{1m.23 \ldots (m-1)}$ के परिकलन मे सहायता के लिए प्रयुक्त आकलन मानक त्रुटि का सामान्य रूप ।

Σ बडा ग्रीक सिग्मा, तात्पर्य है "योग लो" ।

Σx_1^2 : X_1 मूल्यो की पूर्ण घटबढ ।

$\Sigma x_{c1.2}^2$, $\Sigma x_{c1.3}^2$, $\Sigma x_{c1.4}^2$: X_1 की घटबढ क्रमशः X_2 द्वारा, X_3 द्वारा, तथा X_4 द्वारा व्याख्यात ।

$\Sigma x_{c1.23}^2$, $\Sigma x_{c1.24}^2$, $\Sigma x_{c1.34}^2$ X_1 की घटबढ, क्रमश· X_2 तथा X_3 द्वारा, X_2 तथा X_4 द्वारा, तथा X_3 और X_4 द्वारा व्याख्यात ।

$\Sigma x_{c1.234}^2$ X_1 की घटबढ X_2, X_3, तथा X_4 द्वारा व्याख्यात ।

$\Sigma x_{s1.2}^2$, $\Sigma x_{s1.3}^2$, $\Sigma x_{s1.4}^2$ X_1 की घटबढ, क्रमश X_2 द्वारा, X_3 द्वारा तथा X_4 द्वारा अव्याख्यात ।

$\Sigma x_{s1.23}^2$, $\Sigma x_{s1.24}^2$, $\Sigma x_{s1.34}^2$ X_1 की घटबढ, क्रमश X_2 तथा X_3 द्वारा, X_2 तथा X_4 द्वारा, और X_3 तथा X_4 द्वारा अव्याख्यात ।

$\Sigma x_{s1.234}^2$ X_1 की घटबढ X_2, X_3, तथा X_4 द्वारा अव्याख्यात ।

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_m$ $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots, X_m$ श्रेणी मे मान अपने क्रमिक समान्तर माध्यो से विचलनो के रूप मे अभिव्यक्त ।

x_{c1} देखिए Σx_{c1}^2 विभिन्न अतिरिक्त पादाको सहित ।

x_{s1} · देखिए Σx_{s1}^2 विभिन्न अतिरिक्त पादाको सहित ।

X_1 X_1 श्रेणी, तथा X_1 श्रेणी मे प्रेक्षित मान । इस प्रकार हम X_1 का X_2, X_3 तथा X_4 से सहसबन्ध करने का सकेत करते हैं, किन्तु ΣX_1 का तात्पर्य है "X_1 श्रेणी मे मानों का योग लो" ।

$X_2, X_3, X_4, \ldots, X_m$ क्रमश $X_2, X_3, X_4, \ldots, X_m$ श्रेणियां; उन श्रेणियो मे प्रेक्षित मान भी । X_1 देखिए ।

$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4, \ldots \bar{X}_m$ क्रमश $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots X_m$ श्रेणियो के समान्तर माध्य ।

$X_{c1.2}$: श्रेणी X_1 का परिकलित मान जब आकलन समीकरण $X_{c1.2} = a_{1.2} + b_{12}X_2$ का प्रयोग किया जाए । अध्याय 19 मे Y_c के समान ।

$X_{1c.3}$ X_1 श्रेणी का परिकलित मान जब आकलन समीकरण $X_{c1.3} = a_{1.3} + b_{13}X_3$ का प्रयोग किया जाए ।

$X_{c1.23}$: X_1 श्रेणी का परिकलित मान जब आकलन समीकरण $X_{c1.23} = a_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$ का प्रयोग किया जाए ।

$X_{c1\ 24}$ Y_1 श्रेणी का परिकलित मान जब $a_{1\ 24}$ के लिए ऊपर निर्दिष्ट आकलन समीकरण का प्रयोग किया जाए।

$X_{c1\ 34}$ X_1 श्रेणी का परिकलित मान जब $a_{1\ 34}$ के लिए ऊपर निर्दिष्ट आकलन समीकरण का प्रयोग किया जाए।

$X_{c1\ 234}$: X_1 श्रेणी का परिकलित मान जब आकलन समीकरण $X_{c1\ 234}= a_{1\ 234}+b_{12\ 34}X_2+b_{13\ 24}X_3+b_{14\ 23}X_4$ का प्रयोग किया जाए।

$X_{c1\ 22'3}$: X_1 श्रेणी का परिकलित मान जब $a_{1\ 22'3}$ के लिए ऊपर निर्दिष्ट आकलन समीकरण का प्रयोग किया जाए।

अध्याय 22 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

a Y_c का मान जब $Y=a+bX$ समीकरण मे $X=0$

$a_{1\ 23}$ $X_{c1\ 23}$ का मान जब आकलन समीकरण $X_{c1\ 23}=a_{1\ 23}+b_{12\ 3}X_2+b_{13\ 2}X_3$ मे $X_2=0$ तथा $X_3=0$

$a_{2\ 13}$ $X_{c2\ 13}$ का मान जब आकलन समीकरण $X_{c2\ 13}=a_{2\ 13}+b_{21\ 3}X_1+b_{23\ 1}X_3$ मे $X_1=0$ तथा $X_3=0$

b समीकरण $Y=a+bX$ मे X का गुणांक।

$b_{12\ 3}$ ऊपर $a_{1\ 23}$ के लिए निर्दिष्ट आकलन समीकरण मे X_2 का गुणाक।

$b_{13\ 2}$ ऊपर $a_{1\ 23}$ के लिए निर्दिष्ट आकलन समीकरण मे X_3 का गुणाक।

$b_{21\ 3}$ ऊपर $a_{21\ 13}$ के लिए निर्दिष्ट आकलन समीकरण मे X_1 का गुणाक।

$b_{23\ 1}$ ऊपर $a_{2\ 13}$ के लिए निर्दिष्ट आकलन समीकरण मे X_3 का गुणाक।

N द्वि-चर सहसबध के लिए मदा के युगलो की सख्या, अनेकधा एव आशिक सहसबध के लिए मदो के समुच्चयो की सख्या।

r सहसबध का गुणाक। r_{12} r_{13}, r_{23} गुणाक हैं जो क्रमश X_1 और X_2, X_1 और X_3, तथा X_2 और X_3 की ओर सकेत करते है।

$r_{12\ 3}$ आशिक सहसबध का गुणाक X_3 के मानो को स्थिर रखते हुए।

s_x x मानो की मानक घटबढ।

s_y y मानो की मानक घटबढ।

Σ बडा ग्रीक सिग्मा, जिसका अर्थ है "योगफल लो"।

x X मानो की उपनति-रेखा से किसी X मान की घटबढ।

X X श्रेणी, तथा X श्रेणी मे भी प्रेक्षित मान। इस प्रकार, हम X और Y को सहसबधित करने की ओर सकेत करते है, किन्तु ΣX का अभिप्राय है "X श्रेणी मे मानो का योगफल लो"।

X_1 : X_1 श्रेणी, X_1 श्रेणी मे कोई प्रेक्षित मान भी। इस प्रकार हम X_1 को X_2 के साथ या X_3 के साथ, या X_2 और X_3 दोनो के साथ सहसबधित करने की ओर सकेत करते है, किन्तु ΣX_1 का अभिप्राय है "X_1 श्रेणी के मानो का योगफल लो"।

X_2, X_3 . क्रमश X_2 श्रेणी तथा X_3 श्रेणी, उन श्रेणियो मे प्रेक्षित मान भी। देखिए X_1.

$X_{c_{1\,23}}$ X_1 श्रेणी का परिकलित मान जब $a_{1\,23}$ के लिए उपर्युक्त आकलन समीकरण का प्रयोग किया जाय।

$X_{c_{2\,13}}$ X_2 श्रेणी का परिकलित मान, जब $a_{2\,13}$ के लिए उपर्युक्त परिकलन समीकरण का प्रयोग किया जाए।

y Y मानो की उपनति-रेखा से किसी Y मान का विचलन।

Y Y श्रेणी, Y श्रेणी मे प्रेक्षित मान भी। इस प्रकार, हम X और Y को सहसबधित करने की ओर सकेत करते हैं किन्तु ΣY का अभिप्राय है "Y श्रेणी मे मानो का योगफल लो"।

Y_c Y श्रेणी का परिकलित मान।

अध्याय 23 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

A पाँसा फेकते समय श्वेत पार्श्व की उपस्थिति। A का कोई आंकिक मान नही है।

α_3 छोटा ग्रीक अल्फा वैषम्य का एक माप, $\sqrt{\beta_1}$, देखिए *अध्याय 10।*

B पाँसा फेकते समय श्वेत पार्श्व की अनुपस्थिति। B का कोई आंकिक मान नही है।

β_1 β_2 छोटा ग्रीक बीटा, क्रमश: वैषम्य और ककुदता के माप। अध्याय 10 देखिए।

c वैषम्य के लिए सशुद्धि कभी-कभी लघुगणकीय प्रसामान्य वक्र के आसजन मे प्रयुक्त।

C_0 C_1 C_2 द्विपद गुणाक।

d X_a मे X मान का, वर्ग अन्तराल के सबध म, विचलन।

e 2 71828, श्रेणी $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$ की सीमा।

f बारबारता।

$F_1\left(\frac{x}{s}\right)$ द्वितीय सन्निकटन वक्र को बठाने मे, परिशिष्ट ङ के प्रमामान्य-वक्र क्षेत्र।

$F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ द्वितीय-सन्निकटन वक्र को बैठाने मे, परिशिष्ट च के सारणीकृत मान, जो α_3 से गुणा किए जाने पर वैषम्य के लिए, परिष्कार प्रस्तुत करते हैं।

h सिक्के को उछालते समय चित या चेहरे की उपस्थिति।

i वर्ग अन्तराल।

k प्रतिदर्शों की सख्या।

N किसी प्रतिदर्श मे मदो की सख्या।

ν_1, ν_2, ν_3 छोटा ग्रीक नू, चुने हुए उद्गम के सम्बन्ध मे प्रथम, द्वितीय, तथा तृतीय क्षण। अध्याय 10 देखिए।

p किसी प्रतिदर्श म उपस्थितियो का अनुपात।

π छोटी ग्रीक पाइ प्रमामा य वक्र के लिए अभिव्यक्ति मे स्थिर 3 14159 द्विपद मे किसी समष्टि मे उपस्थितिया क अनुपात।

π_2 π_3 छोटी ग्रीक पाइ λ क विषय म द्वितीय तथा तृतीय सचलन। अध्याय 10 दखिए।

q किसी प्रतिदश मे अनुपस्थितिया का अनुपात।

Q चतुथक विचलन अथवा अध अ तश्चतुथक परिसर। अध्याय 10 दखिए।

Q_1 Q_2 Q_3 चतुथक। अध्याय 9 देखिए।

s किसी प्रतिदश का मानक विचलन। अध्याय 10 देखिए।

S लघु प्रतिदश मानो की श्रेणियो के लघुगणको का मानक विचलन।

Sk लघु चतुथको क लघगणको पर आधित वषम्य का गुणाक।

σ छोटा ग्रीक सिग्मा समष्टि का मानक विचलन।

σ एक अकले प्रतिदश मे परिकलित समष्टि का आकलित मानक विचलन। सिग्मा करट या सिग्मा हैट क रूप मे सकेतित। अध्याय 24 देखिए।

t सिक्का उछालन समय पट की उपस्थिति अथवा चेहरे की अनुपस्थिति।

τ छोटा ग्रीक टाउ किसी समष्टि मे अनुपस्थितियो का अनुपात।

x $\lambda - A$

X X श्रेणी का मान।

Y समान्तर माध्य। अध्याय 9 देखिए।

λ_a निर्दिष्ट माध्य अध्याय 9 दखिए।

λ लघु लघगणको की श्रेणी का समा तर माध्य।

x लघु लघु X—λ लघ।

Y आसजित वक्र की परिकलित कोटि।

Y_0 A पर प्रमामाय वक्र की परिकलित कोटि।

$\int_0^X f(x)dx$ A से Y तक वक्र तगत आनुपातिक क्षत्र।

अध्याय 24 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

β_{1P} छोटा ग्रीक बीटा समष्टि म वषम्य।

$\beta_{1\bar{x}}$ λ मूल्यो वाले प्रतिदश के विभाजन का वषम्य।

β_{2P} समष्टि म ककुदता।

$\beta_{2\bar{x}}$ मूल्यो वाले प्रतिदश के विभाजन की ककुदता।

D युग्मित मूल्या के मध्य अ तर।

d विचलन वग अन्तरालो क स दभ म λ_a से X का।

F $\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$; देखिए अध्याय 26।

f बारबारता।

k प्रतिदर्शो की सख्या। k सामान्य रूप से K से अधिक छोटा होगा।

K एक समष्टि मे प्रदत्त प्रकार के सम्भव प्रतिदर्शो की सख्या।

n : प्रतिदर्श मे स्वातन्त्र्य ग्रश। जब दो प्रतिदर्श विचाराधीन हो, $n = n_1 + n_2$.

N प्रतिदर्श म मदो की सख्या।

P प्रायिकता, 0 से 1 तक विचरण करती है।

$\wp$ समष्टि मे मदो की सख्या। पादाक के रूप मे, $\wp$ का अर्थ है "समष्टि", इस प्रकार $\bar{X}_\wp$ समष्टि का समातर माध्य है।

r सहसबध गुणाक।

s प्रतिदर्श का मानक विचलन।

σ छोटा ग्रीक सिग्मा, समष्टि का मानक विचलन।

$\hat{\sigma}$ समष्टि का आकलित मानक विचलन, एक प्रतिदर्श से परिकलित। जिसका उल्लेख "सिग्मा कैरेट" अथवा" सिग्मा हैट" की तरह हुआ है।

$\hat{\sigma}_1$ प्रतिदर्श 1 पर आधारित आकलन।

$\hat{\sigma}_2$ प्रतिदर्श 2 पर आधारित आकलन।

$\hat{\sigma}_{1+2}$ आकलन है, जिसका दो प्रतिदर्शो की स्वातन्त्र्य-मात्रा और x^2 मूल्यो के एकत्रीकरण द्वारा परिकलन हुआ है।

$\hat{\sigma}_D$ D मूल्यो की श्रेणी के लिए आकलित समष्टि मानक त्रुटि।

$\sigma_{\bar{X}}$ $\bar{X}$ की मानक त्रुटि। जब दो प्रतिदर्श विचाराधीन हो, तो हम प्रयोग करते हैं $\sigma_{\bar{X}_1}$ और $\sigma_{\bar{X}_2}$

$\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ $\bar{X}$ की आकलित मानक त्रुटि।

$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1} - \hat{\sigma}_{\bar{X}_2}$ दो प्रतिदर्श समान्तर माध्यो के बीच आकलित मानक त्रुटि का अन्तर।

$\hat{\sigma}_{\bar{X}D}$ $\bar{X}_D$ की आकलित मानक त्रुटि।

Σ बडा ग्रीक सिग्मा, अर्थात् "योग लो"।

t $\frac{\bar{X} - \bar{X}_\wp}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}$, $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$, या $\frac{\bar{X}_D}{\hat{\sigma}_{\bar{X}D}}$.

x $X - \bar{X}$, साथ ही, $\bar{X} - \bar{X}_\wp$ व्यजक $\frac{x}{\sigma}$ मे, जो दीखता है।

x_1 : श्रेणी 1 मे $\bar{X}_1$ से मूल्य का विचलन, $\Sigma x_1^2 = \Sigma(X_1 - \bar{X}_1)^2$.

x_2 : श्रेणी 2 मे $\bar{X}_2$ से मूल्य का विचलन; $\Sigma x_2^2 = \Sigma(X_2 - \bar{X}_2)^2$.

X : प्रतिदर्श मे प्रेक्षित मान।

X_1 : प्रतिदर्श 1 मे प्रेक्षित मान।

X_2 : प्रतिदर्श 2 मे प्रेक्षित मान।

$\bar{X}$: प्रतिदर्श का समातर माध्य।

$\bar{X}_1$ प्रतिदर्श 1 का समातर माध्य।

$\bar{X}_2$: प्रतिदर्श 2 का समातर माध्य।

$\bar{X}D$: D मानों की श्रेणी का समातर माध्य।

$\bar{X}_{\wp}$ समष्टि का समातर माध्य।

$\bar{X}_{\wp 1}$ $\bar{X}_{\wp}$ की निम्न विश्वास्यता सीमा।

$\bar{X}_{\wp 2}$: $\bar{X}_{\wp}$ की उच्च विश्वास्यता सीमा।

$\frac{x}{\sigma}$ विचलन अपनी मानक त्रुटि द्वारा विभाजित, उदाहरणार्थ $\frac{\bar{X}-\bar{X}_{\wp}}{\sigma_{\bar{X}}}$

χ^2 · छोटा ग्रीक काई देखिए। अध्याय 25।

अध्याय 25 मे प्रयुक्त सकेत चिह्न

भाग 1 अनुपात

a प्रतिदर्श मे घटनाओ की सख्या।

a_1 प्रतिदर्श 1 मे घटनाओ की सख्या

a_2 प्रतिदर्श 2 मे घटनाओ की सख्या।

α . छोटा ग्रीक अल्फा, समष्टि मे घटनाओ की सख्या।

A घटना का सूचक, A का कोई आंकिक मान नही है।

b प्रतिदर्श म अ घटनाओ की सख्या।

β छोटा ग्रीक बीटा, समष्टि म अ-घटनाओ की सख्या।

B : अ-घटना का सूचक, B का कोई आंकिक मान नही है।

k प्रतिदर्शो की सख्या।

N प्रतिदर्श मे मदो की सख्या।

N_1 प्रतिदर्श 1 मे मदो की सख्या।

N_2 : प्रतिदर्श 2 मे मदो की सख्या।

p प्रतिदर्श मे घटनाओ का अनुपात।

p_k k वे प्रतिदर्श मे घटनाओ का अनुपात।

p_1 : प्रतिदर्श 1 मे घटनाओ का अनुपात।

p_2 प्रतिदर्श दो मे घटनाओ का अनुपात।

$\bar{p}$: दो प्रतिदर्शों पर आधारित π का आकलन, p_1 तथा p_2 की भारित औसत।

P प्रायिकता, 0 से 1 तक घटती-बढ़ती है ।

π छोटी ग्रीक पाई, समष्टि म घटनाओं का अनुपात ।

π_1 π की निचली विश्वास्यता सीमा ।

π_2 π की ऊपरी विश्वास्यता सीमा ।

q किसी प्रतिदर्श म अ घटनाओं का अनुपात, $q=1-p$

q_1 प्रतिदर्श 1 म अघटनाओं का अनुपात ।

q_2 प्रतिदर्श 2 म अघटनाओं का अनुपात ।

q $1-p$

σ_a a की मानक त्रुटि ।

σ_p p की मानक त्रुटि ।

$\sigma_{p_1-p_2}$ p_1 तथा p_2 के बीच भिन्नता की आकलित मानक त्रुटि ।

τ छोटा ग्रीक टाउ, समष्टि म अ-घटनाओं का अनुपात $\tau=1-\pi$.

$\frac{\lambda}{\sigma}$ अपनी मानक त्रुटि से विभाजित विचलन, उदाहरण के लिए

$\frac{p-\pi}{\sigma_p}$ और $\frac{a-\lambda}{\sigma_a}$

भाग 2 काई-वर्ग परीक्षण

a प्रतिदर्श म घटनाओं की सख्या ।

a_1 किसी 2×2 सारणी के या, सामान्यतः, किसी भी $2\times R$ सारणी के, ऊपरी बाएँ सेल म प्रेक्षित बारबारताओं की सख्या ।

a_2 किसी $2\times R$ सारणी के प्रथम स्तम्भ की दूसरी पक्ति म प्रेक्षित बारबारताओं की सख्या, किसी 2×2 सारणी के निचले बाएँ सेल मे भी ।

a_3 किसी $2\times R$ सारणी के प्रथम स्तम्भ की तीसरी पक्ति म प्रेक्षित बारबारताओं की सख्या ।

A घटना की सूचक, A का कोई आकिक मान नही है ।

b प्रतिदर्श म घटनाओं की सख्या ।

b_1 किसी 2×2 सारणी के, या, सामान्यत, किसी $2\times R$ सारणी के ऊपरी दाएँ कोष्ठ म प्रेक्षित बारबारताओं की सख्या ।

b_2 किसी $2\times R$ सारणी के द्वितीय स्तम्भ की दूसरी पक्ति मे प्रेक्षित बारबारताओं की सख्या, किसी $2\times R$ सारणी के निचले दाएँ कोष्ठ मे भी ।

b_3 किसी $2\times R$ सारणी के द्वितीय स्तम्भ की तीसरी पक्ति मे प्रेक्षित बारबारताओं की सख्या ।

B अ-घटना की सूचक B का कोई आंकिक मान नहीं है।

C जिस कोई वर्ग सारणी में हाशिये के योग निश्चित हैं उसमें प्रेक्षित बारबारताओं (योगों को छोड़कर) के स्तम्भों की संख्या।

f प्रेक्षित बारबारता।

f_c परिकल्पित बारबारता।

n स्वातन्त्र्य के अंश।

N प्रतिदर्श में मदों की संख्या। 2×2 तथा अन्य बड़ी सारणियों में N सम्पूर्ण सारणी की मदों की संख्या है।

N_a $2 \times R$ सारणी के प्रथम स्तम्भ में बारबारताओं (मदों) की संख्या।

N_b $2 \times R$ सारणी के द्वितीय स्तम्भ में बारबारताओं (मदों) की संख्या।

N_1, N_2, N_3 क्रमशः $2 \times R$ सारणी की प्रथम, द्वितीय, तृतीय पंक्ति में बारबारताओं (मदों) की संख्या।

p प्रतिदर्श में घटनाओं का अनुपात।

p_1 प्रतिदर्श 1 में घटनाओं का अनुपात।

p_2 प्रतिदर्श 2 में घटनाओं का अनुपात।

P प्रायिकता 0 से 1 तक घटती बढ़ती है।

π छोटी ग्रीक पाइ समष्टि में घटनाओं का अनुपात।

R : जिस कोई वर्ग के हाशिये के योग निश्चित हैं, उसमें प्रेक्षित बारबारताओं (योगों को छोड़ कर) की पंक्तियों की संख्या।

σ_2 समष्टि का प्रसरण।

$\hat{\sigma}_2$ समष्टि का आकलित प्रसरण।

σ_a a की मानक त्रुटि।

σ_p p की मानक त्रुटि।

Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा इसका अर्थ है 'योगफल लो'।

$\frac{x}{\sigma}$ मानक त्रुटि से विभाजित विचलन, उदाहरणार्थ, $\frac{p-\pi}{\sigma_p}$

χ^2 काई-वर्ग। यह संकेत चिह्न छोटा ग्रीक काई है।

! क्रम गुणित उदाहरणार्थ, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$

अध्याय 26 में प्रयुक्त संकेत चिह्न

प्रसरण

F $\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$

G गुणोत्तर माध्य।

k प्रतिदर्शों की संख्या।

L अनेक प्रसरणों के गुणोत्तर माध्य का उनके समांतर माध्य से अनुपात ।

n स्वातन्त्र्य-संख्या ।

n_1, n_2, n_3 क्रमश , प्रतिदर्श 1, 2 3.. n_k में स्वातन्त्र्य-संख्या जिनका उल्लेख k प्रतिदर्श की स्वातन्त्र्य-संख्याओं में होता है ।

N प्रतिदर्श में मदों की संख्या ।

N_1 N_2 N_3 क्रमश प्रतिदर्श 1 2 3, N_k में मदों की संख्या जिनका उल्लेख k प्रतिदर्श की संख्या में होता है ।

N_i आकार के अनेक प्रतिदर्शों में से किसी भी एक की मदों की संख्या दिखाने के लिए L के सम्बन्ध में प्रयुक्त हुआ है ।

P प्रायिकता 0 से 1 तक विचरती है ।

s^2 प्रतिदर्श का प्रसरण ।

s_1^2 प्रतिदर्श 1 का प्रसरण ।

s_2^2 प्रतिदर्श 2 का प्रसरण ।

σ^2 समष्टि का प्रसरण ।

σ_1^2 σ^2 की निम्न विश्वास्यता सीमाएँ ।

σ_2^2 σ^2 की उच्च विश्वास्यता सीमाएँ ।

$\hat{\sigma}^2$ प्रतिदर्श से प्राप्त समष्टि का आकलित प्रसरण ।

$\hat{\sigma}_1^2$ $\hat{\sigma}_2^2$ $\hat{\sigma}_3^2$ क्रमश , प्रतिदर्श 1, 2, 3 $\hat{\sigma}_k^2$ के समष्टि प्रसरण का आकलन, जिसका उल्लेख k प्रतिदर्श में होता है ।

Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा अर्थात् "योग लो" ।

x $X - \bar{X}$

x_1 प्रतिदर्श में विचलन का मान 1 से $\bar{X}_1$, $\Sigma x_1^2 = \Sigma(x_1 - \bar{X}_1)^2$

x_2 प्रतिदर्श में विचलन का मान 2 से $\bar{X}_2$, $\Sigma x_2^2 = \Sigma(x_2 - \bar{X}_2)^2$

$\bar{X}_1$ प्रतिदर्श 1 का समांतर माध्य ।

$\bar{X}_2$ प्रतिदर्श 2 का समांतर माध्य ।

X^2 देखिए अध्याय 25 । सकेत चिह्न छोटे ग्रीक सिग्मा का है ।

∞ अनंत चिह्न ।

प्रसरण का विश्लेषण

F σ^2 के दो अनुमानों का अनुपात ।

k_b बक्सों की संख्या ।

k_c स्तम्भों की संख्या ।

k_r पंक्तियों की संख्या ।

n स्वातत्य कोटिया ।

n_1 स्वातन्त्र्य कोटियाँ F के अश म सम्बन्धित ।

n_2 स्वातन्त्र्य कोटिया F के हर म सम्बन्धित ।

N सभी पक्तियो सभी स्तम्भो या सभी बक्सो मे मदो की सख्या ।

N_b बक्स म मदो की सख्या ।

N_c स्तम्भ म मदो की सख्या ।

N_r पक्ति म मदो की सख्या ।

N_1, N_2, N_3 क्रमश स्तम्भ 1 2 3 म मदो की सख्या ।

P प्रायिकता 0 से 1 तक विचरती है ।

$\hat{\sigma}^2$ समष्टि प्रसरण का प्रयुक्त अनुमान $\sum_{1}^{N}(X-\bar{X})^2$ का प्रयोग करते हुए ।

Σ बडा ग्रीक सिग्मा अर्थात् योग लो ।

$\sum_{1}^{k_b}$ बक्सो k_b के ऊपर सकलन ।

$\sum_{1}^{k_c}$ स्तम्भो k_c के ऊपर सकलन ।

$\sum_{1}^{k_r}$ पक्तियो k_r के ऊपर सकलन ।

$\sum_{1}^{N}$ सभी मदो क ऊपर सकलन । Σ क समान ।

$\sum_{1}^{N_b}$ बक्स की मदो N_b के ऊपर सकलन ।

$\sum_{1}^{N_c}$ स्तम्भ की मदो N_c के ऊपर सकलन ।

$\sum_{1}^{N_r}$ पक्ति की मदो N_r के ऊपर सकलन ।

t देखिए अध्याय 24 । $t=\sqrt{F}$ जब $n_1=1$

X प्रेक्षित मान ।

$\bar{X}$ सभी मदो का समातर माध्य "महामाध्य" ।

$\bar{X}_b$ बक्स का समातर माध्य ।

$\bar{X}_c$ स्तम्भ का समातर माध्य ।

$\bar{X}_r$ पक्ति का समातर माध्य ।

λ_1 λ_2 λ_3 क्रमश स्तम्भ 1 2, 3 का समांतर माध्य।

χ^2 काइ वर्ग, देखिए अध्याय 25। $\frac{\chi^2}{n}=F$ जब $\lambda = \infty$

वैषम्य और ककुदता

β_1 छोटा ग्रीक बीटा प्रतिदर्श म वैषम्य का माप। देखिए अध्याय 10।

β छोटा ग्रीक बीटा प्रतिदर्श म ककुदता का माप। देखिए अध्याय 10।

N प्रतिदर्श म मदों की संख्या।

सहसम्बन्ध गुणाक

b अनुमानित समीकरण $Y \quad a+bX$ का ढाल।

F दो अनुमानित प्रसरणों का अनुपात।

η^2_{YX} छोटा ग्रीक ईटा स्तम्भ माध्यों पर आधारित सहसम्बन्ध अनुपात का वर्ग (देखिए अध्याय 20) कभी कभी निर्धारण के अनुपात के रूप म उल्लिखित हुआ है।

$\hat{\eta}^2_{YX}$ छोटा ग्रीक ईटा r^2_{YX} का समष्टि अनुमान।

m अनुमानित समीकरण म अचरों की संख्या। सहसम्बन्ध समीकरण r_{YX} के लिए m स्तम्भों की संख्या है।

n स्वातत्र्य कोटियाँ।

n^1 और n क्रमश F के अंश और हर से सम्बन्धित स्वातत्र्य कोटियाँ।

N प्रतिदर्श म मदों की संख्या। दो चर रेखिक अथवा अरेखिक सहसम्बन्ध म N मदों के जोडों की संख्या है। बहु अथवा आंशिक सहसम्बन्ध म, N प्रेक्षण समुच्चयों की संख्या है।

N_1 और N_2 क्रमश मदों के जोडों की संख्या जिनसे r_1 और r_2 की गणना की गई थी।

P प्रायिकता, 0 से 1 तक विचरती है।

r प्रतिदर्श सहसम्बन्ध का गुणाक दो चरों का रेखिक सहसम्बन्ध। जब दो प्रतिदर्श विचाराधीन हो तो हम r_1 और r_2 का प्रयोग करते हैं।

r_ρ समष्टि सहसम्बन्ध गुणाक दो चरों का एक घात सहसम्बन्ध।

r_{ρ_1} r_ρ की निम्न विश्वसनीय सीमा।

r_{ρ_2} r_ρ की ऊपरी विश्वसनीय सीमा।

$\hat{r}$ प्रतिदर्श म प्राप्त r_ρ का अनुमानित मान।

$r^2_{13\cdot2}$ गुणाक का आंशिक निर्धारण। देखिए अध्याय 21।

$r^2_{1m\ 23\ \ldots (m-1)}$ m चरों के लिए सामान्य प्रकार के गुणांक का आंशिक निर्धारण।

$\hat{r}^2_{1m\ 23\ \ldots (m-1)}$ $r^2_{1m\ 23\ \ldots (m-1)}$ का अनुमानित समष्टि मान।

$r^2_{12\ 34}, r^2_{13\ 24}, r^2_{14\ 23}$ चार चरों के लिए गुणांक के आंशिक निर्धारण के तीन प्रकार, जब X_1 आश्रित चर हो।

$r^2_{YX^2\ X}$ आंशिक निर्धारण का गुणांक, X^2 द्वारा व्याख्या किये हुए Y में अतिरिक्त विचरण Y के अनुपात के विचरण में प्रकट हुआ था जिसकी व्याख्या X के द्वारा नहीं हुई थी।

$r^2_{Y\ XX^2}$ X और X^2 के लिए निर्धारण का गुणांक आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ का प्रयोग किया था।

$\hat{r}^2_{Y\ XX^2}$ $r^2_{Y\ XX^2}$ का समष्टि आकलन।

$r^2_{YX^3\ XX^2}$ आंशिक निर्धारण का गुणांक, X^3 द्वारा व्याख्यात Y में अतिरिक्त विचरण, Y के अनुपात के विचरण में अभिव्यक्त जिसकी व्याख्या X और X^2 के द्वारा नहीं हुई थी।

$r^2_{Y\ XX^2X^3}$ X और X^2 के लिए निर्धारण का गुणांक, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ प्रयुक्त हुआ था।

$\hat{r}^2_{Y\ XX^2X^3}$ $r^2_{Y\ XX^2X^3}$ का समष्टि अनुमान।

$R^2_{1\ 23}$ बहुगुण निर्धारण का गुणांक, X_1 में चर का अनुपात जिसकी व्याख्या X_2 और X_3 के द्वारा हुई थी।

$R^2_{1\ 234}$ बहुगुण निर्धारण का गुणांक, X_1 में चर का अनुपात जिसकी व्याख्या X_2, X_3 और, X_4 के द्वारा हुई थी।

$R^2_{1\ 234\ \ldots m}$ m चरों के लिए बहुगुण निर्धारण का सामान्य प्रकार का गुणांक।

$\hat{R}^2_{1\ 234\ \ldots m}$ $R^2_{1\ 234\ \ldots m}$ का आकलित समष्टि मान।

s^2_Y Y श्रेणी का कुल प्रसरण।

$s^2_{Y\ X}$: आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के लिए आकलन की मानक त्रुटि का वर्ग, अव्याख्यात प्रसरण।

$\hat{\sigma}^2$ समष्टि में आकलित प्रसरण।

$\hat{\sigma}^2_Y$ · Y श्रेणी का आकलित समष्टि प्रसरण (कुल प्रसरण)।

$\hat{\sigma}^2_{Y\ X}$ अव्याख्यात प्रसरण का समष्टि आकलन, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

σ_z : z की मानक त्रुटि।

$\sigma_{z_1 - z_2}$ · $z_1 - z_2$ की मानक त्रुटि।

Σ बड़ा ग्रीक सिग्मा, अर्थात् "योग लो"।

Σx^2_1 कुल प्रसरण X_1 श्रेणी में।

$\Sigma x^2_{c1\ 23}$: व्याख्यात प्रसरण आकलन समीकरण $X_{c1\ 23} = a_{1\ 23} + b_{12\ 3}X_2 + b_{13.2}X_3$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

$\Sigma x^2_{c1.234}$ व्याख्यात प्रसरण आकलन समीकरण $X_{c1.234} = a_{1.234} + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

$\Sigma x^2_{c1.234\ldots m}$ सामान्य रूप व्याख्यात प्रसरण आकलन समीकरण $X_{c1.234\ldots m} = a_{1.234\ldots m} + b_{12.34\ldots m}X_2 + b_{13.24\ldots m}X_3 + b_{14.23\ldots m}X_4 + \ldots + b_{1m.23\ldots(m-1)}X_m$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

$\Sigma x^2_{c1.234\ldots(m-1)}$ व्याख्यात प्रसरण आकलन समीकरण $X_{c1.234\ldots(m-1)} = a_{1.234\ldots(m-1)} + b_{12.34\ldots(m-1)}X_2 + b_{13.24\ldots(m-1)}X_3 + b_{14.23\ldots(m-1)}X_4 + \ldots + b_{1(m-1).23\ldots(m-2)}X_{(n-1)}$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

$\Sigma x^2_{s1.23}$ अव्याख्यात प्रसरण $\Sigma x^2_{c1.23}$ के लिए दिखाए गए आकलन समीकरण के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

$\Sigma x^2_{s1.234}$ अव्याख्यात प्रसरण $\Sigma x^2_{c1.234}$ के लिए दिखाए गए आकलन समीकरण के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

$\Sigma x^2_{s1.234\ldots m}$ सामान्य रूप अव्याख्यात प्रसरण, $\Sigma x^2_{c1.234\ldots m}$ के लिये दिखाए गए आकलन समीकरण के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

$\Sigma x^2_{s1.234\ldots(m-1)}$ अव्याख्यात विचरण, $\Sigma x^2_{c1.234\ldots(m-1)}$ के लिए दिखाए गए आकलन समीकरण के प्रयोग क परिणामस्वरूप।

Σy^2 Y श्रेणी का कुल प्रसरण।

Σy^2_c व्याख्यात प्रसरण, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

$\Sigma y^2_{cY.XX^2}$ व्याख्यात प्रसरण आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ के प्रयोग के परिणाम स्वरूप।

$\Sigma y^2_{cY.XX^2X^3}$ व्याख्यात प्रसरण, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dx^3$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

Σy^2_s : अव्याख्यात प्रसरण, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

$\Sigma y^2_{sY.XX^2}$ अव्याख्यात प्रसरण, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2$ के प्रयोग के परिणामस्वरूप।

$\Sigma y^2_{sY.XX^2X^3}$ अव्याख्यात प्रसरण, आकलन समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ के प्रयोग के परिणाम स्वरूप।

$t = \sqrt{\frac{r^2(N-m)}{1-r^2}}$, अथवा तुल्य व्यजक (देखिए टिप्पणी 15)। r^2 निर्धारण का द्विचर रेखिक गुणाक अथवा निर्धारण का आशिक गुणाक हो सकता है।

$\frac{x}{\sigma}$ अपनी मानक त्रुटि से विभाजित विचलन, उदाहरणार्थ, $\frac{z-O}{\sigma_z}$ अथवा $\frac{z_1-z_2}{\sigma_{z1-z2}}$.

X : X श्रेणी में प्रेक्षित मान, X श्रेणी भी।

X_1, X_2, X_3, X_4, क्रमश Y_1, X_2, X_3, X_4, श्रेणियाँ, इन श्रेणियों में प्रेक्षित मान भी। इस प्रकार, हम उल्लेख कर सकते हैं X_1 को X_2, X_3, X_4 से सहसम्बन्धित करते हुए परन्तु ΣX_1 का अर्थ है, "X_1 श्रेणी में मानों का योग लो"।

$\bar{X}$: X श्रेणी का समान्तर माध्य।

$y : Y-\bar{Y}$

$y_c : Y_c-\bar{Y}$ Σy^2 और अतिरिक्त अधोलेख सहित Σy_c^2 को भी देखिए।

$y_s : Y-Y_c$ Σy^2 और अतिरिक्त अधोलेख सहित Σy_s^2 को भी देखिए।

Y Y श्रेणी में प्रेक्षित मान Y श्रेणी भी।

$\bar{Y}$: Y श्रेणी का समान्तर माध्य।

Y_c परिकलित Y मान।

z . 1 15129 लघु $\frac{1+r}{1-r}$ जब दो प्रतिदर्श विचाराधीन हों, तो हम r_1 तथा r_2 से सगति के लिए z_1 तथा z_2 का प्रयोग करते हैं।

z_ρ 1 15129 लघु $\frac{1+r_\rho}{1-r_\rho}$

$z_{\rho 1}$ z_ρ की निम्न विश्वास्यता सीमा।

$z_{\rho 2}$. z_ρ की ऊपरी विश्वास्यता सीमा।

परिशिष्ट ख

प्रथम 50 प्राकृतिक संख्याओं की प्रथम छः घातों के योग

$M=1$ से M = 50 तक की पहली M प्राकृतिक संख्याओं की पहली छः घातों के योगों को बताने वाली निम्न सारणी, काल श्रेणी पर उपनति रेखा को आसंजित करने के लिए बार-बार काम में आयगी। उस प्रकार के प्रमेय के लिए परिकलन सारणी में प्रयुक्त X का उच्चतम मान M है। जब X मूलबिन्दु X मानों के केन्द्र में लिया गया हो तब इस

M	$\sum_{1}^{M} X$	$\sum_{1}^{M} X^2$	$\sum_{1}^{M} X^3$	$\sum_{1}^{M} X^4$	$\sum_{1}^{M} X^5$	$\sum_{1}^{M} X^6$
1	1	1	1	1	1	1
2	3	5	9	17	33	65
3	6	14	36	98	276	794
4	10	30	100	354	1 300	4 890
5	15	55	225	979	4 425	20 515
6	21	91	441	2 275	12 201	67 171
7	28	140	784	4 676	20 008	184 820
8	36	204	1 296	8 772	61 776	446 964
9	45	285	2 025	15 333	120 825	978 405
10	55	385	3 025	25 333	220 825	1 978 405
11	66	506	4 356	39 974	381 874	3 749 966
12	78	650	6 084	60 710	630 708	6 735 950
13	91	819	8 281	89 271	1 002 001	11 562 759
14	105	1 015	11 025	127 687	1 539 825	19 092 295
15	120	1 240	14 400	178 312	2 299 200	30 482 920
16	136	1 496	18 496	243 848	3 347 776	47 260 136
17	153	1 785	23 409	327 369	4 767 633	71 397 705
18	171	2 109	29 241	432 345	6 657 201	105 409 929
19	190	2 470	36 100	562 666	9 133 300	152 455 810
20	210	2 870	44 100	722 666	12 333 300	216 455 810
21	231	3 311	53 361	917 147	16 417 401	302 221 931
22	253	3 795	64 009	1 151 403	21 571 033	415 601 835
23	276	4 324	76 176	1 431 244	28 007 376	563 037 724
24	300	4 900	90 000	1 763 020	35 970 000	754 740 700
25	325	5 525	105 625	2 153 645	45 735 625	998 851 325
26	351	6 201	123 201	2 610 621	57 617 001	1 307 797 101
27	378	6 930	142 884	3 142 062	71 965 908	1 695 217 590
28	406	7 711	164 836	3 756 718	89 176 276	2 177 107 894
29	435	8 555	189 225	4 463 999	109 687 425	2 771 931 215
30	465	9 455	216 225	5 273 999	133 987 425	3 500 931 215
31	496	10 416	246 016	6 197 520	162 616 576	4 388 434 896
32	528	11 440	278 784	7 246 096	196 171 008	5 462 176 720
33	561	12 529	314 721	8 432 017	235 306 401	6 753 644 669
34	595	13 685	354 025	9 768 353	280 741 825	8 299 449 105
35	630	14 910	396 900	11 268 978	333 263 700	10 136 714 730
36	666	16 206	443 556	12 948 594	393 729 876	12 313 497 066
37	703	17 575	494 209	14 822 755	463 073 833	14 879 223 475
38	741	19 019	549 081	16 907 891	542 309 001	17 890 159 859
39	780	20 540	608 400	19 221 332	632 533 200	21 408 903 620
40	820	22 140	672 400	21 781 332	734 933 200	25 504 903 620
41	861	23 821	741 321	24 607 093	850 789 401	30 255 007 861
42	903	25 585	815 409	27 718 789	981 480 633	35 744 039 605
43	946	27 434	894 916	31 137 590	1 128 489 076	42 065 402 654
44	990	29 370	950 100	34 885 686	1 293 405 300	49 321 716 510
45	1 035	31 395	1 071 225	38 986 311	1 477 933 425	57 625 482 135
46	1 081	33 511	1 168 561	43 463 767	1 683 896 401	67 099 779 031
47	1 128	35 720	1 272 384	48 343 448	1 913 241 408	77 878 994 360
48	1 176	38 024	1 382 976	53 651 864	2 168 013 376	90 109 584 824
49	1 225	40 425	1 500 625	59 416 665	2 450 570 625	103 950 082 025
50	1 275	42 925	1 625 625	65 666 665	2 763 020 625	119 575 872 025

सारणी मे दिखाये हुए सकलनो को दो से गुणा करना आवश्यक है। जब मूलबिन्दु काल श्रेणी मे प्रथम X मान पर लिया गया हो तब प्रमामान्य समीकरणो मे प्रयुक्त हुआ N $M+1$ के बराबर है, जब मूल बिन्दु का काल श्रेणी मे X मानो के केन्द्र मे लिया गया हो, तो N का मान $2M+1$ है।

पहली M प्राकृतिक सख्याओ की पहली छ घातो के योग निम्न व्यजको से प्राप्त किये जा सकते हैं :

$$\sum_1^M X = \frac{M(M+1)}{2} \qquad \sum_1^M X^4 = \left(\frac{3M^2+3M-1}{5}\right)\sum_1^M X^2$$

$$\sum_1^M X^2 = \left(\frac{2M+1}{3}\right)\sum_1^M X \qquad \sum_1^M X^5 = \left(\frac{2M^2+2M-1}{3}\right)\sum_1^M X^3$$

$$\sum_1^M X^3 = \left(\sum_1^M X\right)^2 \qquad \sum_1^M X^6 = \left(\frac{3M^4+6M^3-3M+1}{7}\right)\sum_1^M X^2$$

पहली 100 प्राकृतिक सख्याओ की पहली 7 घातो के योगो की सारणी ई० एस० पियर्सन तथा एच० ओ० हार्टले, बायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियश, खण्ड 1, केम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लदन, 1954, पृष्ठ 224—225, तथा कार्ल पियर्सन, टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स एन्ड बायोमेट्रीशियन्स, तृतीय सस्करण, भाग I, केम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लदन, 1948, पृष्ठ 40—41 मे मिल सकती है। यह पहले सस्करणो मे भी इन्ही पृष्ठो पर प्रकाशित हुई थी।

परिशिष्ट ग

प्रथम 50 विषम प्राकृतिक संख्याओं की पहली छः घातों के योग

निम्न सारणी $M_o=1$ से $M_o=50$ तक की पहली M_o विषम प्राकृतिक संख्याओं की पहली छः घातों के योगों को प्रकट करती है। ध्यान दीजिए कि जब $M_o=2$, तब विषम प्राकृतिक संख्याएँ 1 तथा 3 होती हैं, जब $M_o=3$, तब 1, 3, तथा 5 की ओर संकेत होता है, जब $M_o=4$, तब 1, 3, 5, तथा 7 अभिप्रेत होते हैं; और इसी तरह

उच्चतम विषम प्राकृतिक म०	M_o	$\sum^{M_o} X_o$	$\sum^{M_o} X_o^2$	$\sum_1^{M_o} X_o^3$	$\sum_1^{M_o} X_o^4$	$\sum_1^{M_o} X_o^5$	$\sum_1^{M_o} X_o^6$
1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	4	10	28	82	244	730
5	3	9	35	153	707	3 309	16 355
7	4	16	84	496	3 108	20 176	134 004
9	5	25	165	1 225	9 669	79 225	665 445
11	6	36	286	2 556	24 310	240 276	2 437 006
13	7	49	455	4 753	52 871	611 569	7 263 815
15	8	64	680	8 128	103 496	1 370 944	18 654 440
17	9	81	969	13 041	187 017	2 790 801	42 792 009
19	10	100	1 330	19 900	317 338	5 266 900	89 837 890
21	11	121	1 771	29 161	511 819	9 351 001	175 604 011
23	12	144	2 300	41 378	91 660	15 787 344	323 659 900
25	13	1 9	2 925	56 953	1 182 785	25 552 969	567 780 525
7	14	196	3 654	76 636	1 713 726	39 901 876	955 201 014
29	15	225	4 495	101 025	2 421 007	60 413 025	1 550 024 335
31	16	256	5 456	130 816	3 344 528	89 042 1 6	2 437 524 016
33	17	289	6 545	166 53	4 530 449	128 1 7 569	3 728 995 985
35	18	324	7 7 0	209 628	6 031 074	180 699 444	5 567 201 610
37	19	361	9 139	260 281	7 905 235	250 043 401	8 137 988 019
39	20	400	10 660	319 600	10 218 6 6	340 267 600	11 651 731 80
41	21	441	12 341	388 521	13 044 437	456 123 801	16 401 836 071
43	22	484	14 190	468 078	16 463 238	603 132 244	22 723 199 0 0
45	23	529	16 215	559 153	20 563 863	87 660 300	31 076 964 035
47	24	5 6	18 424	662 9 6	25 443 544	1 017 005 3 6	41 506 180 074
49	25	625	20 825	780 675	31 208 345	1 299 480 625	55 647 467 225
51	26	676	23 426	913 276	37 973 546	1 644 505 8 6	73 243 755 026
53	27	729	26 2 5	1 062 153	45 864 027	2 062 701 369	95 408 116 155
55	28	784	29 2 0	1 228 578	55 014 652	2 555 955 744	123 088 756 780
57	29	841	32 509	1 413 721	65 5 0 653	3 167 677 801	157 385 204 079
59	30	900	35 990	1 619 100	7 658 014	3 882 602 100	199 555 737 6 6
61	31	9 1	39 711	1 846 081	91 533 855	4 727 198 401	251 096 112 031
63	32	1 0 4	43 680	2 096 178	107 286 816	5 719 634 944	313 609 614 240
65	33	1 089	47 905	2 370 753	125 1 7 441	6 8 9 975 569	389 078 504 865
67	34	1 1	52 391	2 671 516	115 288 562	9 230 050 676	4 9 186 857 034
69	35	1 2 5	57 155	3 000 075	167 955 683	9 794 082 075	587 405 050 115
71	36	1 296	62 196	3 357 936	193 367 364	11 598 311 376	715 505 334 036
73	37	1 369	67 5 5	3 746 053	271 765 605	13 671 382 969	866 563 569 325
75	38	1 444	73 150	4 168 828	253 406 230	16 044 479 844	1 044 818 0 5 950
77	39	1 521	79 0 9	4 625 361	288 559 271	18 751 214 001	1 253 240 450 039
79	40	1 600	85 320	5 118 400	327 509 352	21 828 270 400	1 496 327 911 560
81	41	1 681	91 881	5 649 841	370 556 073	25 315 054 801	1 778 757 448 041
83	42	1 764	98 770	6 221 628	418 014 394	29 254 095 444	2 105 607 821 410
85	43	1 849	105 995	6 835 753	470 215 019	33 691 148 569	2 482 847 337 035
87	44	1 936	113 564	7 494 256	527 504 780	38 675 357 776	2 916 473 538 044
89	45	2 025	1 1 485	8 199 225	590 217 021	44 259 417 225	3 413 454 629 005
91	46	2 116	129 766	8 952 796	658 821 982	50 499 738 676	3 981 324 081 046
93	47	2 209	138 415	9 757 153	733 677 193	57 456 622 369	4 628 314 204 495
95	48	2 304	147 440	10 614 528	815 077 808	65 194 431 744	5 363 406 155 120
97	49	2 401	156 849	11 527 201	903 607 089	73 781 772 001	6 196 378 160 049
99	50	2 500	166 650	12 497 500	999 666 690	83 291 672 500	7 137 858 309 450

आगे भी समझना चाहिए। सुविधा के लिए यह सारणी उच्चतम विषम प्राकृतिक सख्या तथा M_o दोनो को ही प्रकट करती है। यहाँ दिखाये हुए योग लगभग केवल उन काल श्रेणी पर उपनति रेखा का आसजित करने के सम्बन्ध में काम मे लाये जाएँगे, जिस श्रेणी मे वर्षों (या दूसरे कालो) की सम सख्या है और जहाँ मूल बिन्दु दो केन्द्र X मानो के बीच लिया गया है। इन परिस्थितियो के अन्तर्गत (1) परिकलन सारणी मे दिखाया हुआ सबसे बडा X मान उच्चतम विषम प्राकृतिक सख्या है और M_o = (उच्चतम विषम प्राकृतिक सख्या+1)−2, (2) सारणी से पढे हुए योगो को 2 से अवश्य गुणा करना चाहिए; तथा (3) N जैसा कि वह प्रसामान्य समीकरणो मे काम मे लाया गया है, $2M_o$ है। X_o का अभिप्राय है 'X का विषम मान"।

पहली M_o विषम प्राकृतिक सख्याओ की पहली छ घातो के योग निम्न व्यजको से प्राप्त किये जा सकते हैं

$$\sum_{1}^{M_o} X_o = M_o^2 \qquad \sum_{1}^{M_o} X_o^4 = \left(\frac{12M_o^2 - 7}{5}\right)\sum_{1}^{M_o} X_o^2$$

$$\sum_{1}^{M_o} X_o^2 = \frac{4M_o^3 - M_o}{3} \qquad \sum_{1}^{M_o} X_o^5 = \left(\frac{16M_o^4 - 20M_o^2 + 7}{3}\right)\sum_{1}^{M_o} X_o$$

$$\sum_{1}^{M_o} X_o^3 = (2M_o^2 - 1)\sum_{1}^{M_o} X_o \qquad \sum_{1}^{M_o} X_o^6 = \left(\frac{48M_o^4 - 72M_o^2 + 31}{7}\right)\sum_{1}^{M_o} X_o^2$$

पहली 100 विषम प्राकृतिक सख्याओ की पहली छ घातो के योगो की सारणी जर्नल ऑफ दि अमरिकन स्टैटिस्टिकल एसोसिएशन मार्च 1925 पृष्ठ 75—79 पर प्रकाशित फ्रैंक ए० रोस द्वारा लिखित 'फार्मूला फॉर फैसीलिटेटिंग कॉम्पुटेशन्स इन टाइम सीरीज अनैलिसिस" मे दी गई है।

परिशिष्ट घ
प्रसामान्य वक्र की कोटियाँ

$\bar{X}$ से $\frac{x}{s}$ दूरियों पर स्थापित महत्तम कोटि Y_0 की दशमलव भिन्नों के रूप मे प्रस्तुत

महत्तम कोटि का निम्न व्यजक से परिकलन किया जाता है

$$Y_0 = \frac{Ni}{s\sqrt{2\pi}} = \frac{Ni}{2\ 5066s}$$

नीचे सारणी मे दिय हुए मान $e^{\frac{-x^2}{2s^2}}$ व्यजक को हल करने से प्राप्त होते हैं।

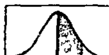
X अक्ष पर किसी प्रदत्त मान पर प्रस्थापित की जाने वाली कोटि की आनुपातिक ऊँचाई, x (माध्य से दिये हुए मान का विचलन) का निर्धारण करके तथा $\frac{x}{s}$ का परिकलन करके, सारणी स पढी जा सकती है। इस प्रकार यदि $\bar{X} = 25\ 00$ डालर $s = 4\ 00$ डालर $Y_0 = 1950$ और 23 00 डालर पर खडी की जाने वाली कोटि की ऊँचाई निश्चित करना वांछनीय है तो $x = 2\ 00$ डालर और $\frac{x}{s} = \frac{2\ 00 \text{ डालर}}{4\ 00 \text{ डालर}} = 0\ 50$। सारणी स कोटि महत्तम कोटि Y_0 की 0 88250, या 0 88250 × 1950 = 1721 पता चलती है।

परिशिष्ट ङ

प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्र

समान्तर माध्य से $\frac{x}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$ दूरियों* तक उस समान्तर माध्य से, जिसे कुल क्षेत्र 1.0000 के दशमलव भिन्नों के रूप मे प्रकट किया गया है

यह सारणी काला क्षेत्र दर्शाती है.



$\frac{x}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0 0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0 1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0 2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0 3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0 4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0 5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0 6	2257	2291	.2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0 7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0 8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	.3133
0 9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	.3340	3365	.3389
1 0	3413	3438	3461	3485	.3508	.3531	.3554	3577	3599	.3621
1 1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	37 0	3790	.3810	3830
1 2	.3849	3869	3888	3907	3925	3944	.3962	3980	.3997	4015
1 3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1 4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1 5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1 6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1 7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1 8	4641	4649	4656	4664	4671	46 8	4686	4693	4699	4706
1 9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2 0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2 1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2 2	4861	4864	4868	4871	48 5	4878	4881	4884	4887	4890
2 3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2 4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2 5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2 6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2 7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2 8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	49 9	4980	4981
2 9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3 0	49865	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3 1	49903	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3 2	4993129									
3 3	4995166									
3 4	4996631									
3 5	4997674									
3 6	4998409									
3 7	4998922									
3 8	4999277									
3 9	4999519									
4 0	4999683									
4 5	4999966									
5 0	4999997133									

* $\frac{x}{s}$ व्यंजक प्रसामान्य वक्र आसंजित करते समय काम में लाया जाता है, $\frac{x}{\sigma}$ तब काम मे लाया जाता है, जब सार्थकता की वह परीक्षा की जा रही हो, जिसमे समष्टि तथा प्रसामान्य वक्र का मानक विचलन अर्न्तनिहित है।

यह सारणी मुख्यत प्रकाशकों, हाफटन मिफ़लिन कम्पनी के साथ प्रबन्ध से, रग के स्टैटिस्टिकल मैथड्स एप्लाइड टु एजूकेशन से (शोधन करके) ली गई है। प्रसामान्य वक्र क्षेत्रों की एक अधिक विस्तृत सारणी जो समान्तर माध्य से दो दिशाओं में है, फैडरल वर्क्स एजेंसी, वर्क प्रोजेक्ट्स ऐडमिनिस्ट्रेशन फॉर दि सिटी ऑफ न्यूयार्क, टेबल्स ऑफ प्रोबेबिलिटी फक्शस, नेशनल ब्यूरो ऑफ स्टैंडर्ड्स, न्यूयार्क, 1942, खण्ड 2, पृष्ठ 2—338 पर दी गई है।

परिशिष्ट च

$F\left(\frac{x}{s}\right)$ के मान

इस प्रकार के वक्रों को आसजित करने मे प्रयोग के लिए

$$Y_c = \frac{N_1}{s\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2s^2}} - \left\{\frac{N_1}{s\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2s^2}} \left[\frac{\alpha_3}{2}\left(\frac{x}{s} - \frac{x^3}{3s^3}\right)\right]\right\} = \frac{N_1}{s\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2s^2}} \left[1 - \frac{\alpha_3}{2}\left(\frac{x}{s} - \frac{x^3}{3s^3}\right)\right]$$

$\frac{x}{s}$	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0	00000	00001	00004	00009	00016	00025	00036	00049	00064	00081
1	00100	001 0	00144	00167	00194	0022	00 53	00 55	00419	00355
2	00397	001 2	00 3	00516	[illegible]	00607	00656	00 64	007	00510
3	00865	00971	00079	01038	01099	01161	01 5	01290	01356	01171
4	01433	01504	01635	01 08	01 52	01855	01943	02011	02059	0 168
5	02249	02329	02411	02494	025 3	02622	02748	02833	02970	03007
6	03095	03184	03279	03361	03440	03510	03631	03 21	03512	03904
7	03995	04085	041 8	04270	04362	04153	04545	04037	04729	04820
8	04911	05002	05093	05193	05274	05363	05453	05542	05631	05719
9	05806	05894	05980	06066	06152	06239	06320	06401	06456	[illegible]
1 0	06649	06729	06809	06887	06965	07042	07118	07193	07267	07340
1 1	07412	07483	07552	0 621	0 689	07756	0 827	07886	07950	08012
1 2	08073	08133	08197	08250	08306	08361	08416	08468	085 0	08571
1 3	08620	08668	08 15	08760	08805	08848	08890	08930	089 0	09009
1 4	09045	09080	09116	09148	09180	09211	09241	09 69	09296	09322
1 5	09347	09371	09394	09415	09435	09454	09472	09489	09505	09519
1 6	09533	09545	09557	09567	09577	09585	09592	09599	09604	09608
1 7	09612	09614	09616	09616	09616	09615	09613	09610	09606	09602
1 8	09597	09590	09584	09576	09568	09559	09549	09539	09527	09516
1 9	09503	09490	091 7	09463	09 48	09433	09417	09401	09384	09366
2 0	09349	09330	09312	09293	09273	09253	09233	09213	09192	091 0
2 1	09149	09127	09105	09082	09060	090 7	09014	08991	08967	08943
2 2	08919	08895	08 1	08847	08823	08798	08 4	08 49	08774	08699
2 3	08674	08650	086 5	08600	085 5	08550	08525	08500	084 5	08450
2 4	08426	08401	083 6	08352	08377	08306	08 9	08255	08231	08207
2 5	08183	08 59	08136	08112	08089	08066	08043	08020	07998	07975
2 6	07953	0 9	0 900	07888	07866	0 845	07824	0 803	07782	0 62
2 7	07742	0 7	07702	07682	07663	07644	07625	07606	07588	0 569
2 8	0 551	0 534	0 51	07499	07482	07465	0 448	07432	0 416	0 400
2 9	07384	0 369	07354	07339	07324	07309	07295	07281	07267	07254
3 0	0 240									
3 1	0 115									
3 2	07016									
3 3	06933									
3 4	06866									
3 5	06813									
3 6	06771									
3 7	06739									
3 8	06714									
3 9	06696									
4 0	06653									

यह सारणी डी वैन नास्ट्रैंड कम्पनी इन्कार्पोरेटिड तथा बेल टेलीफोन लैबोरेट्रीज के सौजन्य से डब्ल्यू० ए० श्यूहार्ट, ईकानॉमिक कन्ट्रोल ऑफ क्वालिटी ऑफ मैन्यूफैक्चर्ड प्रॉडक्ट, डी० वैन नास्ट्रैंड कम्पनी, प्रिन्स्टन, एन० जे०, 1931, पृष्ठ 91 से ली गई है।

ऊपर दिखाये गए परिसर से परे $F_2\left(\frac{x}{s}\right)$ के मानो के लिए निम्न व्यंजक काम मे लाइये

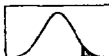
$$F_2\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{x}{s}\right)^2\right] e^{\frac{-x^2}{2s^2}}\right\} = \frac{1}{15\,036}\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{x}{s}\right)^2\right] e^{\frac{-x^2}{2s^2}}\right\}$$

$e^{\frac{-x^2}{2s^2}}$ के मान सुविधापूर्वक परिशिष्ट घ मे दी हुई प्रसामान्य वक्र की कोटियो की सारणी मे या ई० एस० पियर्सन तथा एच० ओ० हार्टले बायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स खण्ड I कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लदन, 1954, पृष्ठ 104—110 पर तथा कार्ल पियर्सन, टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स एन्ड बायामीट्रीशियन्स तृतीय सस्करण, भाग I, यूनिवर्सिटी प्रेस, लदन 1948 पृष्ठ 2—8 मे दी हुई अधिक विस्तृत सारणी मे पढ़े जा सकते हैं। पिछली दो सारणियो में दिखाये हुए Z के मानो को जब 2·5066 से गुणा किया जाता है तो फल $e^{\frac{-x^2}{2s^2}}$ ...

परिशिष्ट छ

समान्तर माध्य से $\frac{x}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$ के चुने हुए मानो* पर निर्मित प्रसामान्य वक्र के एक सिरे में विद्यमान क्षेत्र

यह सारणी काला क्षेत्र दिखलाती है



अथवा



$\frac{x}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$	00	01	02	03	04	05	.06	07	08	09
0 0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0 1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
0 2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0 3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0 4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0 5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0 6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0 7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0 8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0 9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1 0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1 1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1 2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1 3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1 4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1 5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1 6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1 7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1 8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1 9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2 0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2 1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2 2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2 3	0107	0104	0102	00990	00964	00939	00914	00889	00866	00842
2 4	00820	00798	00776	00755	00734	00714	00695	00676	00657	00639
2 5	00621	00604	00587	00570	00554	00539	00523	00508	00494	00480
2 6	00466	00453	00440	00427	00415	00402	00391	00379	00368	00357
2 7	00347	00336	00326	00317	00307	00298	00289	00280	00272	00264
2 8	00256	00248	00240	00233	00226	00219	00212	00205	00199	00193
2 9	00187	00131	00175	00169	00164	00159	00154	00149	00144	00139

$\frac{x}{s}$ or $\frac{x}{\sigma}$	0	1	2	.3	4	5	6	7	.8	.9
3	00135	$0^{3}968$	$0^{3}687$	$0^{3}483$	$0^{3}337$	$0^{3}233$	$0^{3}159$	$0^{3}108$	$0^{4}723$	$0^{4}481$
4	$0^{4}317$	$0^{4}207$	$0^{4}133$	$0^{5}854$	$0^{5}541$	$0^{5}340$	$0^{5}211$	$0^{5}130$	$0^{6}793$	$0^{6}479$
5	$0^{6}287$	$0^{6}170$	0 996	0 579	$0^{7}333$	$0^{7}190$	$0^{7}107$	$0^{8}599$	$0^{8}332$	$0^{8}182$
6	$0^{9}987$	$0^{9}530$	$0^{9}282$	$0^{9}149$	$0^{10}777$	$0^{10}402$	$0^{10}206$	$0^{10}104$	$0^{11}523$	$0^{11}260$

*परिशिष्ट क की पाद टिप्पणी देखिए।

यह सारणी टेबल्स ऑफ एरियाज इन टू टेल्स एन्ड इन वन टेल ऑफ दि नार्मल कर्व, लेखक फ्रेड्रिक ई० क्राक्स्टन से ली गई है। इस पुस्तक का प्रतिलिप्यधिकार, 1949, प्रैन्टिस हॉल, इन्कार्पोरेटिड की अनुज्ञा से है।

परिशिष्ट ज

समान्तर माध्य से $\frac{x}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$ के चुने हुए मानो* पर निर्मित प्रसामान्य वक्र के दोनो सिरो में विद्यमान क्षेत्र

यह सारणी काले क्षेत्रो को दिखलाती है



$\frac{x}{s}$ या $\frac{x}{\sigma}$	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0 0	1 0000	9920	9840	9761	9681	9601	9522	9442	9362	9283
0 1	9203	9124	9045	8 66	8887	8808	8729	8650	8572	8493
0 2	8415	8337	8259	8181	8103	8026	7949	7872	7795	7718
0 3	7642	7566	7490	7414	7339	7263	7188	7114	7039	6965
0 4	6892	6818	6745	6672	6599	6527	6455	6384	6312	6241
0 5	6171	6101	6031	5961	5892	5823	5755	5687	5619	5552
0 6	5485	5419	5353	5287	5222	5157	5093	5029	4965	4902
0 7	4839	4777	4715	4654	4593	4533	4473	4413	4354	4295
0 8	4237	4179	4122	4065	4009	3953	3898	3843	3789	3735
0 9	3681	3628	3576	3524	3472	3421	3371	3320	3271	3222
1 0	3173	3125	3077	3030	2983	2937	2891	2846	2801	2757
1 1	2713	2670	2627	2585	2543	2501	2460	2420	2380	2340
1 2	2301	2263	2225	2187	2150	2113	2077	2041	2005	1971
1 3	1936	1902	1868	1835	1802	1770	1738	1707	1676	1645
1 4	1615	1585	1556	1527	1499	1471	1443	1416	1389	1362
1 5	1336	1310	1285	1260	1236	1211	1188	1164	1141	1118
1 6	1096	1074	1052	1031	1010	0989	0969	0949	0930	0910
1 7	0891	0873	0854	0836	0819	0801	0784	0767	0751	0735
1 8	0719	0703	0688	0672	0658	0643	0629	0615	0601	0588
1 9	0574	0561	0549	0536	0524	0512	0500	0488	0477	0466
2 0	0455	0444	0434	0124	0414	0404	0394	0385	0375	0366
2 1	0357	0349	0340	0332	0324	0316	0308	0300	0293	0285
2 2	0278	0271	0264	0257	0251	0244	0238	0232	0226	0220
2 3	0214	0209	0203	0198	0193	0188	0183	0178	0173	0168
2 4	0164	0160	0155	0151	0147	0143	0139	0135	0131	0128
2 5	0124	0121	0117	0114	0111	0108	0105	0102	00988	00960
2 6	00932	00905	00879	00854	00829	00805	00781	00759	00736	00715
2 7	00693	00673	00653	00633	00614	00596	00578	00561	00544	00527
2 8	00511	00495	00480	00465	00451	00437	00424	00410	00398	00385
2 9	00373	00361	00350	00339	00328	00318	00308	00298	00288	00279

$\frac{x}{s}$ or $\frac{x}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	00270	00194	00137	$0^{3}967$	$0^{3}674$	$0^{3}465$	$0^{3}318$	$0^{3}216$	$0^{3}145$	$0^{4}962$
4	$0^{4}633$	$0^{4}413$	$0^{4}267$	$0^{4}171$	$0^{4}108$	$0^{5}680$	$0^{5}422$	$0^{5}260$	$0^{5}159$	$0^{6}958$
5	$0^{6}573$	$0^{6}340$	$0^{6}199$	$0^{6}116$	$0^{7}666$	$0^{7}380$	$0^{7}214$	$0^{7}120$	$0^{8}663$	$0^{8}364$
6	$0^{8}197$	$0^{8}106$	$0^{9}565$	$0^{9}298$	$0^{9}155$	$0^{10}803$	$0^{10}411$	$0^{10}208$	$0^{10}105$	$0^{11}520$

*परिशिष्ट ङ की पाद टिप्पणी देखिये।

यह सारणी टेबल्स ऑफ एरियाज इन टू टेल्स एन्ड इन वन टल ऑफ दि नार्मल कर्व, लेखक फ्रैड्रिक ई० क्रावस्टन से ली गई है। इस पुस्तक का प्रतिलिप्यधिकार, 1949, प्रेन्टिस हॉल, इन्कारपोरेटिड की अनुज्ञा से है।

t के

स्वातन्त्र्य कोटियों (*n*) के लिए तथा

यह सारणी काले क्षेत्र

n	सार्थकता (*P*) का स्तर							
	90	80	70	60	50	40	30	25
1	158	325	510	727	1 000	1 376	1 963	2 414
2	142	289	445	617	816	1 061	1 386	1 604
3	137	277	424	584	765	978	1 250	1 423
4	134	271	414	569	741	941	1 190	1 344
5	132	267	408	559	727	920	1 156	1 301
6	131	265	404	553	718	906	1 134	1 273
7	130	263	402	549	711	896	1 119	1 254
8	130	262	399	546	706	889	1 108	1 240
9	129	261	398	543	703	883	1 100	1 230
10	129	260	397	542	700	879	1 093	1 221
11	129	260	396	540	697	876	1 088	1 214
12	128	259	395	539	695	873	1 083	1 209
13	128	259	394	538	694	870	1 079	1 204
14	128	258	393	537	692	868	1 076	1 200
15	128	258	393	536	691	866	1 074	1 197
16	128	258	392	535	690	865	1 071	1 194
17	128	257	392	534	689	863	1 069	1 191
18	127	257	392	534	688	862	1 067	1 189
19	127	257	391	533	688	861	1 066	1 187
20	127	257	391	533	687	860	1 064	1 185
21	127	257	391	532	686	859	1 063	1 183
22	127	256	390	532	686	858	1 061	1 182
23	127	256	390	532	685	858	1 060	1 180
24	127	256	390	531	685	857	1 059	1 179
25	127	256	390	531	684	856	1 058	1 178
26	127	256	390	531	684	856	1 058	1 177
27	127	256	389	531	684	855	1 057	1 176
28	127	256	389	530	683	855	1 056	1 175
29	127	256	389	530	683	854	1 055	1 174
30	127	256	389	530	683	854	1 055	1 173
40	126	255	388	529	681	851	1 050	1 167
60	126	254	387	527	679	848	1 046	1 162
120	126	254	386	526	677	845	1 041	1 156
∞	126	253	385	524	674	842	1 036	1 150

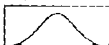
इस सारणी के मान आर० ए० फिशर तथा एफ० येट्स द्वारा लिखित तथा आलिवर एंड बायड, एडिनबरा, द्वारा प्रकाशित *स्टैटिस्टिकल टबल्स फॉर बायोलॉजिकल एग्रीकल्चरल एण्ड मैडिकल रिसर्च* से तथा *बायोमीट्रिका* खण्ड XXXII अप्रैल 1942 पृष्ठ 300 पर सकलित तथा मैक्सिन मेरिग्टन द्वारा लिखित टबल आफ परसैंटेज प्वायटस ऑफ दि टी डिस्ट्रीब्यूशन से अनुज्ञा लेकर लिये गए हैं।

झ

मान

सार्थकता (p) के निर्दिष्ट स्तरों पर

दर्शाती है



सार्थकता (P) का स्तर								
20	10	05	025	02	01	005	001	n
3 078	6 314	12 706	25 452	31 821	63 657	127 32	636 619	1
1 886	2 920	4 303	6 205	6 965	9 925	14 089	31 598	2
1 638	2 353	3 182	4 176	4 541	5 841	7 453	12 941	3
1 533	2 132	2 776	3 495	3 747	4 604	5 598	8 610	4
1 476	2 015	2 571	3 163	3 365	4 032	4 773	6 859	5
1 440	1 943	2 447	2 969	3 143	3 707	4 317	5 959	6
1 415	1 895	2 365	2 841	2 998	3 499	4 029	5 405	7
1 397	1 860	2 306	2 752	2 896	3 355	3 832	5 041	8
1 383	1 833	2 262	2 685	2 821	3 250	3 690	4 781	9
1 372	1 812	2 228	2 634	2 764	3 169	3 581	4 587	10
1 363	1 796	2 201	2 593	2 718	3 106	3 497	4 437	11
1 356	1 782	2 179	2 560	2 681	3 055	3 428	4 318	12
1 350	1 771	2 160	2 533	2 650	3 012	3 372	4 221	13
1 345	1 761	2 145	2 510	2 624	2 977	3 326	4 140	14
1 341	1 753	2 131	2 490	2 602	2 947	3 286	4 073	15
1 337	1 746	2 120	2 473	2 583	2 921	3 252	4 015	16
1 333	1 740	2 110	2 458	2 567	2 898	3 222	3 965	17
1 330	1 734	2 101	2 445	2 552	2 878	3 197	3 922	18
1 328	1 729	2 093	2 433	2 539	2 861	3 174	3 883	19
1 325	1 725	2 086	2 423	2 528	2 845	3 153	3 850	20
1 323	1 721	2 080	2 414	2 518	2 831	3 135	3 819	21
1 321	1 717	2 074	2 406	2 508	2 819	3 119	3 792	22
1 319	1 714	2 069	2 398	2 500	2 807	3 104	3 767	23
1 318	1 711	2 064	2 391	2 492	2 797	3 090	3 745	24
1 316	1 708	2 060	2 385	2 485	2 787	3 078	3 725	25
1 315	1 706	2 056	2 379	2 479	2 779	3 067	3 707	26
1 314	1 703	2 052	2 373	2 473	2 771	3 056	3 690	27
1 313	1 701	2 048	2 368	2 467	2 763	3 047	3 674	28
1 311	1 699	2 045	2 364	2 462	2 756	3 038	3 659	29
1 310	1 697	2 042	2 360	2 457	2 750	3 030	3 646	30
1 303	1 684	2 021	2 329	2 423	2 704	2 971	3 551	40
1 296	1 671	2 000	2 299	2 390	2 660	2 915	3 460	60
1 289	1 658	1 980	2 270	2 358	2 617	2 860	3 373	120
1 282	1 645	1 960	2 241	2 326	2 576	2 807	3 291	∞

व्यवस्था में परिशिष्ट झ की सारणी जैसी और माध्य से t तक (एक दिशा में) और n=1 से n=20 तक के लिए t बंटन के क्षेत्रों को बताने वाली t की सारणी मेट्रन, खण्ड V अंक 3 (1925), में पृष्ठ 114—118 पर संकलित "छात्र" द्वारा लिखित 'न्यू टेबल्स फार टैस्टिंग दि सिग्निफिकेन्स ऑफ ऑब्जर्वेशन्स' में मिल सकती है।

परिशिष्ट

χ^2 के

प्रदत्त स्वातन्त्र्य कोटियों

यह सारणी काला
क्षेत्र दर्शाती है



$n=1$ तथा $n=2$ के लिए

n	*P* का मान										
	999	995	99	98	975	95	90	80	75	70	50
1	0 157	0 393	0³157	0 628	0⁴982	00393	0158	0642	102	148	455
2	00200	0100	0201	0404	0 06	103	211	446	575	713	1 386
3	0243	0717	115	185	216	352	584	1 005	1 213	1 424	2 366
4	0908	207	297	429	484	711	1 064	1 649	1 923	2 195	3 357
5	210	412	554	752	831	1 145	1 610	2 343	2 675	3 000	4 35
6	381	676	872	1 134	1 237	1 635	2 204	3 070	3 455	3 828	5 348
7	598	989	1 239	1 564	1 690	2 167	2 833	3 8??	4 255	4 671	6 346
8	857	1 344	1 646	2 032	2 180	2 733	3 490	4 594	5 071	5 527	7 344
9	1 15?	1 735	2 088	2 532	2 700	3 325	4 168	5 380	5 893	6 393	8 343
10	1 47?	2 156	2 558	3 059	3 247	3 940	4 865	6 179	6 737	7 267	9 342
11	1 834	2 603	3 053	3 609	3 810	4 575	5 578	6 98?	7 584	8 148	10 341
12	2 214	3 074	3 571	4 1 8	4 404	5 226	6 304	7 807	8 438	9 034	11 340
13	2 617	3 565	4 107	4 765	5 009	5 892	7 04?	8 634	9 299	9 9?6	12 340
14	3 041	4 075	4 660	5 368	5 629	6 571	7 790	9 467	10 165	10 821	13 339
15	3 483	4 601	5 229	5 985	6 262	261	8 547	10 307	11 036	11 721	14 339
16	3 942	5 142	5 812	6 614	6 908	- 962	9 312	11 152	11 912	12 624	15 338
17	4 416	5 697	6 408	7 255	7 564	8 672	10 085	12 002	12 792	13 531	16 338
18	4 905	6 265	7 015	7 906	8 231	9 390	10 865	1? 857	13 675	14 440	17 338
19	5 407	6 844	7 633	8 567	8 907	10 117	11 651	13 716	14 562	1 35?	18 338
20	5 921	7 434	8 260	9 237	9 591	10 851	12 443	14 578	15 452	16 266	19 337
21	6 447	8 034	8 897	9 915	10 ?83	11 591	13 240	15 445	16 344	17 182	20 337
22	6 983	8 643	9 542	10 600	10 982	12 338	14 041	16 314	1 240	18 101	21 337
23	7 529	9 260	10 196	11 293	11 688	13 091	14 848	17 187	18 137	19 021	22 337
24	8 085	9 886	10 856	11 99?	12 401	13 848	15 659	18 06?	19 037	19 943	23 337
25	8 649	10 520	11 24	12 697	13 120	14 611	16 473	18 940	19 939	0 867	24 337
26	9 222	11 160	12 198	13 409	13 844	15 379	17 292	19 820	20 843	21 79?	25 336
27	9 803	11 808	12 879	14 125	14 73	16 1 1	18 114	20 703	21 749	2? 719	26 336
28	10 391	1? 461	13 65	14 847	15 308	16 928	18 939	21 88	22 657	23 647	27 336
29	10 986	13 121	14 2 6	15 74	16 047	1 708	19 768	22 475	23 56	4 577	28 336
30	11 588	13 787	14 9 3	16 306	16 791	18 493	20 599	23 364	24 478	508	29 336

$n>30$ के मानो के लिए, χ^2 के सन्निकट मान निम्न व्यंजक से प्राप्त किय जा सकते हैं

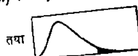
$$n\left[1-\frac{2}{9n}\pm\frac{x}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{9n}}\right]^3,$$

जिसमे $\frac{x}{\sigma}$ प्रसामान्य विचलन है जो प्रमामान्य बटन के सगत सिरा को काटता है। यदि $\frac{x}{\sigma}$ को 0 02 स्तर पर इस प्रकार लिया जाता है कि प्रत्यक सिरे मे प्रसामान्य बटन का 0 01 है, तो व्यजक 0 99 तथा 0 01 बिन्दुओ पर χ^2 परिणाम दर्शाता है। n के बहुत बड माना के लिए $\sqrt{2\chi^2}$ का परिकलन करना पर्याप्त ठीक है जिसका बटन $\sqrt{2n-1}$ के माध्य के आसपास और 1 के मानक विचलन के साथ सन्निकट रूप से प्रसामान्य है।

अ

मान

(*n*) के लिए तथा *P* के निर्दिष्ट मानो के लिए

तथा 

$n \geqq 3$ के लिए

	P का मान									
.30	.25	.20	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.001	*n*
1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827	1
2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	13.815	2
3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.268	3
4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	18.465	4
6.064	6.626	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388	15.086	16.750	20.517	5
7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457	6
8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.322	7
9.524	10.219	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	26.125	8
10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877	9
11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588	10
12.899	13.701	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	31.264	11
14.011	14.845	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	32.909	12
15.119	15.984	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	34.528	13
16.222	17.117	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	36.123	14
17.322	18.245	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	37.697	15
18.418	19.369	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	39.252	16
19.511	20.489	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	40.790	17
20.601	21.605	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	42.312	18
21.689	22.718	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	43.820	19
22.775	23.828	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	45.315	20
23.858	24.935	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	46.797	21
24.939	26.039	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	48.268	22
26.018	27.141	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	49.728	23
27.096	28.241	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.558	51.179	24
28.172	29.339	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	52.620	25
29.246	30.434	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290	54.052	26
30.319	31.528	32.912	36.741	40.113	43.194	44.140	46.963	49.645	55.476	27
31.391	32.620	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	56.893	28
32.461	33.711	35.139	39.087	[illegible]	45.722	46.693	49.588	52.336	58.302	29
33.530	34.800	[illegible]	[illegible]	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	59.703	30

यह सारणी आर० ए० फिशर तथा एफ० येट्स द्वारा लिखित तथा ऑलिवर एण्ड बॉयड, एडिनबरा द्वारा प्रकाशित स्टैटिस्टिकल टेबल्स फॉर बायलॉजिकल, एग्रीकल्चरल, एण्ड मेडिकल रिसर्च की सारणी IV से, बायोमीट्रिका, खंड 32, मे सकलित कैथेरिन एम० थॉम्पसन द्वारा लिखित "टेबल ऑफ परसेंटेज प्वायंटस ऑफ दि χ^2 डिस्ट्रिब्यूशन', पृष्ठ 187—191 से, तथा बायोमीट्रिका खण्ड 40 में सकलित तथा टी० लुइस द्वारा लिखित "99.9 एन्ड 0.1 % प्वायंट्स ऑफ दि χ^2 डिस्ट्रिब्यूशन", पृष्ठ 421 से स्वीकृति लेकर, ली गई है। मिस थॉम्पसन की सारणी मे दिखाए हुए मान (और 0.001 बिन्दु पर के मान भी) ई० एस० पियर्सन तथा एच० ओ० हार्टले, बायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स खण्ड 1, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लदन, 1954, पृष्ठ 130—131 पर भी मिल सकते हैं।

परिशिष्ट

$\hat{\sigma}^2$ की प्रतिदर्शी सीमाओं का निर्धारण करने

यह सारणी काले
क्षेत्र दर्शाती है



n	निचले बिन्दु							50
	001	005	01	025	05	10	25	
1	0157	0 3927	0⁴1571	0⁹9821	003932	01579	1015	4549
2	001000	005013	01005	0^532	05129	1054	2877	6931
3	008099	02391	03828	07193	1173	1948	4042	7887
4	02270	05175	07428	1211	1777	26 9	4806	8392
5	04204	08235	1109	1662	2291	3221	5349	8703
6	06351	1126	1453	2062	2726	3674	5758	8914
7	08550	1413	1770	2414	3096	4047	6078	9065
8	1071	1681	2058	2725	3416	4362	6338	9180
9	1280	1928	2320	3000	3605	4631	6554	9270
10	1479	2156	2558	3247	3940	4865	6737	9342
11	1667	2367	2776	3469	41 9	5071	6895	9401
12	1845	2 62	2975	3670	43 5	5253	7032	9450
13	2013	2742	3159	38 3	4 32	5417	7153	9492
14	2172	2910	3329	4021	4693	5564	7261	9528
15	2322	3067	3486	4175	4841	5698	7359	9559
16	2464	3214	3633	4317	4976	5820	7445	9587
17	2598	33 1	3769	4450	5101	5932	7 25	9611
18	27 5	3480	3897	4573	5217	6036	7 97	9632
19	2846	3602	4017	4688	5325	6132	7664	9651
20	2961	3717	4130	4795	5425	6221	7726	9669
21	3070	3826	4237	4897	5520	6305	7783	9684
22	3174	3929	4337	4992	5608	6382	7836	9699
23	3274	40 6	4433	5082	5692	6456	7886	9712
24	3369	4119	4524	5167	5770	6524	7932	9724
25	3460	4208	4610	5248	5845	6589	7976	9735
26	3547	4292	4692	5325	5915	6651	8017	9745
27	3631	4373	4770	5398	5982	6709	80 5	9754
28	3711	44 0	4845	5467	6046	6764	8092	9763
29	3788	4525	4916	5 33	6106	6816	81 6	9771
30	3863	4 96	4984	5597	6164	6866	81 9	9779
40	4479	5177	5541	6108	6627	7263	8415	9834
50	493	5 98	5941	6471	6983	7539	8588	9867
60	290	59 2	6247	6747	7198	7743	8716	9889
70	5 77	6182	6492	6965	7391	7904	8814	9905
80	5815	6396	6632	7144	7549	8035	8893	9917
90	6017	6577	6862	7294	7681	8143	8958	9926
100	6192	6733	7006	7422	7793	8 36	9013	9933
∞	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000
$\frac{x}{\sigma}$*	−3 0902	−2 5758	−2 3263	−1 9600	−1 6449	−1 2816	− 6745	0

* When

*जब $n > 30$, तब $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma}$ के मान निम्न व्यंजक के प्रयोग से सन्निकट रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं

$$\left(\frac{9n-2+\frac{x}{\sigma}\sqrt{18n}}{9n}\right)^3,$$

ट

के प्रयोग के लिए $\frac{\sigma'}{\sigma}$ के मान

तथा 

उपरले बिन्दु							
25	10	05	025	01	005	001	n
1 323	2 706	3 841	5 024	6 635	7 879	10 827	1
1 366	2 303	2 996	3 689	4 605	5 298	6 908	2
1 369	2 084	2 605	3 116	3 782	4 279	5 423	3
1 346	1 945	2 372	2 786	3 319	3 715	4 616	4
1 325	1 847	2 214	2 566	3 017	3 350	4 103	5
1 307	1 774	2 099	2 408	2 802	3 091	3 743	6
1 291	1 717	2 010	2 288	2 639	2 897	3 475	7
1 277	1 670	1 938	2 192	2 511	2 744	3 066	8
1 265	1 632	1 880	2 114	2 407	2 621	3 097	9
1 255	1 599	1 831	2 048	2 321	2 519	2 959	10
1 246	1 570	1 789	1 993	2 248	2 432	2 842	11
1 237	1 546	1 752	1 945	2 185	2 358	2 743	12
1 230	1 524	1 720	1 903	2 130	2 294	2 656	13
1 223	1 505	1 692	1 866	2 082	2 237	2 580	14
1 216	1 487	1 666	1 833	2 039	2 187	2 513	15
1 211	1 471	1 644	1 803	2 000	2 142	2 453	16
1 205	1 457	1 623	1 776	1 965	2 101	2 399	17
1 200	1 444	1 604	1 751	1 934	2 064	2 351	18
1 196	1 432	1 586	1 729	1 905	2 031	2 306	19
1 191	1 421	1 571	1 708	1 879	2 000	2 266	20
1 187	1 410	1 556	1 689	1 854	1 971	2 278	21
1 184	1 401	1 542	1 672	1 831	1 945	2 191	22
1 180	1 392	1 529	1 655	1 810	1 921	2 169	23
1 177	1 383	1 517	1 640	1 791	1 898	2 139	24
1 174	1 375	1 506	1 626	1 773	1 877	2 105	25
1 171	1 368	1 496	1 612	1 755	1 857	2 079	26
1 168	1 361	1 486	1 600	1 739	1 839	2 055	27
1 165	1 354	1 476	1 588	1 724	1 821	2 032	28
1 162	1 318	1 467	1 577	1 710	1 805	2 010	29
1 160	1 342	1 459	1 566	1 696	1 789	1 990	30
1 140	1 295	1 394	1 484	1 592	1 669	1 835	40
1 127	1 263	1 350	1 428	1 523	1 590	1 733	50
1 116	1 240	1 318	1 388	1 473	1 533	1 660	60
1 108	1 222	1 293	1 357	1 435	1 489	1 605	70
1 102	1 207	1 273	1 333	1 404	1 454	1 560	80
1 096	1 195	1 257	1 313	1 379	1 426	1 525	90
1 091	1 185	1 243	1 296	1 358	1 402	1 494	100
1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	∞
+ 6745	+1 2816	+1 6449	+1 9600	+2 3263	+2 5758	+3 0902	$\frac{x_e}{\sigma}$

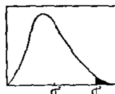
जिसमे $\frac{x}{\sigma}$ प्रसामान्य विचलन है जो प्रसामान्य बंटन के संगत सिर को काटती है। $\frac{\sigma'}{\sigma}$

इस सारणी में दिए हुए मान परिशिष्ट ज में उल्लिखित संदर्भों में दिए हुए χ^2 के मानों में $\frac{\sigma'}{\sigma}$ व्यंजक के प्रयोग से परिकलित किए गए हैं।

परिशिष्ट

$\frac{s}{\sigma}$ की प्रतिदर्शी सीमाओं का निर्धारण करने के प्रयोग

यह सारणी काले क्षेत्र दिखलाती है



n	निचली सीमाएँ 001	005	01	025	05	10	25	50
1	0924	1269	1507	1990	2603	3696	7557	2 398
2	1448	1887	2171	2711	3338	4343	7713	1 443
3	1844	2337	2644	3209	3839	4799	[illegible]	[illegible]
4	2166	2692	3013	3590	4216	5142	74 8	1 19
5	2437	2985	3314	3896	4517	5413	7546	1 149
6	2672	3235	3569	4159	4765	5637	7652	1 122
7	2878	3452	3769	4372	4976	587	7716	1 103
8	3067	3644	3987	4562	5159	5987	7879	1 089
9	3228	3815	4154	4731	5319	6129	7903	1 079
10	3380	3970	4309	4882	5462	6255	7969	1 070
11	3518	4111	4449	5018	5591	6368	8029	1 064
12	3646	4 40	4577	5142	5707	6469	8083	1 058
13	3765	4360	4695	5256	5813	6562	8133	1 054
14	3876	4470	4801	5360	5911	6646	8179	1 050
15	3979	4573	4900	5457	6001	6724	8221	1 046
16	4076	4669	5000	5547	6085	6796	8261	1 043
17	4168	4759	5088	5631	6162	6863	8297	1 041
18	42 4	4844	5172	5710	6235	69 6	8331	1 038
19	4336	4925	5250	5783	6303	6984	8363	1 036
20	4414	5000	5321	5853	6367	7039	8391	1 034
21	4487	5072	5394	5919	6428	7091	84	1 033
22	4558	5141	5460	5981	6485	7140	8449	1 031
23	4625	5 06	5574	6041	6 39	7186	84 4	1 030
24	4689	5268	5584	6097	6591	7230	8499	1 028
25	4751	5327	5642	6151	6640	7271	8 1	1 0 7
26	4810	5384	5697	6202	6686	7311	8543	1 026
27	4867	5439	5749	6251	6731	7349	8 1	1 0
28	4922	5491	5800	6298	6774	738	8 84	1 4
29	4974	5 47	5848	6343	6814	7419	8 03	1 3
30	5025	5 90	5895	6386	6854	745	8 1	1 023
40	5449	5991	6280	6741	7174	77 1	8 9	1 017
50	5770	6 90	6566	7001	7407	7 16	85	1 013
60	60 4	6 5	6759	7203	7587	806	8 8	1 011
70	6 32	6717	6970	7367	7 32	816	9 3	1 010
80	6408	68 8	7122	7503	785	8 53	90	1 008
90	6559	7015	7251	7618	7954	8377	9173	1 007
100	6691	7134	7363	7718	8042	8439	91	1 007
∞	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 0000	1 000
$\frac{x_\bullet}{\sigma}$	+3 0902	+2 5758	+2 3263	+1 9600	+1 6449	+1 2816	+ 6745	0

*जब $n > 30$ तब $\frac{s}{\sigma}$ के मान निम्न व्यंजक के प्रयोग से सन्निकट रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं

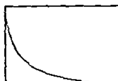
$$1 \left[\frac{9n - 2 + \frac{x}{\sigma}\sqrt{18n}}{9n} \right]$$

परिशिष्ट ड

F के मान

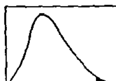
प्रदत्त स्वतन्त्र्य कोटियों (n_1 तथा n_2) के लिए तथा चुने हुए उपरले बिन्दुओं पर मगत निचले बिन्दुओं के लिए F के मान n_1 तथा n_2 के मानों का म्यानान्तरण करके तथा $\frac{1}{F}$ का परिकलन करके प्राप्त किए जा सकते हैं।

यह सारणी काले क्षेत्रों को दर्शाती है



$n_1 = 1$ तथा n_1 2 के लिए

and



$n_1 \geq 3$ के लिए

n_2	$n_1 = 1$ .10	.05	.025	.01	.001	$n_1 = 2$ .10	.05	.025	.01	.001
1	39 864	161 45	647 79	4 052 2	405 284	49 500	199 50	799 50	4 999 5	500 000
2	8 526	18 513	38 506	98 503	998 5	9 000	19 000	39 000	99 000	999 0
3	5 538	10 128	17 443	34 116	167 0	5 462	9 552	16 044	30 817	148 5
4	4 545	7 709	12 218	21 198	74 14	4 325	6 944	10 649	18 000	61 25
5	4 060	6 608	10 007	16 258	47 18	3 780	5 786	8 434	13 274	37 12
6	3 776	5 987	8 813	13 745	35 51	3 463	5 143	7 260	10 925	27 0
7	3 589	5 591	8 073	12 246	29 25	3 257	4 737	6 542	9 547	21 69
8	3 458	5 318	7 571	11 259	25 42	3 113	4 459	6 059	8 649	18 49
9	3 360	5 117	7 209	10 561	22 86	3 006	4 256	5 715	8 022	16 39
10	3 285	4 965	6 937	10 044	21 04	2 924	4 103	5 456	7 559	14 9
11	3 225	4 844	6 724	9 646	19 69	2 860	3 982	5 256	7 206	13 81
12	3 177	4 747	6 554	9 330	18 64	2 807	3 885	5 096	6 927	12 97
13	3 136	4 667	6 414	9 074	17 81	2 763	3 806	4 965	6 701	12 31
14	3 102	4 600	6 298	8 862	17 14	2 726	3 739	4 857	6 515	11 78
15	3 073	4 543	6 200	8 683	16 59	2 695	3 682	4 765	6 359	11 34
16	3 048	4 494	6 115	8 531	16 12	2 668	3 634	4 687	6 226	10 97
17	3 026	4 451	6 042	8 400	15 72	2 645	3 592	4 619	6 112	10 66
18	3 007	4 414	5 978	8 285	15 38	2 624	3 555	4 560	6 013	10 39
19	2 990	4 381	5 922	8 185	15 08	2 606	3 522	4 508	5 926	10 16
20	2 975	4 351	5 871	8 096	14 82	2 589	3 493	4 461	5 849	9 95
21	2 961	4 325	5 827	8 017	14 59	2 575	3 467	4 420	5 780	9 77
22	2 949	4 301	5 786	7 945	14 38	2 561	3 443	4 383	5 719	9 61
23	2 937	4 279	5 750	7 881	14 19	2 549	3 422	4 349	5 664	9 47
24	2 927	4 260	5 717	7 823	14 03	2 538	3 403	4 319	5 614	9 34
25	2 918	4 242	5 686	7 770	13 88	2 528	3 385	4 291	5 568	9 22
26	2 909	4 225	5 659	7 721	13 74	2 519	3 369	4 265	5 526	9 12
27	2 901	4 210	5 633	7 677	13 61	2 511	3 354	4 242	5 488	9 02
28	2 894	4 196	5 610	7 636	13 50	2 503	3 340	4 221	5 453	8 93
29	2 887	4 183	5 588	7 598	13 39	2 495	3 328	4 201	5 421	8 85
30	2 881	4 171	5 568	7 562	13 29	2 489	3 316	4 182	5 390	8 77
40	2 835	4 085	5 424	7 314	12 61	2 440	3 232	4 051	5 179	8 25
60	2 791	4 001	5 286	7 077	11 97	2 393	3 150	3 925	4 977	7 76
120	2 748	3 920	5 152	6 851	11 38	2 347	3 072	3 805	4 787	7 32
∞	2 706	3 841	5 024	6 635	10 83	2 303	2 996	3 689	4 605	6 91

0 10, 0.05, 0 025, तथा 0 01 बिन्दुओं पर F के मान बायोमीट्रिका, खण्ड XXXIII,

परिशिष्ट ड—वितत

F के मान

प्रदत्त स्वातन्त्र्य कोटियों (n_1 तथा n_2) के लिए तथा चुने हुए उपरले बिन्दुओं पर संगत निचले बिन्दुओं के लिए F के मान n_1 तथा n_2 के मानों का स्थानान्तरण करके तथा $\frac{1}{F}$ का परिकलन करके प्राप्त किये जा सकते हैं।

n_1	$n = 3$					$n = 4$				
	·10	·05	·025	·01	·001	·10	·05	·025	·01	·001
1	53.593	215.71	864.16	5403.3	540379	55.833	224.58	899.58	5624.6	562500
2	9.162	19.164	39.165	99.166	999.2	9.243	19.247	39.248	99.249	999.2
3	5.391	9.277	15.439	29.457	141.1	5.343	9.117	15.101	28.710	137.1
4	4.191	6.591	9.979	16.694	56.18	4.107	6.388	9.604	15.977	53.44
5	3.619	5.409	7.764	12.060	33.20	3.520	5.192	7.388	11.392	31.09
6	3.289	4.757	6.599	9.779	23.70	3.181	4.534	6.227	9.148	21.92
7	3.074	4.347	5.890	8.451	18.77	2.960	4.120	5.523	7.847	17.19
8	2.924	4.066	5.416	7.591	15.83	2.806	3.838	5.053	7.006	14.39
9	2.813	3.863	5.078	6.992	13.90	2.693	3.633	4.718	6.422	12.56
10	2.728	3.708	4.826	6.552	12.55	2.605	3.478	4.468	5.994	11.28
11	2.660	3.587	4.630	6.217	11.56	2.536	3.357	4.275	5.668	10.35
12	2.606	3.490	4.474	5.953	10.80	2.480	3.259	4.121	5.412	9.63
13	2.560	3.410	4.347	5.739	10.21	2.434	3.179	3.996	5.205	9.07
14	2.522	3.344	4.242	5.564	9.73	2.395	3.112	3.892	5.035	8.62
15	2.490	3.287	4.153	5.417	9.34	2.361	3.056	3.804	4.893	8.25
16	2.462	3.239	4.077	5.292	9.00	2.333	3.007	3.729	4.773	7.94
17	2.437	3.197	4.011	5.185	8.73	2.308	2.965	3.665	4.669	7.68
18	2.416	3.160	3.954	5.092	8.49	2.286	2.928	3.608	4.579	7.46
19	2.397	3.127	3.903	5.010	8.28	2.266	2.895	3.559	4.500	7.26
20	2.380	3.098	3.859	4.938	8.10	2.249	2.866	3.515	4.431	7.10
21	2.365	3.072	3.819	4.874	7.94	2.233	2.840	3.475	4.369	6.95
22	2.351	3.049	3.783	4.817	7.80	2.219	2.817	3.440	4.313	6.81
23	2.339	3.028	3.750	4.765	7.67	2.206	2.795	3.408	4.264	6.69
24	2.327	3.009	3.721	4.718	7.55	2.195	2.776	3.379	4.218	6.59
25	2.317	2.991	3.694	4.675	7.45	2.184	2.759	3.353	4.177	6.49
26	2.307	2.975	3.670	4.637	7.36	2.174	2.743	3.329	4.140	6.41
27	2.299	2.960	3.647	4.601	7.27	2.166	2.728	3.307	4.106	6.33
28	2.291	2.947	3.626	4.568	7.19	2.157	2.714	3.286	4.074	6.25
29	2.283	2.934	3.607	4.538	7.12	2.149	2.701	3.267	4.045	6.19
30	2.276	2.922	3.589	4.510	7.05	2.142	2.690	3.250	4.018	6.12
40	2.226	2.839	3.463	4.313	6.60	2.091	2.606	3.126	3.828	5.70
60	2.177	2.758	3.342	4.126	6.17	2.041	2.525	3.008	3.649	5.31
120	2.130	2.680	3.227	3.949	5.79	1.992	2.447	2.894	3.480	4.95
∞	2.084	2.605	3.116	3.782	5.42	1.945	2.372	2.786	3.319	4.62

अप्रैल 1943 में संकलित तथा मैक्सीन मेरिंग्टन और कैथेरीन एम० थॉम्प्सन द्वारा लिखित 'टेबल्स ऑफ परसेन्टेज प्वाइन्ट्स ऑफ दि इन्वर्टेड बीटा (F) डिस्ट्रिब्यूशन', पृष्ठ 73—78 से अनुज्ञापूर्वक लिए गए थे। 0.001 बिन्दु पर F के मान आर० ए० फिशर तथा एफ० येट्स स्टैटिस्टिकल टेबल्स फार बायोलॉजिकल एग्रीकल्चरल एंड मेडिकल रिसर्च, आलिवर एंड बॉयड लिमिटेड, एडिनबरा 1949 की सारणी V से लेखकों तथा प्रकाशकों की अनुज्ञा से, लिए गए थे। ये सारणियाँ मूल रूप में बायोमेट्रिका में प्रकाशित हुई थी। ई० एस० पियरसन तथा एच० ओ० हार्टले, बायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स खण्ड I कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लंदन, 1954, पृष्ठ 157—163 में भी मिल सकती हैं। इस स्रोत में 0.001 बिन्दु पर मानों के लिए 14 शोधन प्रस्तुत किए गए।

परिशिष्ट ड—वितत

F के मान

प्रदत्त स्वातन्त्र्य कोटियों (n_1 तथा n) के लिए तथा चुने हुए उपरले बिन्दुओं पर मगन निचले बिन्दुओं के लिए F के मान n_1 तथा n के मानों का स्थानांतरण करके तथा $\frac{1}{F}$ का परिकलन करके प्राप्त किये जा सकते हैं।

n_1	n = 5					n = 6				
	0	05	025	01	001	10	05	0 5	.01	001
1	5 4	230 16	921 85	5 63 7	5 6 405	58 204	233 99	93 11	5 559 0	585 937
2	9 3	19 296	39 298	99 299	999 3	9 326	19 330	39 331	99 33	999 3
3	5 309	9 0 1	4 885	28 3	134 6	5 285	8 941	14 735	2 911	13 8
4	4 051	6 256	9 364	15 5	51 7	4 010	6 163	9 197	15 0	50 53
5	3 453	5 050	146	10 6	29 5	3 404	4 950	6 9 8	10 6 2	28 84
6	3 108	4 39	5 988	8 45	20 81	3 055	4 284	5 820	8 466	20 03
7	2 883	3 972	5 285	7 460	16 21	2 827	3 866	5 119	7 191	15 52
8	2 26	3 6 8	4 817	6 63	13 49	2 668	3 581	4 652	6 3 1	12 86
9	2 611	3 482	4 484	6 05	11	2 561	3 3 4	4 320	5 807	11 13
10	2 522	3 3 6	4 236	5 636	10 48	2 461	3 217	4 0 2	5 386	9 92
11	2 451	3 204	4 044	5 316	9 58	2 393	3 095	3 881	5 069	9 05
12	2 394	3 106	3 891	5 064	8 [illegible]	2 331	2 996	3 28	4 821	8 38
13	2 347	3 025	3 6	4 86	8 35	2 283	2 915	3 604	4 6 0	56
14	2 30	2 958	3 663	4 6	7 92	2 243	2 848	3 501	4 456	7 43
15	2 2 3	2 901	3 576	4 555	7 57	2 208	2 90	3 415	4 318	7 09
16	2 244	2 852	3 502	4 43	7 27	2 178	2 741	3 341	4 202	6 81
17	2 218	2 810	3 438	4 336	7 02	2 152	2 699	3 277	10	6 56
18	2 198	2 3	3 382	4 248	6 81	2 130	2 661	3 221	4 015	6 35
19	2 1 8	2 40	3 333	4 1 1	6 62	2 109	2 6 8	3 172	3 939	6 18
20	2 158	2 11	3 289	4 103	6 46	2 091	2 599	3 128	3 8 1	6 02
21	2 142	2 685	3 250	4 0 2	6 32	2 075	2 573	3 090	3 812	5 88
22	2 128	2 661	3 215	3 388	6 19	2 060	2 549	3 055	3 58	5 8
23	2 115	2 640	3 184	3 937	6 08	2 047	2 528	3 0 3	3 710	5 65
24	2 103	2 621	3 155	3 895	5 98	2 035	2 508	2 995	3 60	5 55
25	2 092	2 603	3 129	3 855	5 88	2 024	2 490	2 969	3 627	5 46
26	2 082	2 587	3 105	3 818	5 80	2 014	2 474	2 945	3 591	5 38
27	2 073	2 5 2	3 083	3 83	5 73	2 004	2 459	2 923	3 558	5 31
28	2 064	2 558	3 063	3 54	5 66	1 996	2 445	2 903	3 5 8	5 24
29	2 05	2 545	3 044	3 725	5 59	1 988	2 432	2 884	3 499	5 18
30	2 049	2 534	3 026	3 699	5 53	1 980	2 421	2 867	3 4 4	5 12
40	1 99	2 450	2 904	3 514	5 13	1 9 7	2 336	2 744	3 291	4 73
60	1 946	2 368	2 786	3 339	4 6	1 8 5	2 254	2 627	3 119	4 37
120	1 8 6	2 2 0	2 6 4	3 1 4	4 42	1 8 4	2 1 5	2 515	2 956	4 04
∞	1 84	2 214	2 566	3 017	4 10	1 774	2 099	2 408	2 802	3 4

परिशिष्ट ड—वितत

F के मान

प्रदत्त स्वातन्त्र्य कोटियों (n_1 तथा n_2) के लिए तथा चुने हुए उपरले बिन्दुओं पर सतत निचले बिन्दुओं के लिए F के मान n_1 तथा n_2 के मानों का स्थानांतरण करके तथा $\frac{1}{F}$ का परिकलन करके प्राप्त किए जा सकते हैं।

n_1	$n = 8$					$n = 12$				
	10	05	025	01	001	10	05	025	01	001
1	59 439	238 93	956 66	5 981 6	598 144	60 05	243 9	9 6 71	6 106 3	610 667
2	9 367	19 3 1	39 3 3	99 374	999 4	9 408	19 413	39 415	99 416	999 4
3	5 252	8 845	14 540	2 489	130 6	5 216	8 745	14 337	2 052	128 3
4	3 955	6 041	8 980	14 799	49 00	3 896	5 912	8 751	14 374	47 41
5	3 339	4 818	6 757	10 289	27 64	3 268	4 6 8	6 525	9 888	26 42
6	2 983	4 147	5 600	8 102	19 03	2 905	4 000	5 368	7 718	17 99
7	2 752	3 726	4 899	6 840	14 63	2 668	3 5 5	4 666	6 469	13 71
8	2 583	3 438	4 433	6 029	12 04	2 50	3 284	4 200	5 667	11 19
9	2 469	3 230	4 102	5 467	10 37	2 3 9	3 073	3 868	5 111	9 57
10	2 3 7	3 072	3 855	5 057	9 20	2 284	2 913	3 621	4 06	8 45
11	2 304	2 948	3 664	4 745	8 35	2 209	2 788	3 430	4 397	7 63
12	2 245	2 849	3 512	4 499	7 71	2 147	2 687	3 277	4 155	7 00
3	2 195	2 67	3 88	4 302	7 21	2 097	2 604	3 153	3 960	6 52
14	2 154	2 699	3 235	4 140	6 80	2 054	2 534	3 050	3 800	6 13
15	2 118	2 641	3 199	4 004	6 47	2 017	2 475	2 963	3 666	5 81
16	2 088	2 591	3 125	3 890	6 19	1 985	2 475	2 899	3 553	5 55
17	2 061	2 548	3 061	3 91	5 96	1 958	2 381	2 825	3 455	5 32
18	2 038	2 5 0	3 005	3 705	5 75	1 933	2 342	2 789	3 371	5 17
19	2 017	2 4 7	2 956	3 631	5 59	1 912	2 308	2 720	3 206	4 97
20	1 998	2 447	2 913	3 564	5 44	1 892	2 2 8	2 6 6	3 231	4 82
21	1 982	2 471	2 874	3 506	5 31	1 6 5	2 250	2 637	3 173	4 70
22	1 967	2 397	2 839	3 453	5 19	1 859	2 226	2 602	3 121	4 58
23	1 953	2 3 5	2 808	3 406	5 09	1 845	2 204	2 5 0	3 074	4 48
24	1 941	2 355	2 779	3 363	4 99	1 832	2 183	2 541	3 032	4 39
25	1 929	2 337	2 753	3 324	4 91	1 820	2 165	2 515	2 993	4 31
26	1 919	2 321	2 729	3 288	4 83	1 809	2 148	2 491	2 958	4 24
27	1 909	2 305	2 707	3 256	4 76	1 799	2 132	2 469	2 926	4 17
28	1 900	2 291	2 687	3 226	4 69	1 790	2 118	2 448	2 896	4 11
29	1 892	2 278	2 669	3 198	4 64	1 781	2 104	2 430	2 869	4 05
30	1 884	2 266	2 651	3 173	4 58	1 773	2 092	2 412	2 843	4 00
40	1 829	2 180	2 529	2 993	4 21	1 715	2 004	2 288	2 665	3 64
60	1 7 5	2 097	2 412	2 823	3 87	1 657	1 917	2 169	2 496	3 31
120	1 [illegible]	2 016	2 299	2 663	3 55	1 601	1 834	2 055	2 336	3 02
∞	1 6 0	1 938	2 1 2	2 511	3 27	1 546	1 752	1 945	2 185	2 74

परिशिष्ट ड—समाप्त

F के मान

प्रदत्त स्वातन्त्र्य कोटियों (n_1 तथा n_2) के लिए तथा चुने हुए उपरल बिन्दुओं पर सान्त निचले बिन्दुओं के लिए F के मान n_1 तथा n_2 के मानों का स्थानान्तरण करके तथा $\frac{1}{F}$ परिकलन करके प्राप्त किए जा सकते हैं।

n_2	$n_1 = 24$					$n_1 = \infty$				
	.10	.05	.025	.01	.001	.10	.05	.025	.01	.001
1	62 002	249 05	997 25	6 234 6	623 497	63 328	254 32	1 018 3	6 366 0	636 619
2	9 450	19 454	39 456	99 458	999 5	9 491	19 496	39 498	99 501	999 5
3	5 176	8 638	14 124	26 598	125 9	5 134	8 527	13 90	26 125	123 5
4	3 831	5 774	8 511	13 929	45 77	3 761	5 628	8 25	13 463	44 05
5	3 190	4 527	6 278	9 466	25 14	3 105	4 365	6 015	9 020	23 79
6	2 815	3 841	5 117	7 313	16 89	2 722	3 669	4 849	6 880	15 75
7	2 575	3 410	4 415	6 074	12 73	2 471	3 230	4 142	5 650	11 70
8	2 404	3 115	3 947	5 279	10 30	2 293	2 928	3 670	4 859	9 33
9	2 277	2 900	3 614	4 729	8 72	2 159	2 707	3 333	4 311	7 81
10	2 178	2 737	3 365	4 327	7 64	2 055	2 538	3 080	3 909	6 75
11	2 100	2 609	3 173	4 021	6 85	1 972	2 404	2 853	3 602	6 00
12	2 036	2 505	3 019	3 780	6 25	1 904	2 296	2 725	3 361	5 42
13	1 983	2 420	2 893	3 587	5 78	1 845	2 205	2 596	3 165	4 97
14	1 938	2 349	2 759	3 427	5 41	1 797	2 131	2 487	3 004	4 60
15	1 899	2 288	2 701	3 294	5 10	1 755	2 066	2 395	2 868	4 31
16	1 866	2 235	2 625	3 181	4 85	1 719	2 010	2 316	2 753	4 05
17	1 836	2 130	2 560	3 084	4 63	1 695	1 950	2 247	2 653	3 85
18	1 810	2 150	2 503	2 999	4 45	1 657	1 917	2 187	2 566	3 67
19	1 787	2 114	2 452	2 925	4 29	1 631	1 878	2 133	2 489	3 51
20	1 767	2 093	2 408	2 859	4 15	1 607	1 843	2 055	2 421	3 38
21	1 748	2 054	2 368	2 801	4 03	1 586	1 812	2 042	2 360	3 26
22	1 731	2 075	2 332	2 749	3 92	1 567	1 783	2 003	2 305	3 15
23	1 716	2 005	2 299	2 702	3 82	1 549	1 757	1 965	2 256	3 05
24	1 702	1 954	2 259	2 659	3 74	1 533	1 733	1 935	2 211	2 97
25	1 689	1 964	2 242	2 620	3 65	1 518	1 711	1 906	2 163	2 83
26	1 677	1 945	2 217	2 555	3 53	1 504	1 691	1 879	2 132	2 82
27	1 666	1 930	2 195	2 552	3 52	1 491	1 672	1 853	2 096	2 75
28	1 655	1 915	2 174	2 522	3 46	1 478	1 654	1 829	2 064	2 69
29	1 645	1 901	2 154	2 495	3 41	1 467	1 638	1 807	2 034	2 64
30	1 639	1 887	2 135	2 469	3 36	1 456	1 622	1 787	2 006	2 59
40	1 574	1 793	2 007	2 288	3 01	1 377	1 509	1 637	1 805	2 23
60	1 511	1 700	1 882	2 115	2 69	1 292	1 389	1 482	1 601	1 89
120	1 447	1 608	1 760	1 950	2 40	1 193	1 254	1 310	1 380	1 54
∞	1 383	1 517	1 640	1 791	2 13	1 000	1 000	1 000	1 000	1 00

परिशिष्ट ढ

N_i तथा k के निर्दिष्ट मानों के लिए 0.05 तथा 0.01 बिन्दुओं पर L के मान, जब $N_1 = N_2 = \ldots = N_k = N_i$

यदि परिवर्ती आकार के प्रतिदर्शों में L का परिकलन किया गया है तो N_a को $\frac{N_1 + N_2 + \ldots + N_k}{k}$ के बराबर लो, शर्त यह है कि कोई भी प्रतिदर्श 15 या 20 मदों से कम का नहीं होना चाहिए।



यह सारणी काला क्षेत्र दर्शाती है

k	$N_i = 3$		$N_i = 4$		$N = 5$		$N = 6$		$N = 7$		$N = 8$		$N = 9$	
	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01
2	312	141	478	284	565	398	658	485	709	531	745	603	775	545
3	304	162	470	314	578	429	648	514	700	578	739	628	769	567
4	315	188	480	345	585	459	656	542	707	604	744	652	774	689
5	328	210	491	370	595	484	665	565	714	624	751	676	780	706
6	339	230	502	391	60[illegible]	504	673	583	721	641	757	688	785	720
7	350	246	512	409	612	520	680	597	727	664	763	697	790	730
8	359	260	520	424	620	534	686	610	733	665	768	707	795	740
9	367	273	527	437	626	545	691	620	738	674	772	715	798	747
10	374	284	534	448	631	555	696	629	742	682	776	722	802	753
12	387	303	545	467	641	572	704	644	749	696	782	734	807	764
14	397	318	554	481	649	585	711	655	755	706	787	744	812	773
16	405	331	561	493	655	596	718	665	759	714	791	751	816	779
18	412	342	567	504	660	605	721	672	763	721	795	756	819	784
20	418	352	573	.512	665	613	725	679	767	727	798	761	822	788
22	424	360	577	520	669	619	728	684	770	732	800	765	824	792
24	428	367	581	526	672	624	731	688	772	736	802	768	826	795
26	433	373	585	531	675	629	734	693	775	740	805	772	828	798
28	437	379	589	537	678	634	736	697	777	746	807	776	829	802
30	441	386	592	543	681	639	739	703	779	748	809	781	831	806

k	$N_i = 10$		$N = 12$		$N_i = 15$		$N = 20$		$N = 30$		$N = 60$		$N = \infty$	
	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01	05	01
2	798	678	833	730	858	783	902	836	935	890	968	945	1 000	1 000
3	792	699	828	748	863	798	838	848	933	898	967	949	1 000	1 000
4	797	719	832	766	866	812	900	869	931	906	967	953	1 000	1 000
5	802	735	836	779	870	823	903	867	936	911	968	956	1 000	1 000
6	808	748	841	789	873	.832	906	874	938	.916	969	.958	1 000	1 000
7	812	757	844	798	876	.839	908	879	939	.920	970	960	1 000	1 000
8	816	766	849	805	879	.844	910	.884	941	.923	971	962	1 000	1 000
9	819	773	851	811	881	.849	912	.887	942	.925	971	963	1 000	1 000
10	822	779	853	816	883	.853	913	.890	943	927	972	.964	1 000	1 000
12	828	789	857	824	887	860	916	896	944	931	973	965	1 000	1 000
14	832	796	861	831	890	865	918	900	946	933	973	967	1 000	1 000
16	835	802	863	836	892	870	920	.903	947	936	974	.968	1 000	1 000
18	838	807	866	840	894	873	921	905	948	937	974	969	1 000	1 000
20	840	811	868	844	896	.876	922	908	949	.939	975	.970	1 000	1 000
22	843	814	870	847	897	878	924	909	950	.940	975	.970	1 000	1 000
24	844	.817	872	850	898	880	924	.911	950	.941	975	.971	1 000	1 000
26	846	.820	873	852	899	882	925	912	951	.942	976	.971	1 000	1 000
28	848	.823	874	854	900	884	926	914	951	943	976	972	1 000	1 000
30	849	827	876	856	901	886	927	916	952	944	976	972	1 000	1 000

यह सारणी स्टैटिस्टिकल रिसर्च मेमॉयर्स, खण्ड I (1936) में सङ्कलित तथा पी० पी० एन० नयर द्वारा लिखित "एन इन्वेस्टिगेशन इन्टु दि ऐप्लिकेशन आफ नमन एण्ड पियर्सन्स L_1 टैस्ट, विद टेबल्स आफ परसेन्टेज लिमिट्स", पृष्ठ 38—51 की एक सारणी के आधार पर, लेखक की अनुज्ञा से बनायी गई है। इस स्वरूप की एक पहले की सारणी साङ्ख्य दि इण्डियन जर्नल आफ स्टैटिस्टिक्स, खण्ड 1, भाग 1 (जून 1933) में सङ्कलित तथा पी० सी० महलनोबिस द्वारा लिखित 'टेबल्स फॉर दि ऐप्लिकेशन आफ L-टैस्ट्स', पृष्ठ 109—122 पर दी गई है।

परिशिष्ट ण

β_1 की उपरली 0.10 तथा 0.02 सीमाएँ जब वे प्रसामान्य समष्टि से लिए गये यादृच्छिक प्रतिदर्शों से परिकलित हों

यह सारणी काला
क्षेत्र दर्शाती है



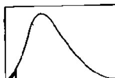
N	0 10	0 02
50	285	619
75	198	424
100	152	321
125	123	258
150	103	216
175	089	185
200	078	162
250	063	150
300	053	108
350	045	093
400	040	081
450	035	072
500	032	065
550	029	059
600	027	054
650	025	050
700	023	046
750	021	043
800	020	041
850	019	038
900	018	036
950	017	034
1000	016	032
1200	013	027
1400	012	023
1600	010	020
1800	009	018
2000	008	016
2500	006	013
3000	005	011
3500	005	009
4000	004	008
4500	004	007
5000	003	006

यह सारणी बायोमीट्रिका, खण्ड XXII में सकलित तथा ईगन एस० पियर्सन द्वारा लिखित लेख "द फर्दर डिवेलपमेन्ट आफ टस्ट्स आफ नॉरमैलिटी", पृष्ठ 239 एवं अनुवर्ती में दी हुई सारणी से, अनुज्ञा लेकर, ली गई है। $\sqrt{\beta_1}$ के लिए एक इसी तरह की सारणी ई० एम० पियर्सन तथा एच० ओ० हार्टले, *बायोमीट्रिका टेबल्स फार स्टैटिस्टीशियन्स*, खण्ड 1, कैम्ब्रिज युनिवर्सिटी प्रैस, लन्दन, 1954, पृष्ठ 183 पर दी हुई है।

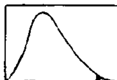
परिशिष्ट त

β_2 की उपरली तथा निचली 0.05 तथा 0.01 सीमाएँ जब वे प्रसामान्य समष्टि से लिए गये यादृच्छिक प्रतिदर्शों से परिकलित हो

यह सारणी काले क्षेत्र दिखलाती है



तथा



N	निचली सीमाएं 0.01	निचली सीमाएं 0.05	उपरली सीमाएँ 0.05	उपरली सीमाएँ 0.01
100	2.18	2.35	3.77	4.39
125	2.24	2.40	3.70	4.24
150	2.29	2.45	3.65	4.14
175	2.33	2.48	3.61	4.05
200	2.37	2.51	3.57	3.98
250	2.42	2.55	3.52	3.87
300	2.46	2.59	3.47	3.79
350	2.50	2.62	3.44	3.72
400	2.52	2.64	3.41	3.67
450	2.55	2.66	3.39	3.63
500	2.57	2.67	3.37	3.60
550	2.58	2.69	3.35	3.57
600	2.60	2.70	3.34	3.54
650	2.61	2.71	3.33	3.52
700	2.62	2.72	3.31	3.50
750	2.64	2.73	3.30	3.48
800	2.65	2.74	3.29	3.46
850	2.66	2.74	3.28	3.45
900	2.66	2.75	3.28	3.43
950	2.67	2.76	3.27	3.42
1000	2.68	2.76	3.26	3.41
1200	2.71	2.78	3.24	3.37
1400	2.72	2.80	3.22	3.34
1600	2.74	2.81	3.21	3.32
1800	2.76	2.82	3.20	3.30
2000	2.77	2.83	3.18	3.28
2500	2.79	2.85	3.16	3.25
3000	2.81	2.86	3.15	3.22
3500	2.82	2.87	3.14	3.21
4000	2.83	2.88	3.13	3.19
4500	2.84	2.88	3.12	3.18
5000	2.85	2.89	3.12	3.17

यह सारणी बायोमीट्रिका खण्ड XXII, मे सकलित तथा ईगन एस० पियर्सन द्वारा लिखित लेख ए फर्दर डिवेलपमेन्ट आफ टेस्ट्स आफ नॉरमैलिटी पृष्ठ 239 एव अनुवर्ती में दी हुई सारणी से, अनुज्ञा लेकर, ली गई है। इस तरह की एक सारणी ई० एस० पियर्सन तथा एच० ओ० हार्टले, बायोमीट्रिका टेबल्स फॉर स्टैटिस्टीशियन्स खण्ड I, केम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस लन्दन 1954 पृष्ठ 184 पर दी हुई है।

परिशिष्ट थ

वर्ग, वर्गमूल, तथा व्युत्क्रम, 1—1,000

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम
1	1	1 0000000	1 0000000
2	4	1 4142136	0 5000000
3	9	1 7320508	333333333
4	16	2 0000000	250000000
5	25	2 2360680	200000000
6	36	2 4494897	166666667
7	49	2 6457513	142857143
8	64	2 8284271	125000000
9	81	3 0000000	111111111
10	1 00	3 1622777	100000000
11	1 21	3 3166248	090909091
12	1 44	3 4641016	083333333
13	1 69	3 6055513	076923077
14	1 96	3 7416574	071428571
15	2 25	3 8729833	066666667
16	2 56	4 0000000	062500000
17	2 89	4 1231056	058823529
18	3 24	4 2426407	055555556
19	3 61	4 3588989	052631579
20	4 00	4 4721360	050000000
21	4 41	4 5825757	047619048
22	4 84	4 6904158	045454545
23	5 29	4 7958315	043478261
24	5 76	4 8989795	041666667
25	6 25	5 0000000	040000000
26	6 76	5 0990195	038461538
27	7 29	5 1961524	037037037
28	7 84	5 2915026	035714286
29	8 41	5 3851648	034482759
30	9 00	5 4772256	033333333
31	9 61	5 5677644	032258065
32	10 24	5 6568542	031250000
33	10 89	5 7445626	030303030
34	11 56	5 8309519	029411765
35	12 25	5 9160798	028571429
36	12 96	6 0000000	027777778
37	13 69	6 0827625	027027027
38	14 44	6 1644140	026315789
39	15 21	6 2449980	025641026
40	16 00	6 3245553	025000000
41	16 81	6 4031242	024390244
42	17 64	6 4807407	023809524
43	18 49	6 5574385	023255814
44	19 36	6 6332496	022727273
45	20 25	6 7082039	022222222
46	21 16	6 7823300	021739130
47	22 09	6 8556546	021276596
48	23 04	6 9282032	020833333
49	24 01	7 0000000	020408163
50	25 00	7 0710678	020000000
51	26 01	7 1414284	019607843
52	27 04	7 2111026	019230769
53	28 09	7 2801099	018867925
54	29 16	7 3484692	018518519
55	30 25	7 4161985	018181818
56	31 36	7 4833148	017857143
57	32 49	7 5498344	017543860
58	33 64	7 6157731	017241379
59	34 81	7 6811457	016949153
60	36 00	7 7459667	016666667
61	37 21	7 8102497	016393443
62	38 44	7 8740079	016129032
63	39 69	7 9372539	015873016
64	40 96	8 0000000	015625000
65	42 25	8 0622577	015384615
66	43 56	8 1240384	015151515
67	44 89	8 1853528	014925373
68	46 24	8 2462113	014705882
69	47 61	8 3066239	014492754
70	49 00	8 3666003	014285714
71	50 41	8 4261498	014084507
72	51 84	8 4852814	013888889
73	53 29	8 5440037	013698630
74	54 76	8 6023253	013513514
75	56 25	8 6602540	013333333
76	57 76	8 7177979	013157895
77	59 29	8 7749644	012987013
78	60 84	8 8317609	012820513
79	62 41	8 8881944	012658228
80	64 00	8 9442719	012500000
81	65 61	9 0000000	012345679
82	67 24	9 0553851	012195122
83	68 89	9 1104336	012048193
84	70 56	9 1651514	011904762
85	72 25	9 2195445	011764706
86	73 96	9 2736185	011627907
87	75 69	9 3273791	011494253
88	77 44	9 3808315	011363636
89	79 21	9 4339811	011235955
90	81 00	9 4868330	011111111
91	82 81	9 5393920	010989011
92	84 64	9 5916630	010869565
93	86 49	9 6436508	010752688
94	88 36	9 6953597	010638298
95	90 25	9 7467943	010526316
96	92 16	9 7979590	010416667
97	94 09	9 8488578	010309278
98	96 04	9 8994949	010204082
99	98 01	9 9498744	010101010
100	1 00 00	10 0000000	010000000

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम	संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम
101	1 02 01	10 0498756	9900990	151	2 28 01	12 2882057	6622517
102	1 04 04	10 0995049	9803922	152	2 31 04	12 3288280	6578947
103	1 06 09	10 1488916	9708738	153	2 34 09	12 3693169	6535948
104	1 08 16	10 1980390	9615385	154	2 37 16	12 4096736	6493506
105	1 10 25	10 2469508	9523810	155	2 40 25	12 4498996	6451613
106	1 12 36	10 2956301	9433962	156	2 43 36	12 4899960	6410256
107	1 14 49	10 3440804	9345794	157	2 46 49	12 5299641	6369427
108	1 16 64	10 3923048	9259259	158	2 49 64	12 5698051	6329114
109	1 18 81	10 4403065	9174312	159	2 52 81	12 6095202	6289308
110	1 21 00	10 4880885	9090909	160	2 56 00	12 6491106	6250000
111	1 23 21	10 5356538	9009009	161	2 59 21	12 6885775	6211180
112	1 25 44	10 5830052	8928571	162	2 62 44	12 7279221	6172840
113	1 27 69	10 6301458	8849558	163	2 65 69	12 7671453	6134969
114	1 29 96	10 6770783	8771930	164	2 68 96	12 8062485	6097561
115	1 32 25	10 7238053	8695652	165	2 72 25	12 8452326	6060606
116	1 34 56	10 7703296	8620690	166	2 75 56	12 8840987	6024096
117	1 36 89	10 8166538	8547009	167	2 78 89	12 9228480	5988024
118	1 39 24	10 8627805	8474576	168	2 82 24	12 9614814	5952381
119	1 41 61	10 9087121	8403361	169	2 85 61	13 0000000	5917160
120	1 44 00	10 9544512	8333333	170	2 89 00	13 0384048	5882353
121	1 46 41	11 0000000	8264463	171	2 92 41	13 0766968	5847953
122	1 48 84	11 0453610	8196721	172	2 95 84	13 1148770	5813953
123	1 51 29	11 0905365	8130081	173	2 99 29	13 1529464	5780347
124	1 53 76	11 1355287	8064516	174	3 02 76	13 1909060	5747126
125	1 56 25	11 1803399	8000000	175	3 06 25	13 2287566	5714286
126	1 58 76	11 2249722	7936508	176	3 09 76	13 2664992	5681818
127	1 61 29	11 2694277	7874016	177	3 13 29	13 3041347	5649718
128	1 63 84	11 3137085	7812500	178	3 16 84	13 3416641	5617978
129	1 66 41	11 3578167	7751938	179	3 20 41	13 3790882	5586592
130	1 69 00	11 4017543	7692308	180	3 24 00	13 4164079	5555556
131	1 71 61	11 4455231	7633588	181	3 27 61	13 4536240	5524862
132	1 74 24	11 4891253	7575758	182	3 31 24	13 4907376	5494505
133	1 76 89	11 5325626	7518797	183	3 34 89	13 5277493	5464481
134	1 79 56	11 5758369	7462687	184	3 38 56	13 5646600	5434783
135	1 82 25	11 6189500	7407407	185	3 42 25	13 6014705	5405405
136	1 84 96	11 6619038	7352941	186	3 45 96	13 6381817	5376344
137	1 87 69	11 7046999	7299270	187	3 49 69	13 6747943	5347594
138	1 90 44	11 7473401	7246377	188	3 53 44	13 7113092	5319149
139	1 93 21	11 7898261	7194245	189	3 57 21	13 7477271	5291005
140	1 96 00	11 8321596	7142857	190	3 61 00	13 7840488	5263158
141	1 98 81	11 8743422	7092199	191	3 64 81	13 8202750	5235602
142	2 01 64	11 9163753	7042254	192	3 68 64	13 8564065	5208333
143	2 04 49	11 9582607	6993007	193	3 72 49	13 8924440	5181347
144	2 07 36	12 0000000	6944444	194	3 76 36	13 9283883	5154639
145	2 10 25	12 0415946	6896552	195	3 80 25	13 9642400	5128205
146	2 13 16	12 0830460	6849315	196	3 84 16	14 0000000	5102041
147	2 16 09	12 1243557	6802721	197	3 88 09	14 0356688	5076142
148	2 19 04	12 1655251	6756757	198	3 92 04	14 0712473	5050505
149	2 22 01	12 2065556	6711409	199	3 96 01	14 1067360	5025126
150	2 25 00	12 2474487	6666667	200	4 00 00	14 1421356	5000000

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम .00
201	4 04 01	14 1774469	4975124
202	4 08 04	14 2126704	4950495
203	4 12 09	14 2478068	4926108
204	4 16 16	14 2828569	4901961
205	4 20 25	14 3178211	4878049
206	4 24 36	14 3527001	4854369
207	4 28 49	14 3874946	4830918
208	4 32 64	14 4222051	4807692
209	4 36 81	14 4568323	4784689
210	4 41 00	14 4913767	4761905
211	4 45 21	14 5258390	4739336
212	4 49 44	14 5602198	4716981
213	4 53 69	14 5945195	4694836
214	4 57 96	14 6287388	4672897
215	4 62 25	14 6628783	4651163
216	4 66 56	14 6969385	4629630
217	4 70 89	14 7309199	4608295
218	4 75 24	14 7648231	4587156
219	4 79 61	14 7986486	4566210
220	4 84 00	14 8323970	4545455
221	4 88 41	14 8660687	4524887
222	4 92 84	14 8996644	4504505
223	4 97 29	14 9331845	4484305
224	5 01 76	14 9666295	4464286
225	5 06 25	15 0000000	4444444
226	5 10 76	15 0332964	4424779
227	5 15 29	15 0665192	4405286
228	5 19 84	15 0996689	4385965
229	5 24 41	15 1327460	4366812
230	5 29 00	15 1657509	4347826
231	5 33 61	15 1986842	4329004
232	5 38 24	15 2315462	4310345
233	5 42 89	15 2643375	4291845
234	5 47 56	15 2970585	4273504
235	5 52 25	15 3297097	4255319
236	5 56 96	15 3622915	4237288
237	5 61 69	15 3948043	4219409
238	5 66 44	15 4272486	4201681
239	5 71 21	15 4596248	4184100
240	5 76 00	15 4919334	4166667
241	5 80 81	15 5241747	4149378
242	5 85 64	15 5563492	4132231
243	5 90 49	15 5884573	4115226
244	5 95 36	15 6204994	4098361
245	6 00 25	15 6524758	4081633
246	6 05 16	15 6843871	4065041
247	6 10 09	15 7162336	4048583
248	6 15 04	15 7480157	4032258
249	6 20 01	15 7797338	4016064
250	6 25 00	15 8113883	4000000
251	6 30 01	15 8429795	3984064
252	6 35 04	15 8745079	3968254
253	6 40 09	15 9059737	3952569
254	6 45 16	15 9373775	3937008
255	6 50 25	15 9687194	3921569
256	6 55 36	16 0000000	3906250
257	6 60 49	16 0312195	3891051
258	6 65 64	16 0623784	3875969
259	6 70 81	16 0934769	3861004
260	6 76 00	16 1245155	3846154
261	6 81 21	16.1554944	3831418
262	6 86 44	16 1864141	3816794
263	6 91 69	16 2172747	3802281
264	6 96 96	16 2480768	3787879
265	7 02 25	16 2788206	3773585
266	7 07 56	16 3095064	3759398
267	7 12 89	16 3401346	3745318
268	7 18 24	16 3707055	3731343
269	7 23 61	16 4012195	3717472
270	7 29 00	16 4316767	3703704
271	7 34 41	16.4620776	3690037
272	7 39 84	16 4924225	3676471
273	7 45 29	16 5227116	3663004
274	7 50 76	16 5529454	3649635
275	7 56 25	16 5831240	3636364
276	7 61 76	16 6132477	3623188
277	7 67 29	16 6433170	3610108
278	7 72 84	16 6733320	3597122
279	7 78 41	16 7032931	3584229
280	7 84 00	16 7332005	3571429
281	7 89 61	16 7630546	3558719
282	7 95 24	16 7928556	3546099
283	8 00 89	16 8226038	3533569
284	8 06 56	16 8522995	3521127
285	8 12 25	16 8819430	3508772
286	8 17 96	16 9115345	3496503
287	8 23 69	16 9410743	3484321
288	8 29 44	16 9705627	3472222
289	8 35 21	17.0000000	3460208
290	8 41 00	17 0293864	3448276
291	8 46 81	17 0587221	3436426
292	8 52 64	17 0880075	3424658
293	8 58 49	17 1172428	3412969
294	8 64 36	17.1464282	3401361
295	8 70 25	17.1755640	3389831
296	8 76 16	17 2046505	3378378
297	8 82 09	17 2336879	3367003
298	8 88 04	17 2626765	3355705
299	8 94 01	17 2916165	3344482
300	9 00 00	17 3205081	3333333

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम
301	9 06 01	17.3493516	3322259
302	9 12 04	17.3781472	3311258
303	9 18 09	17.4068952	3300330
304	9 24 16	17.4355958	3289474
305	9 30 25	17.4642492	3278689
306	9 36 36	17.4928557	3267974
307	9 42 49	17.5214155	3257329
308	9 48 64	17.5499288	3246753
309	9 54 81	17.5783958	3236246
310	9 61 00	17.6068169	3225806
311	9 67 21	17.6351921	3215434
312	9 73 44	17.6635217	3205128
313	9 79 69	17.6918060	3194888
314	9 85 96	17.7200451	3184713
315	9 92 25	17.7482393	3174603
316	9 98 56	17.7763888	3164557
317	10 04 89	17.8044938	3154574
318	10 11 24	17.8325545	3144654
319	10 17 61	17.8605711	3134796
320	10 24 00	17.8885438	3125000
321	10 30 41	17.9164729	3115265
322	10 36 84	17.9443584	3105590
323	10 43 29	17.9722008	3095975
324	10 49 76	18.0000000	3086420
325	10 56 25	18.0277564	3076923
326	10 62 76	18.0554701	3067485
327	10 69 29	18.0831413	3058104
328	10 75 84	18.1107703	3048780
329	10 82 41	18.1383571	3039514
330	10 89 00	18.1659021	3030303
331	10 95 61	18.1934054	3021148
332	11 02 24	18.2208672	3012048
333	11 08 89	18.2482876	3003003
334	11 15 56	18.2756669	2994012
335	11 22 25	18.3030052	2985075
336	11 28 96	18.3303028	2976190
337	11 35 69	18.3575598	2967359
338	11 42 44	18.3847763	2958580
339	11 49 21	18.4119526	2949853
340	11 56 00	18.4390889	2941176
341	11 62 81	18.4661853	2932551
342	11 69 64	18.4932420	2923977
343	11 76 49	18.5202592	2915452
344	11 83 36	18.5472370	2906977
345	11 90 25	18.5741756	2898551
346	11 97 16	18.6010752	2890173
347	12 04 09	18.6279360	2881844
348	12 11 04	18.6547581	2873563
349	12 18 01	18.6815417	2865330
350	12 25 00	18.7082869	2857143
351	12 32 01	18.7349940	2849003
352	12 39 04	18.7616630	2840909
353	12 46 09	18.7882942	2832861
354	12 53 16	18.8148877	2824859
355	12 60 25	18.8414437	2816901
356	12 67 36	18.8679623	2808989
357	12 74 49	18.8944436	2801120
358	12 81 64	18.9208879	2793296
359	12 88 81	18.9472953	2785515
360	12 96 00	18.9736660	2777778
361	13 03 21	19.0000000	2770083
362	13 10 44	19.0262976	2762431
363	13 17 69	19.0525589	2754821
364	13 24 96	19.0787840	2747253
365	13 32 25	19.1049732	2739726
366	13 39 56	19.1311265	2732240
367	13 46 89	19.1572441	2724796
368	13 54 24	19.1833261	2717391
369	13 61 61	19.2093727	2710027
370	13 69 00	19.2353841	2702703
371	13 76 41	19.2613603	2695418
372	13 83 84	19.2873015	2688172
373	13 91 29	19.3132079	2680965
374	13 98 76	19.3390796	2673797
375	14 06 25	19.3649167	2666667
376	14 13 76	19.3907194	2659574
377	14 21 29	19.4164878	2652520
378	14 28 84	19.4422221	2645503
379	14 36 41	19.4679223	2638522
380	14 44 00	19.4935887	2631579
381	14 51 61	19.5192213	2624672
382	14 59 24	19.5448203	2617801
383	14 66 89	19.5703858	2610966
384	14 74 56	19.5959179	2604167
385	14 82 25	19.6214169	2597403
386	14 89 96	19.6468827	2590674
387	14 97 69	19.6723156	2583979
388	15 05 44	19.6977156	2577320
389	15 13 21	19.7230829	2570694
390	15 21 00	19.7484177	2564103
391	15 28 81	19.7737199	2557545
392	15 36 64	19.7989899	2551020
393	15 44 49	19.8242276	2544529
394	15 52 36	19.8494332	2538071
395	15 60 25	19.8746069	2531646
396	15 68 16	19.8997487	2525253
397	15 76 09	19.9248588	2518892
398	15 84 04	19.9499373	2512563
399	15 92 01	19.9749844	2506266
400	16 00 00	20.0000000	2500000

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम 100
401	16 08 01	20.0249844	2493766
402	16 16 04	20.0499377	2487562
403	16 24 09	20.0748599	2481390
404	16 32 16	20.0997512	2475248
405	16 40 25	20.1246118	2469136
406	16 48 36	20.1494417	2463054
407	16 56 49	20.1742410	2457002
408	16 64 64	20.1990099	2450980
409	16 72 81	20.2237484	2444988
410	16 81 00	20.2484567	2439024
411	16 89 21	20.2731349	2433090
412	16 97 44	20.2977831	2427184
413	17 05 69	20.3224014	2421308
414	17 13 96	20.3469899	2415459
415	17 22 25	20.3715488	2409639
416	17 30 56	20.3960781	2403846
417	17 38 89	20.4205779	2398082
418	17 47 24	20.4450483	2392344
419	17 55 61	20.4694895	2386635
420	17 64 00	20.4939015	2380952
421	17 72 41	20.5182845	2375297
422	17 80 84	20.5426386	2369668
423	17 89 29	20.5669638	2364066
424	17 97 76	20.5912603	2358491
425	18 06 25	20.6155281	2352941
426	18 14 76	20.6397674	2347418
427	18 23 29	20.6639783	2341920
428	18 31 84	20.6881609	2336449
429	18 40 41	20.7123152	2331002
430	18 49 00	20.7364414	2325581
431	18 57 61	20.7605395	2320186
432	18 66 24	20.7846097	2314815
433	18 74 89	20.8086520	2309469
434	18 83 56	20.8326667	2304147
435	18 92 25	20.8566536	2298851
436	19 00 96	20.8806130	2293578
437	19 09 69	20.9045450	2288330
438	19 18 44	20.9284495	2283105
439	19 27 21	20.9523268	2277904
440	19 36 00	20.9761770	2272727
441	19 44 81	21.0000000	2267574
442	19 53 64	21.0237960	2262443
443	19 62 49	21.0475652	2257336
444	19 71 36	21.0713075	2252252
445	19 80 25	21.0950231	2247191
446	19 89 16	21.1187121	2242152
447	19 98 09	21.1423745	2237136
448	20 07 04	21.1660105	2232143
449	20 16 01	21.1896201	2227171
450	20 25 00	21.2132034	2222222
451	20 34 01	21.2367606	2217295
452	20 43 04	21.2602916	2212389
453	20 52 09	21.2837967	2207506
454	20 61 16	21.3072758	2202643
455	20 70 25	21.3307290	2197802
456	20 79 36	21.3541565	2192982
457	20 88 49	21.3775583	2188184
458	20 97 64	21.4009346	2183406
459	21 06 81	21.4242853	2178649
460	21 16 00	21.4476106	2173913
461	21 25 21	21.4709106	2169197
462	21 34 44	21.4941853	2164502
463	21 43 69	21.5174348	2159827
464	21 52 96	21.5406592	2155172
465	21 62 25	21.5638587	2150538
466	21 71 56	21.5870331	2145923
467	21 80 89	21.6101828	2141328
468	21 90 24	21.6333077	2136752
469	21 99 61	21.6564078	2132196
470	22 09 00	21.6794834	2127660
471	22 18 41	21.7025344	2123142
472	22 27 84	21.7255610	2118644
473	22 37 29	21.7485632	2114165
474	22 46 76	21.7715411	2109705
475	22 56 25	21.7944947	2105263
476	22 65 76	21.8174242	2100840
477	22 75 29	21.8403297	2096436
478	22 84 84	21.8632111	2092050
479	22 94 41	21.8860686	2087683
480	23 04 00	21.9089023	2083333
481	23 13 61	21.9317122	2079002
482	23 23 24	21.9544984	2074689
483	23 32 89	21.9772610	2070393
484	23 42 56	22.0000000	2066116
485	23 52 25	22.0227155	2061856
486	23 61 96	22.0454077	2057613
487	23 71 69	22.0680765	2053388
488	23 81 44	22.0907220	2049180
489	23 91 21	22.1133444	2044990
490	24 01 00	22.1359436	2040816
491	24 10 81	22.1585198	2036660
492	24 20 64	22.1810730	2032520
493	24 30 49	22.2036033	2028398
494	24 40 36	22.2261108	2024291
495	24 50 25	22.2485955	2020202
496	24 60 16	22.2710575	2016129
497	24 70 09	22.2934968	2012072
498	24 80 04	22.3159136	2008032
499	24 90 01	22.3383079	2004008
500	25 00 00	22.3606798	2000000

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम 100
501	25 10 01	22 3830293	1996008
502	25 20 04	22 4053565	1992032
503	25 30 09	22 4276615	1988072
504	25 40 16	22 4499443	1984127
505	25 50 25	22 4722051	1980198
506	25 60 36	22 4944438	1976285
507	25 70 49	22 5166605	1972387
508	25 80 64	22 5388553	1968504
509	25 90 81	22 5610283	1964637
510	26 01 00	22 5831796	1960784
511	26 11 21	22 6053091	1956947
512	26 21 44	22 6274170	1953125
513	26 31 69	22 6495033	1949318
514	26 41 96	22 6715681	1945525
515	26 52 25	22 6936114	1941748
516	26 62 56	22 7156334	1937984
517	26 72 89	22 7376340	1934236
518	26 83 24	22 7596134	1930502
519	26 93 61	22 7815715	1926782
520	27 04 00	22 8035085	1923077
521	27 14 41	22 8254244	1919386
522	27 24 84	22 8473193	1915709
523	27 35 29	22 8691933	1912046
524	27 45 76	22 8910463	1908397
525	27 56 25	22 9128785	1904762
526	27 66 76	22 9346899	1901141
527	27 77 29	22 9564806	1897533
528	27 87 84	22 9782506	1893939
529	27 98 41	23 0000000	1890359
530	28 09 00	23 0217289	1886792
531	28 19 61	23 0434372	1883239
532	28 30 24	23 0651252	1879699
533	28 40 89	23 0867928	1876173
534	28 51 56	23 1084400	1872659
535	28 62 25	23 1300670	1869159
536	28 72 96	23 1516738	1865672
537	28 83 69	23 1732605	1862197
538	28 94 44	23 1948270	1858736
539	29 05 21	23 2163735	1855288
540	29 16 00	23 2379001	1851852
541	29 26 81	23 2594067	1848429
542	29 37 64	23 2808935	1845018
543	29 48 49	23 3023604	1841621
544	29 59 36	23 3238076	1838235
545	29 70 25	23 3452351	1834862
546	29 81 16	23 3666429	1831502
547	29 92 09	23 3880311	1828154
548	30 03 04	23 4093998	1824818
549	30 14 01	23 4307490	1821494
550	30 25 00	23 4520788	1818182
551	30 36 01	23 4733892	1814882
552	30 47 04	23 4946802	1811594
553	30 58 09	23 5159520	1808318
554	30 69 16	23 5372046	1805054
555	30 80 25	23 5584380	1801802
556	30 91 36	23 5796522	1798561
557	31 02 49	23 6008474	1795332
558	31 13 64	23 6220236	1792115
559	31 24 81	23 6431808	1788909
560	31 36 00	23 6643191	1785714
561	31 47 21	23 6854386	1782531
562	31 58 44	23 7065392	1779359
563	31 69 69	23 7276210	1776199
564	31 80 96	23 7486842	1773050
565	31 92 25	23 7697286	1769912
566	32 03 56	23 7907545	1766784
567	32 14 89	23 8117618	1763668
568	32 26 24	23 8327506	1760563
569	32 37 61	23 8537209	1757469
570	32 49 00	23 8746728	1754386
571	32 60 41	23 8956063	1751313
572	32 71 84	23 9165215	1748252
573	32 83 29	23 9374184	1745201
574	32 94 76	23 9582971	1742160
575	33 06 25	23 9791576	1739130
576	33 17 76	24 0000000	1736111
577	33 29 29	24 0208243	1733102
578	33 40 84	24 0416306	1730104
579	33 52 41	24 0624188	1727116
580	33 64 00	24 0831891	1724138
581	33 75 61	24 1039416	1721170
582	33 87 24	24 1246762	1718213
583	33 98 89	24 1453929	1715266
584	34 10 56	24 1660919	1712329
585	34 22 25	24 1867732	1709402
586	34 33 96	24 2074369	1706485
587	34 45 69	24 2280829	1703578
588	34 57 44	24 2487113	1700680
589	34 69 21	24 2693222	1697793
590	34 81 00	24 2899156	1694915
591	34 92 81	24 3104916	1692047
592	35 04 64	24 3310501	1689189
593	35 16 49	24 3515913	1686341
594	35 28 36	24 3721152	1683502
595	35 40 25	24 3926218	1680672
596	35 52 16	24 4131112	1677852
597	35 64 09	24 4335834	1675042
598	35 76 04	24 4540385	1672241
599	35 88 01	24 4744765	1669449
600	36 00 00	24 4948974	1666667

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम .00
601	36 12 01	24 5153013	1063894
602	36 24 01	24 53 3	1661130
603	36 6 09	24 5560583	16553 5
604	36 48 16	24 5761115	16 5629
605	36 60 25	24 59 4 5	16 2533
606	36 72 36	4 61 06 3	16 0165
607	36 84 49	24 63 3 00	164 44
608	36 96 64	24 65 6 0	161 57
609	37 08 81	24 67 9 54	1642036
610	37 21 00	24 6981 81	16 9514
611	37 33 21	24 184147	16 661
612	3 45 44	24 356538	1633987
613	37 5 69	24 58 3 8	1631321
614	37 69 96	24 9 34	16 8 64
615	3 87 25	24 901 35	16 6016
616	37 94 56	24 81934 3	1623377
617	38 06 89	24 839454	16 0 46
618	38 19 24	24 85 6055	16181 3
619	38 31 61	24 8 0 106	161 509
620	38 44 00	24 500 992	161 993
621	38 56 41	24 9195 16	1610306
622	38 68 84	24 93992 8	160 17
623	38 81 29	24 9 990 9	160 126
624	38 93 76	24 9 599 0	1602554
625	39 06 25	25 0000000	1600000
626	39 18 76	25 01999	159 444
627	39 31 29	25 0399681	1 94896
628	39 43 84	25 059928	1 923 7
629	39 56 41	25 0 95 4	1589 5
630	39 69 00	25 0998008	158730
631	39 81 61	25 119 134	1584 86
632	39 94 24	25 1396102	15822 8
633	40 06 89	25 1594913	15797 9
634	40 19 56	25 1 9 66	1 2 7
635	40 32 25	25 1 9 5 3	1 4803
636	40 44 96	25 2190101	1 5 23
637	40 5 69	2 9 9	1 56959
638	40 0 44	25 4619	156 798
639	40 83 21	5 8149	1564945
640	40 96 00	25 298 13	1562500
641	41 08 81	25 31 9 8	1560 06
642	41 21 64	25 33 189	155 652
643	41 34 49	2 5 4447	1555210
644	41 4 36	2 5 1551	155 95
645	41 60 25	25 3965502	1550388
646	41 73 16	25 4165 0	151 988
647	41 00	5 45 1 1	1 1 95
648	41 99 04	25 4558441	1543 10
649	42 12 01	2 4 1 84	1540832
650	42 00	5 4 5005 6	153 462

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम .00
651	42 38 01	25 5147016	1536098
652	42 51 04	25 5342907	1533 42
653	42 64 09	25 5538647	1531394
654	42 77 16	25 5 34237	1529052
655	42 90 25	25 59296 8	1526 18
656	43 03 36	25 6124969	1524390
657	43 16 49	25 6320112	15220 0
658	43 29 64	25 6515107	1519757
659	43 42 81	25 6 09953	1517451
660	43 56 00	25 6904652	1515152
661	43 69 21	25 7099005	151 859
662	43 8 44	25 29350	15105 4
663	43 95 69	25 745 64	1508296
664	44 08 96	25 6819 5	1 060 4
665	44 22 25	25 8 5939	1503 59
666	44 35 56	25 8069 58	1501502
667	44 48 89	25 8 63131	1499 50
668	44 62 24	25 8456060	149 006
669	44 75 61	25 8650343	1494 68
670	44 89 00	25 8844 82	1492537
671	45 02 41	25 9035567	1490313
672	45 15 84	25 92 9525	1488095
673	45 29 29	25 9422435	1485884
674	45 42 76	25 9615100	1483680
675	45 56 25	25 980 621	1481481
676	45 69 76	26 0000000	14 9290
677	45 83 29	26 0192237	14 105
678	45 96 84	26 0384331	14 4976
679	46 10 41	26 05 6 84	14 2 54
680	46 24 00	26 0 68096	1470588
681	46 37 61	26 0959767	1468429
682	46 51 24	26 1151297	14662 6
683	46 64 89	26 131 687	1464129
684	46 78 56	26 153395	14 1988
685	46 92 25	25 1 2 017	1459854
686	47 05 96	26 191601	145 25
687	47 19 69	26 2106 48	1455604
688	47 33 44	26 2 5 511	1453488
689	47 47 21	26 2488095	14513 9
690	47 61 00	26 26 8 11	14492 5
691	47 74 81	26 2868 89	14471 8
692	47 88 64	26 3058979	1445087
693	48 02 49	26 3248932	1443001
694	48 16 36	26 3438 97	14409
695	48 30 25	26 3628527	1438849
696	48 44 16	26 3818119	1436 57
697	48 58 09	26 401 5 6	1434 70
698	48 72 04	26 419686	143 665
699	48 86 01	26 4386081	1430615
700	49 00 00	26 45 5131	14285 1

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम
701	49 14 01	26 4764046	1426534
702	49 28 04	26 4952826	1424501
703	49 42 09	26 5141472	1422475
704	49 56 16	26 5329983	1420455
705	49 70 25	26 5518361	1418440
706	49 84 36	26 5706605	1416431
707	49 98 49	26 5894716	1414427
708	50 12 64	26 6082694	1412429
709	50 26 81	26 6270539	1410437
710	50 41 00	26 6458252	1408451
711	50 55 21	26 6645833	1406470
712	50 69 44	26 6833281	1404494
713	50 83 69	26 7020598	1402525
714	50 97 96	26 7207784	1400560
715	51 12 25	26 7394839	1398601
716	51 26 56	26 7581763	1396648
717	51 40 89	26 7768557	1394700
718	51 55 24	26 7955220	1392758
719	51 69 61	26 8141754	1390821
720	51 84 00	26 8328157	1388889
721	51 98 41	26 8514432	1386963
722	52 12 84	26 8700577	1385042
723	52 27 29	26 8886593	1383126
724	52 41 76	26 9072481	1381215
725	52 56 25	26 9258240	1379310
726	52 70 76	26 9443872	1377410
727	52 85 29	26 9629375	1375516
728	52 99 84	26 9814751	1373626
729	53 14 41	27 0000000	1371742
730	53 29 00	27 0185122	1369863
731	53 43 61	27 0370117	1367989
732	53 58 24	27 0554985	1366120
733	53 72 89	27 0739727	1364256
734	53 87 56	27 0924344	1362398
735	54 02 25	27 1108834	1360544
736	54 16 96	27 1293199	1358696
737	54 31 69	27 1477439	1356852
738	54 46 44	27 1661554	1355014
739	54 61 21	27 1845544	1353180
740	54 76 00	27 2029410	1351351
741	54 90 81	27 2213152	1349528
742	55 05 64	27 2396769	1347709
743	55 20 49	27 2580263	1345895
744	55 35 36	27 2763634	1344086
745	55 50 25	27 2946881	1342282
746	55 65 16	27 3130006	1340483
747	55 80 09	27 3313007	1338688
748	55 95 04	27 3495887	1336898
749	56 10 01	27 3678644	1335113
750	56 25 00	27 3861279	1333333

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम .00
751	56 40 01	27 4043792	1331558
752	56 55 04	27 4226184	1329787
753	56 70 09	27 4408455	1328021
754	56 85 16	27 4590604	1326260
755	57 00 25	27 4772633	1324503
756	57 15 36	27 4954542	1322751
757	57 30 49	27 5136330	1321004
758	57 45 64	27 5317998	1319261
759	57 60 81	27 5499546	1317523
760	57 76 00	27 5680975	1315789
761	57 91 21	27 5862284	1314060
762	58 06 44	27 6043475	1312336
763	58 21 69	27 6224546	1310616
764	58 36 96	27 6405499	1308901
765	58 52 25	27 6586334	1307190
766	58 67 56	27 6767050	1305483
767	58 82 89	27 6947648	1303781
768	58 98 24	27 7128129	1302083
769	59 13 61	27 7308492	1300390
770	59 29 00	27 7488739	1298701
771	59 44 41	27 7668868	1297017
772	59 59 84	27 7848880	1295337
773	59 75 29	27 8028775	1293661
774	59 90 76	27 8208555	1291990
775	60 06 25	27 8388218	1290323
776	60 21 76	27 8567766	1288660
777	60 37 29	27 8747197	1287001
778	60 52 84	27 8926514	1285347
779	60 68 41	27 9105715	1283697
780	60 84 00	27 9284801	1282051
781	60 99 61	27 9463772	1280410
782	61 15 24	27 9642629	1278772
783	61 30 89	27 9821372	1277139
784	61 46 56	28 0000000	1275510
785	61 62 25	28 0178515	1273885
786	61 77 96	28 0356915	1272265
787	61 93 69	28 0535203	1270648
788	62 09 44	28 0713377	1269036
789	62 25 21	28 0891438	1267427
790	62 41 00	28 1069386	1265823
791	62 56 81	28 1247222	1264223
792	62 72 64	28 1424946	1262626
793	62 88 49	28 1602557	1261034
794	63 04 36	28 1780056	1259446
795	63 20 25	28 1957444	1257862
796	63 36 16	28 2134720	1256281
797	63 52 09	28 2311884	1254705
798	63 68 04	28 2488938	1253133
799	63 84 01	28 2665881	1251564
800	64 00 00	28 2842712	1250000

संख्या	वर्ग	वर्गमूल	व्युत्क्रम
901	81 18 01	30 0166620	1109878
902	81 36 04	30 0333148	1108647
903	81 54 09	30 0499584	1107420
904	81 72 16	30 0665928	1106195
905	81 90 25	30 0832179	1104972
906	82 08 36	30 0998339	1103753
907	82 26 49	30 1164407	1102536
908	82 44 64	30 1330383	1101322
909	82 62 81	30 1496269	1100110
910	82 81 00	30 1662063	1098901
911	82 99 21	30 1827765	1097695
912	83 17 44	30 1993377	1096491
913	83 35 69	30 2158899	1095290
914	83 53 96	30 2324329	1094092
915	83 72 25	30 2489669	1092896
916	83 90 56	30 2654919	1091703
917	84 08 89	30 2820079	1090513
918	84 27 24	30 2985148	1089325
919	84 45 61	30 3150128	1088139
920	84 64 00	30 3315018	1086957
921	84 82 41	30 3479818	1085776
922	85 00 84	30 3644529	1084599
923	85 19 29	30 3809151	1083424
924	85 37 76	30 3973683	1082251
925	85 56 25	30 4138127	1081081
926	85 74 76	30 4302481	1079914
927	85 93 29	30 4466747	1078749
928	86 11 84	30 4630924	1077586
929	86 30 41	30 4795013	1076426
930	86 49 00	30 4959014	1075269
931	86 67 61	30 5122926	1074114
932	86 86 24	30 5286750	1072961
933	87 04 89	30 5450487	1071811
934	87 23 56	30 5614136	1070664
935	87 42 25	30 5777697	1069519
936	87 60 96	30 5941171	1068376
937	87 79 69	30 6104557	1067236
938	87 98 44	30 6267857	1066098
939	88 17 21	30 6431069	1064963
940	88 36 00	30 6594194	1063830
941	88 54 81	30 6757233	1062699
942	88 73 64	30 6920185	1061571
943	88 92 49	30 7083051	1060445
944	89 11 36	30 7245830	1059322
945	89 30 25	30 7408523	1058201
946	89 49 16	30 7571130	1057082
947	89 68 09	30 7733651	1055966
948	89 87 04	30 7896086	1054852
949	90 06 01	30 8058436	1053741
950	90 25 00	30 8220700	1052632
951	90 44 01	30 8382879	1051525
952	90 63 04	30 8544972	1050420
953	90 82 09	30 8706981	1049318
954	91 01 16	30 8868904	1048218
955	91 20 25	30 9030743	1047120
956	91 39 36	30 9192497	1046025
957	91 58 49	30 9354166	1044932
958	91 77 64	30 9515751	1043841
959	91 96 81	30 9677251	1042753
960	92 16 00	30 9838668	1041667
961	92 35 21	31 0000000	1040583
962	92 54 44	31 0161248	1039501
963	92 73 69	31 0322413	1038422
964	92 92 96	31 0483494	1037344
965	93 12 25	31 0644491	1036269
966	93 31 56	31 0805405	1035197
967	93 50 89	31 0966236	1034126
968	93 70 24	31 1126984	1033058
969	93 89 61	31 1287648	1031992
970	94 09 00	31 1448230	1030928
971	94 28 41	31 1608729	1029866
972	94 47 84	31 1769145	1028807
973	94 67 29	31 1929479	1027749
974	94 86 76	31 2089731	1026694
975	95 06 25	31 2249900	1025641
976	95 25 76	31 2409987	1024590
977	95 45 29	31 2569992	1023541
978	95 64 84	31 2729915	1022495
979	95 84 41	31 2889757	1021450
980	96 04 00	31 3049517	1020408
981	96 23 61	31 3209195	1019368
982	96 43 24	31 3368792	1018330
983	96 62 89	31 3528308	1017294
984	96 82 56	31 3687743	1016260
985	97 02 25	31 3847097	1015228
986	97 21 96	31 4006369	1014199
987	97 41 69	31 4165561	1013171
988	97 61 44	31 4324673	1012146
989	97 81 21	31 4483704	1011122
990	98 01 00	31 4642654	1010101
991	98 20 81	31 4801525	1009082
992	98 40 64	31 4960315	1008065
993	98 60 49	31 5119025	1007049
994	98 80 36	31 5277655	1006036
995	99 00 25	31 5436206	1005025
996	99 20 16	31 5594677	1004016
997	99 40 09	31 5753068	1003009
998	99 60 04	31 5911380	1002004
999	99 80 01	31 6069613	1001001
1000	1 00 00 00	31 6227766	1000000

परिशिष्ट द

संख्याओ के साधारण लघुगणक

किसी संख्या (सारणी मे N) का प्रसामान्य लघुगणक वह घात है जिस तक N प्राप्त करने के लिए 10 को अवश्य बढाया जाना चाहिए। 'प्रसामान्य" विशेषण यह सूचित करता है कि लघुगणक किसी दूसरे आधार की अपेक्षा आधार 10 के प्रति है – उदाहरण के लिए, $e = 2\ 71828$, जो 'प्राकृतिक लघुगणकों का आधार है। जब किसी विशेषण के बिना अकेले 'लघुगणक" शब्द का प्रयोग किया जाता है, तो सामान्यतया यह समझा जाता है कि लघुगणक से प्रसामान्य लघुगणक अभिप्रेत है। लघुगणक दो भागो से बनता है – (1) *पूर्णांश*, तथा (2) *अपूर्णांश*।

पूर्णांश हमेशा पूर्ण संख्या या शून्य होता है और इसका निर्धारण निम्न नियम से किया जाता है

यदि $N \geq 1$, तो पूर्णांश धनात्मक होता है और इसका मान N के उन अंको की संख्या से एक कम होता है, जो दशमलव बिन्दु के बाई ओर होते हैं। उदाहरणार्थ,

N	पूर्णांश
4568	3
456 8	2
45 68	1
4 568	0

यदि $N < 1$, तो पूर्णांश ऋणात्मक होता है, और इसका मान दशमलव बिन्दु के ठीक दाई ओर के शून्यो की संख्या से एक अधिक होता है। उदाहरणार्थ,

N	पूर्णांश
0 4568	−1 या 9 − 10
0 04568	−2 या 8 − 10
0 004568	−3 या 7 − 10
0 0004568	−4 या 6 − 10

अपूर्णांश हमेशा दशमलव या शून्य होता है। यह वैसी सारणी से प्राप्त होता है जो यहाँ दी जा रही है। *अंको के किसी भी दिए हुए समुच्चय के लिए अपूर्णांश एक ही होता है, भले ही दशमलव बिन्दु किसी भी स्थान पर क्यों न लगा दिया जाए।* इस प्रकार, अभी जो आठ N दिये गये हैं, उन सबका अपूर्णांश 0.659726 है।

पूर्णांश तथा अपूर्णांश को एकत्र करने से लघुगणक प्राप्त होता है। N के ऊपर दिये हुए आठ मानों के लिए,

N	लघुगणक
4568	3 659726
456 8	2 659726
45 68	1 659726
4 568	0 659726
0 4568	9 659726 − 10
0 04568	8 659726 − 10
0 004568	7 659726 − 10
0 0004568	6 659726 − 10

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
100	000000	000434	000868	001301	0017 4	002166	00 598	0030 9	003461	003891	432
1	43 1	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174	428
2	8600	90 6	9451	99 6	010300	010724	011147	011570	011993	012415	424
3	01 837	013259	013680	014100	4521	4340	5360	5779	6 97	6616	420
4	7033	7451	7868	8284	8700	9116	9532	9947	020361	020775	416
105	0 1189	0 1603	0 2016	0 24 8	0 2841	023 52	023664	024075	4486	4896	412
6	5306	5715	6125	6533	6942	7350	7757	8 64	8571	8978	408
7	9364	9783	030135	030600	031004	031408	031812	03 216	03 619	033021	404
8	033424	0338 6	4 7	46 8	50 9	5430	5830	6230	66 9	7028	400
9	7426	7825	8 3	86 0	9017	9414	9811	040 07	040602	040998	397
110	041393	041787	04 18	04 576	04 969	04336	043 55	044148	044540	044932	393
1	5323	5714	6 05	6495	6885	7 75	7664	8053	8442	8830	390
2	9 18	9606	9993	050380	050 66	051153	051538	0519 4	05 309	052694	386
3	053078	053463	053846	4 30	4613	4996	5378	5760	6142	65 4	383
4	69 5	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942	060320	379
115	060698	061075	061452	0618 9	062206	062582	062958	063333	063709	4083	376
6	44 8	483	5 06	5580	5953	63 6	6699	7071	7 43	7815	373
7	8 86	8557	89 8	9 98	9 68	0703 8	070407	070776	071145	071514	370
8	071882	07 250	072617	072985	0733 2	3718	4085	4451	4816	5182	366
9	5547	591	6276	6640	7004	7368	7731	8094	8457	8819	363
120	079181	0 9543	0 9904	080 66	080626	080987	081347	081707	08 067	08 426	360
1	08 785	083 44	083503	3861	4 19	45 6	4934	5 91	5647	6004	357
2	6360	6 16	70 1	74 6	7 91	8 35	8490	89 5	9198	9552	355
3	9 05	090 58	090611	090963	091315	09 667	09 018	09 370	09 721	093071	352
4	0934 2	3772	4122	4471	48 0	5169	5518	5866	6 5	6562	349
125	6910	7 57	7604	7951	8 98	8644	8990	9335	9681	100026	346
6	100371	100715	101059	101403	101747	102091	10 434	10 77	103119	3462	343
7	3804	4146	4487	48 8	5169	55 0	58 1	6191	6 1	6871	341
8	7210	7549	7888	8 7	8565	8903	9 41	9 79	9916	110 53	338
9	110590	1109 6	111263	111599	111934	112270	11 605	112940	113 75	3609	335
130	113943	114 77	114611	114944	115 78	115611	115943	116276	116608	116940	333
1	7271	7603	7934	8 65	8595	89 6	9 56	95 6	9915	120 45	330
2	120574	120903	121231	121560	121888	12 16	12 544	122871	123198	3525	3 8
3	3852	4178	4504	4830	5 56	5481	58 6	6131	6456	6781	325
4	7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690	130012	323
135	130334	130655	130977	131298	131619	131939	132260	132580	132900	32 9	321
6	3539	3858	4177	4496	4814	5133	5 51	5 69	6086	6403	3 8
7	6721	7037	7354	7671	79 7	8303	8618	89 4	9 49	9564	3 6
8	9879	140 94	14 08	1408 2	14 136	141450	141 63	14 0 6	14 389	142702	314
9	143015	3327	3639	3951	4 63	4574	4885	5196	5507	5818	3 1
140	146128	146438	146748	147058	147367	147676	147985	148 94	149603	1489 1	309
1	9219	9527	9835	15014	150449	150756	151063	15 370	151676	151982	307
2	152288	152594	152900	3205	3510	38 5	41 0	44 4	4 8	5032	305
3	5336	5640	5943	6 46	6549	68 2	7154	74	7 59	8061	303
4	8362	8664	8965	9 66	9567	9868	160168	160469	160769	161068	301
145	161368	161667	161967	16 66	16 564	162863	3161	3460	3758	4055	299
6	4353	4650	4947	5244	554	5838	6134	6430	6726	7022	297
7	7317	7613	7908	8 03	8497	8792	9086	9380	9674	9968	295
8	170262	170555	170848	171141	171434	1717 6	172019	172311	17 603	172895	293
9	3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802	291
150	176091	176381	176670	176959	177 48	177536	177825	178113	178401	178689	289
1	8977	9 64	9552	9839	180126	180413	180699	180986	181272	18 558	287
2	181844	18 129	182415	182700	2985	3270	3555	3839	4123	4407	285
3	4691	4975	5 59	5542	58 5	6108	6391	6674	6956	7239	283
4	7521	7803	8084	8366	8647	89 8	9209	9490	9771	190051	281
155	190332	1906 2	190892	191171	191451	191730	192010	19 289	19 567	2846	279
6	3125	3403	3681	3959	4 37	4514	4792	5069	5346	55 3	278
7	5900	6 76	6453	67 9	7005	7281	556	7832	8 07	8382	276
8	8657	8932	9 06	9481	9755	2000 9	200303	200577	200850	201124	274
9	201397	201670	201943	20 16	202488	2761	3033	3305	3577	3848	272
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

$\log e = 0.434294$ $\log \pi = 0.497150$ $\log \sqrt{\pi} = 0.248575$

N	0	1	2	3	4	6	6	7	8	9	D
150	204120	204391	204663	204934	205204	205475	205746	206016	206286	206556	271
1	6826	7096	7365	7634	7904	8173	8441	8710	8979	9247	269
2	9515	9783	210051	210319	210586	210853	211121	211388	211654	211921	267
3	212188	212454	2720	2986	3252	3518	3783	4049	4314	4579	266
4	4844	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221	264
155	7484	7747	8010	8273	8536	8798	9060	9323	9585	9846	262
6	220108	220370	220631	220892	221153	221414	221675	221936	222196	222456	261
7	2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051	259
8	5309	5568	5826	6084	6342	6600	6858	7115	7372	7630	258
9	7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938	230193	256
170	230449	230704	230960	231215	231470	231724	231979	232234	232488	232742	255
1	2996	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276	253
2	5528	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795	252
3	8046	8297	8548	8799	9049	9299	9550	9300	240050	240300	250
4	240549	240799	241048	241237	241546	241795	242044	242293	2541	2790	249
175	3038	3286	3534	3782	4030	4277	4525	4772	5019	5266	248
6	5513	5759	6006	6252	6499	6745	6991	7237	7482	7728	246
7	7973	8219	8464	8709	8954	9198	9443	9687	9932	250176	245
8	250420	250664	250908	251151	251395	251638	251881	252125	252368	2610	243
9	2853	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031	242
180	255273	255514	255755	255996	256237	256477	256718	256958	257198	257439	241
1	7679	7918	8158	8398	8637	8377	9116	9355	9594	9833	239
2	260071	260310	260548	260787	261025	261263	261501	261739	261976	262214	238
3	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3373	4109	4346	4582	237
4	4818	5054	5290	5525	5761	5996	6232	6467	6702	6937	235
185	7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8812	9046	9279	234
6	9513	9746	9980	270213	270446	270679	270912	271144	271377	271609	233
7	271842	272074	272306	2538	2770	3001	3233	3464	3696	3927	232
8	4158	4389	4620	4950	5031	5311	5542	5772	6002	6232	230
9	6462	6692	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525	229
190	278754	278982	279211	279439	279667	279895	280123	280351	280578	280806	228
1	281033	281261	281408	281715	281942	282169	2396	2622	2849	3075	227
2	3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332	226
3	5557	5702	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7578	225
4	7802	8026	8249	8473	8696	8920	9143	9366	9589	9912	223
195	290035	290257	290480	290702	290925	291147	291359	291591	291813	292034	222
6	2256	2478	2699	2920	3141	3363	3584	3804	4025	4246	221
7	4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6226	6446	220
8	6665	6834	7104	7323	7542	7761	7979	8198	8416	8635	219
9	8853	9071	8289	9507	9725	9943	300161	300378	300595	300813	18
200	301030	301247	301464	301681	301898	302114	302331	302547	302764	302980	
1	3196	3412	3628	3844	4059	4275	4491	4706	4921	5136	216
2	5351	5566	5781	5996	6211	6425	6539	6854	7068	7282	215
3	7496	7710	7924	8137	8351	8564	8778	8991	9204	9417	213
4	9630	9843	310056	310268	310481	310693	310906	311118	311330	311542	212
205	311754	311966	2177	2389	2600	2812	3023	3234	3445	3656	211
6	3867	4078	4289	4499	4710	4920	5130	5340	5551	5760	210
7	5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7646	7854	209
8	8063	8272	8481	8689	8398	9106	9314	9522	9730	9938	208
9	320146	320354	320562	320769	320977	321184	321391	321598	321805	322012	207
210	322219	322426	322633	322839	323046	323252	323458	323665	323871	324077	206
1	4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131	205
2	6336	6541	6745	6950	7155	7359	7563	7767	7972	8176	204
3	8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9805	330008	330211	203
4	330414	330617	330819	331022	331225	331427	331630	331832	2034	2236	202
215	2438	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253	202
6	4454	4655	4856	5057	5257	5458	5658	5859	6059	6260	201
7	6460	6660	6860	7060	7260	7459	7659	7858	8058	8257	200
8	8456	8656	8855	9054	9253	9451	9650	9849	340047	340246	199
9	340444	340642	340841	341039	341237	341435	341632	341830	2028	2225	198
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
220	342423	342620	342817	343014	343212	343409	343606	343802	343999	344196	197
1	4392	4589	4785	4981	5179	5374	5570	5766	5962	6157	196
2	6353	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8110	195
3	8305	8500	8694	8889	9083	9278	9472	9666	9860	350054	194
4	350248	350442	350636	350829	351023	351216	351410	351603	351796	1989	193
225	2183	2375	2568	2761	2954	3147	3339	3532	3724	3916	193
6	4108	4301	4493	4685	4876	5068	5260	5452	5643	5834	192
7	6026	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744	191
8	7935	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646	190
9	9835	360025	360215	360404	360593	360783	360972	361161	361350	361539	189
230	361728	361917	362105	362294	362482	362671	362859	363048	363236	363424	188
1	3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301	188
2	5488	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169	187
3	7356	7542	7729	7915	8101	8287	8473	8659	8845	9030	186
4	9216	9401	9587	9772	9958	370143	370328	370513	370698	370883	185
235	371068	371253	371437	371622	371806	1991	2175	2360	2544	2728	184
6	2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4198	4382	4565	184
7	4748	4932	5115	5298	5481	5664	5846	6029	6212	6394	183
8	6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216	182
9	8398	8580	8761	8943	9124	9306	9487	9668	9849	380030	181
240	380211	380392	380573	380754	380934	381115	381296	381476	381656	381837	181
1	2017	2197	2377	2557	2737	2917	3097	3277	3456	3636	180
2	3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5428	179
3	5606	5785	5964	6142	6321	6499	6677	6856	7034	7212	178
4	7390	7568	7746	7923	8101	8279	8456	8634	8811	8989	178
245	9166	9343	9520	9698	9875	390051	390228	390405	390582	390759	177
6	390935	391112	391288	391464	391641	1817	1993	2169	2345	2521	176
7	2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4277	176
8	4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025	175
9	6199	6374	6548	6722	6896	7071	7245	7419	7592	7766	174
250	397940	398114	398287	398461	398634	398808	398981	399154	399328	399501	173
1	9674	9847	400020	400192	400365	400538	400711	400883	401056	401228	173
2	401401	401573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949	172
3	3121	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663	171
4	4834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370	171
255	6540	6710	6881	7051	7221	7391	7561	7731	7901	8070	170
6	8240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764	169
7	9933	410102	410271	410440	410609	410777	410946	411114	411283	411451	169
8	411620	1788	1956	2124	2293	2461	2629	2796	2964	3132	168
9	3300	3467	3635	3803	3970	4137	4305	4472	4639	4806	167
260	414973	415140	415307	415474	415641	415808	415974	416141	416308	416474	167
1	6641	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135	166
2	8301	8467	8633	8798	8964	9129	9295	9460	9625	9791	165
3	9956	420121	420286	420451	420616	420781	420945	421110	421275	421439	165
4	421604	1768	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082	164
265	3246	3410	3574	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718	164
6	4882	5045	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6186	6349	163
7	6511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	7811	7973	162
8	8135	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591	162
9	9752	9914	430075	430236	430398	430559	430720	430881	431042	431203	161
270	431364	431525	431685	431846	432007	432167	432328	432488	432649	432809	161
1	2969	3130	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409	160
2	4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004	159
3	6163	6322	6481	6640	6799	6957	7116	7275	7433	7592	159
4	7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175	158
275	9333	9491	9648	9806	9964	440122	440279	440437	440594	440752	158
6	440909	441066	441224	441381	441538	1695	1852	2009	2166	2323	157
7	2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3889	157
8	4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449	156
9	5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003	155
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
280	447158	447313	447468	447623	447 78	447933	4 8 99	448 4	448397	448 52	155
1	8706	8861	9015	91 0	9324	91 8	9 3	13	59 1	450095	154
2	450249	450403	450557	450 11	450865	4510 8	451172	4513 5	45 479	1633	154
3	1786	1940	2093	2 7	400	2553	2700	2859	3012	3165	153
4	3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4540	469	153
285	4845	4997	5150	530	5454	5606	5758	5910	6062	62 4	152
6	6366	6518	6670	65 1	6973	7125	7276	7 28	7579	7731	152
7	7882	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9 91	92 2	151
8	9392	9543	9694	9845	9 95	460146	460 96	460447	46 597	460743	151
9	460898	461048	461198	461348	461433	1643	1799	1948	2098	2248	150
290	462398	462548	46 697	462847	462997	463146	463 95	463445	463594	4637 4	150
1	3893	4042	41 1	4340	4 9	4539	4 88	43 5	5 5	5234	149
2	5383	5532	5 80	5 9	5977	6126	6 7	6423	65 1	6719	149
3	6868	0 6	7164	7312	7460	7609	7756	904	8 5	8200	148
4	8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	95 7	9675	148
295	9822	9969	470116	470 63	470 10	470557	470704	470851	470999	471 45	147
6	471292	471438	1585	17 2	1878	20 5	2171	318	2464	2610	146
7	2 56	2903	3049	31 5	3341	3487	3633	3779	3925	4071	146
8	4 16	4 62	4508	4 3	4 9	4944	5 0	5 35	5381	5525	146
9	5671	5816	5962	6107	62	6397	654	6697	68	6976	145
300	477121	477 66	477411	477555	477700	477844	477989	478133	478278	4784 2	145
1	8566	8 11	8 5	8 9	9143	9287	94 1	95	9719	9863	144
2	48 07	480151	48 294	483 8	480582	480725	4808 9	4810 7	481156	481299	144
3	1443	1 86	1 29	1872	2016	2159	302	44	588	2731	143
4	2874	3 16	3159	3302	3445	587	37 0	3872	4015	4157	143
305	4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5 95	5437	5579	142
6	57 1	5863	6005	6147	6289	6 0	6572	6/1	69 5	6997	142
7	7138	7 30	7421	76 3	7	78 5	35	81 7	8759	8410	141
8	85 1	8 92	8933	89 4	9114	9 5	9335	9537	96 7	99 8	141
9	9958	490099	4902 9	490383	4905 0	490561	490801	490941	491081	491 22	1 0
310	491362	491 02	491642	491782	4919 2	49 052	492201	492341	9 481	492621	140
1	2760	2900	3040	31 9	3 19	3458	35 7	3737	3 76	4015	139
2	4155	4294	4 33	45 2	4711	48 0	4989	51 8	5267	5406	139
3	5544	5683	52 2	5 0	6059	6238	6376	6515	6653	6791	139
4	6930	7068	7206	7344	7 83	7621	7759	7897	8035	8173	138
315	8311	8448	8586	8724	8862	8999	9137	9 75	9412	9550	138
6	9687	98 4	9 6	500099	500236	500374	500511	500648	500785	500922	137
7	501059	501196	501 33	14 0	1607	1744	1880	17	2154	2291	137
8	24 7	2 64	2700	2837	2973	3109	3 45	3382	3518	3655	136
9	3791	33 7	4063	4199	43 5	4471	4607	4743	4878	5014	136
320	505150	505286	505421	505557	505693	505828	505964	506099	506234	506370	136
1	6505	6640	6776	6911	7 46	7181	7316	7451	7586	7721	135
2	78 6	7991	8126	8260	8395	8530	8664	8799	8934	9068	135
3	9203	9337	94 1	9606	97 0	9874	510009	510143	510 77	510411	134
4	510545	510679	510813	510947	511081	511215	1349	1482	1616	1750	134
325	1883	017	2151	2284	2418	2551	2684	2818	2951	3084	133
6	32 8	3351	3484	3617	37 3	3883	4016	4149	4282	4415	133
7	4548	4681	4813	4946	50 9	5211	5344	5 76	5609	5741	133
8	5874	6006	61 9	6 71	6403	6535	6668	6800	6932	7064	132
9	7196	7328	7460	7592	77 4	7855	7987	8119	8251	8382	132
330	518514	518646	518777	518909	519040	519171	519303	519434	519566	519697	131
1	9828	49 9	520090	520 1	5 03 3	520484	520615	520745	5 0876	521007	131
2	5211 8	521269	1400	1530	1661	179	1922	2053	2183	2314	131
3	2444	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616	130
4	3 6	38 6	4006	4136	4 66	4395	4526	4656	4785	4915	130
335	5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210	129
6	6339	6469	6 98	67 7	6856	6985	7114	7243	737	7501	129
7	7630	7 9	7888	8015	8145	8274	8402	8531	8660	8788	129
8	8917	9045	9174	9302	9430	9559	9687	9815	9943	530072	128
9	530200	530328	530456	530584	530712	530840	530968	531096	531 23	1351	128
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
340	531479	531607	531734	531852	531990	532117	532245	532372	532500	532627	128
1	2754	2832	3009	3135	3 64	3391	3519	3645	3772	3899	127
2	4076	4153	4390	4407	4 34	4661	4787	4914	5041	5167	127
3	5794	5471	5547	56 4	5800	5927	6053	6180	6306	6432	126
4	6558	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693	126
345	7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8925	8951	126
6	9076	9202	9327	9452	9578	9703	9829	9954	540079	540204	125
7	540329	540455	540580	540705	540830	540955	541080	541205	1330	1454	125
8	1579	1704	18 9	1953	20 8	2 03	2327	2452	2576	2701	125
9	28 5	2950	30 4	3133	33 3	3447	3571	3696	3820	3944	124
350	544068	544192	544316	544440	544564	544688	544812	544936	545060	545183	124
1	5307	5431	5555	56 8	5802	59 5	6049	6172	6296	6419	124
2	6543	66 6	6789	6913	[illegible]	1 9	28	7405	7529	7652	123
3	7775	99	80 1	8144	8 7	7399	851	8635	8758	8881	123
4	9003	9126	9 49	9371	9494	9616	9 39	9861	9984	550106	123
355	550228	550351	550473	550 95	550 17	550840	550962	551084	551206	1328	122
6	1450	1572	1694	1816	1 8	20	131	2303	2425	2547	122
7	2668	2 90	2911	3033	3155	32 6	3398	3519	3640	3762	122
8	3883	4004	4126	4 47	4368	4490	4610	4 31	4852	4973	121
9	5094	5215	5336	5457	55 8	5699	58 0	5940	6061	6182	121
360	556303	556423	556544	556664	556785	556905	557026	557146	557267	557387	120
1	7507	7627	48	7868	988	8 08	8 28	8349	8469	9589	120
2	8709	8829	8948	9068	9 88	9308	9428	9548	9667	9787	120
3	9907	56 0 6	560146	56 5	560 95	56 4	5606 4	560743	560863	560982	119
4	561101	1221	1340	1453	15 8	1698	1817	1936	2055	2174	119
365	2 93	2412	2531	2650	2 69	2897	3006	3125	3244	3362	119
6	3481	3603	3718	3837	3955	4 4	4192	4311	4429	4548	119
7	4556	4 84	4903	5 21	5139	5 57	51 6	5494	5612	5730	118
8	5949	5965	6084	6 07	61 0	6437	6555	6673	6791	6909	118
9	7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084	118
370	568202	568319	568436	568554	568671	568788	568905	569023	569140	569257	117
1	9374	9491	9608	9725	9842	9959	5700 6	570193	570309	570426	117
2	570543	570660	570 76	570893	571010	5711 6	1243	1359	1476	1592	117
3	1709	1825	1942	2058	21 4	2291	2407	2523	2639	2755	116
4	2872	2988	3104	3220	3 36	3452	3568	3684	3800	3915	116
375	4031	4147	4263	4379	4494	4610	4 6	4941	4957	5072	116
6	5188	5303	5419	5534	5650	5 65	5880	5996	6111	6226	115
7	6341	6457	6572	6587	69 7	6917	7032	7147	7262	7377	115
8	7492	7607	7722	7836	951	8066	8181	8295	8410	8525	115
9	8635	8754	8868	8983	9097	9212	93 6	9441	9555	9669	114
380	579784	579898	580012	580126	580241	580355	580469	580583	580697	580811	114
1	580925	581039	1153	1267	1381	1495	1608	1 2	1836	1950	114
2	2063	2177	2 91	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085	114
3	3199	3312	34 6	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218	113
4	4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348	113
385	5461	5574	5686	5799	5912	60 4	6137	6250	6362	6475	113
6	6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599	112
7	7711	78 3	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720	112
8	8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838	112
9	9950	590061	590173	590 84	590396	590507	590619	590730	590842	590953	112
390	591065	591176	591287	591399	591510	591621	591732	591843	591955	592066	111
1	2177	2288	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175	111
2	3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282	111
3	4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5380	110
4	5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487	110
395	6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586	110
6	7695	7805	7914	80 4	8134	8243	8353	8462	8572	8681	110
7	8791	8900	9009	9119	9229	9337	9446	9556	9665	9774	109
8	9883	9992	600101	600210	600319	600428	600537	600646	600755	600864	109
9	600973	601082	1191	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951	109
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
400	602060	602169	602277	602386	602494	602603	602711	602819	602928	603036	108
1	3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118	108
2	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4871	4912	5089	5197	108
3	5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	60 9	6166	6274	108
4	6381	6489	6596	6704	6811	6919	7026	7133	7241	7348	107
405	7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419	107
6	8525	8633	8740	8847	8954	9061	9167	9274	9331	9 88	107
7	9594	9701	9808	9914	6100 1	610129	610234	610341	610 47	610554	107
8	610660	610767	610873	610 79	1086	1192	1298	1405	1511	1617	106
9	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678	106
410	612784	612890	612996	613102	613207	613313	613419	613525	61 530	613736	106
1	3842	3947	4053	41 9	4 4	4370	4475	4581	4686	4792	106
2	4897	5003	5108	5213	53 9	5424	5529	5634	5740	5845	105
3	5950	6055	6160	6 5	6370	6 76	6581	6686	6790	6895	105
4	7000	7105	7210	7315	7 20	7525	7629	7734	7839	7343	105
415	8048	8153	8257	8362	8466	8571	8676	8780	8884	8989	105
6	9093	9198	9302	9 06	9 11	9 15	9719	98 4	9928	620032	104
7	620136	620 40	6203 4	6204 8	620 52	62 6	620760	620864	620958	1072	104
8	1176	1280	13 4	1 28	15 2	1 95	1799	1903	2007	2110	104
9	2214	2318	2421	2525	2628	2732	2335	2939	3042	3146	104
420	623249	623353	623456	623559	623663	623766	623869	623973	624076	624179	103
1	4282	4385	4488	4591	4 35	4738	4 01	5004	5107	5210	103
2	5312	5415	5518	5621	5724	5327	53 9	6 3	6135	6238	103
3	6340	6443	6545	66 3	6751	63 3	6956	7058	7161	7263	103
4	7366	7468	7571	7673	7775	73 8	7980	8082	8185	8287	102
425	8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308	102
6	9410	9512	9613	9715	9817	9313	630021	630123	630224	630326	102
7	630428	630530	630631	630733	630835	630935	1 38	1139	1241	134	102
8	1444	1545	1647	1748	1849	1951	2 52	2153	2255	2356	101
9	2457	2559	2660	2761	286	2963	3064	3165	3266	3367	101
430	633468	633569	633670	633771	633872	633973	634074	634175	634276	634376	101
1	4477	4578	4679	4779	4 80	4981	5081	5182	5283	5383	101
2	5484	5584	5685	5785	5886	5986	6087	6187	6287	6388	100
3	6488	6588	6688	6783	6889	6989	70 9	7189	7290	7390	100
4	7490	7590	7630	7790	7890	7990	8090	8190	8290	8389	100
435	8489	8589	8689	8789	8888	8988	9088	9188	9287	9387	100
6	9486	9586	9686	9785	9889	9984	640084	640183	640 83	640382	99
7	640481	640581	640680	640779	640879	640978	1077	1177	1276	1375	99
8	1474	1573	1672	1771	1871	1970	2069	2168	2267	2366	99
9	2465	2563	2662	2761	2860	2959	3058	3156	3255	3354	99
440	643453	643551	643650	643749	643847	643946	644044	644143	644 4	644340	98
1	4439	4537	4636	4734	4832	4931	5029	5127	5226	5324	98
2	5422	5521	5619	5717	58 5	5913	6011	6110	6208	6306	98
3	6404	6502	6600	6698	6796	6894	6992	7089	7187	7285	98
4	7383	7481	7579	7676	7774	7872	7969	8067	8165	8 62	98
445	8360	8458	8555	8653	8750	8848	8945	9043	9140	9 37	97
6	9335	9432	9530	9627	9724	9821	9919	650016	650113	650 10	97
7	650308	650405	650502	650599	650696	650 93	650890	0987	1084	1181	97
8	1278	1375	1472	1569	1666	1762	1859	1956	2053	2150	97
9	2246	2343	2440	2536	2633	2730	2826	2923	30 9	3116	97
450	653213	653309	653405	653502	653598	653695	653791	653888	653984	654080	96
1	4177	4273	4369	4465	4562	4658	4754	4850	4946	5042	96
2	5139	5 35	5331	5427	5 23	5619	5715	5810	5906	6002	96
3	6098	6194	6290	6386	6482	6577	6673	6769	6864	6960	96
4	7056	715	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	916	96
455	8011	8107	8202	8298	8393	8488	8584	8679	8774	8870	95
6	8965	9060	9155	9 50	9346	944	9536	9631	9725	9321	95
7	9916	660011	660106	660201	660 96	660391	660486	660581	660676	660771	95
8	660865	0960	1055	1150	1245	1339	1 34	1529	1623	1718	95
9	1813	1907	2002	2096	2191	2286	2380	2475	2569	2663	95
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
460	662758	662852	662947	663041	663135	663230	663324	663418	663512	663607	94
1	3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548	94
2	4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487	94
3	5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424	94
4	6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	7360	94
465	7453	7546	7640	7733	78 6	79 0	8013	8106	8199	8293	93
6	8386	8479	8572	8665	8759	8852	8945	9038	9131	9224	93
7	9317	9410	9503	9596	9689	9782	9875	9967	670060	670153	93
8	670.46	670339	670431	670524	670617	670710	670802	670895	0988	1080	93
9	1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005	93
470	672098	672190	672283	672375	672467	672560	672652	672744	672836	672929	92
1	30.1	3113	3 05	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850	92
2	3942	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769	92
3	4861	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687	92
4	5778	5870	5962	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602	92
475	6694	6785	6876	6968	7059	7151	7242	7333	7424	7516	91
6	7607	7698	7789	7881	79 2	80..	8154	8245	8336	8427	91
7	8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337	91
8	9428	9519	9610	9700	9 91	9882	9973	680063	680154	680245	91
9	680336	680426	680517	680607	680698	680 89	680879	0970	1060	1151	91
480	681241	681332	68 422	681513	681603	681693	681784	681874	681964	682055	90
1	2145	2235	23 6	2416	2506	2 96	2686	2777	2867	2957	90
2	3047	3137	3227	3317	[illegible]	3497	3587	3677	3767	3857	90
3	3947	4037	4127	4 17	4307	4396	4486	4 76	4666	4756	90
4	4845	4935	50.5	5114	[illegible]	5.94	5383	5473	5563	5652	90
485	5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6458	6547	89
6	6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7440	89
7	7529	7618	7707	7796	7 86	7975	8064	8153	8 4	8331	89
8	8420	8509	8598	8687	8 6	8865	89 4	9042	9131	9220	89
9	9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930	690019	690107	89
490	690196	690285	690373	690462	690550	690639	690728	690816	690905	690993	89
1	1081	1170	1258	1347	1435	1 4	1 2	1700	1789	1877	88
2	1965	2053	2142	2 30	2318	2406	2 34	2 83	2671	2759	88
3	2847	2935	30 3	3111	3 99	3 87	3375	3463	3551	3639	88
4	37 7	3815	3903	3991	4078	4166	4.54	43.2	4430	4517	88
495	4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5307	5394	88
6	5482	5569	5657	5744	583	5919	6007	6094	6182	6 69	87
7	6356	64 4	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142	87
8	7229	7317	7404	7491	75 8	7665	77 2	7839	7926	8014	87
9	8101	8188	8 75	8362	8449	8535	86.2	8709	8796	8883	87
500	698970	699057	699144	699231	699317	699404	699491	699578	699664	699751	87
1	9838	9 4	70 011	700098	700184	700271	7003 8	700444	700531	7006 7	87
2	700704	700790	0877	0963	1 0	1136	1 22	1309	1395	1482	86
3	15 8	1654	17 1	1 27	1913	1999	2036	2172	2258	2344	86
4	2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	30.3	3119	3205	86
505	3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065	86
6	4151	4236	43.2	4408	4494	45 9	4665	4751	4837	[illegible]	86
7	5008	5094	5179	5 65	5350	5436	55	5607	5693	5778	86
8	5864	5949	60 5	6120	6206	6 91	6376	6462	6547	6632	85
9	6718	6803	6888	6974	7059	7144	72.9	7315	7400	7485	85
510	707570	707655	707740	707826	707911	707996	708081	708166	708251	708336	85
1	8421	8506	85 1	8676	8761	8846	8931	90 5	9 00	9185	85
2	9270	9355	9440	9524	9609	9694	97 9	9863	9948	710033	85
3	710117	710202	710287	710371	710456	710540	710625	710710	710794	0879	84
4	0963	1048	1132	1217	1301	1385	14 0	1554	1639	1723	84
515	1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2566	84
6	2650	2 34	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3323	3407	84
7	3491	3575	3659	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246	84
8	4330	4414	4497	4581	4665	4749	4833	4916	5000	5084	84
9	5167	5 51	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920	84
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
520	716003	716087	716170	716254	716337	716421	716504	716 88	716671	716754	83
1	6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587	83
	7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	82 3	8336	8419	83
3	8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248	83
4	9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	7 0077	83
525	720159	720242	720325	720407	720490	720573	7206 5	720738	720821	0903	83
6	0986	1068	1151	1233	13 6	1 8	1481	1563	1646	1728	82
7	1311	1893	1975	2058	2140	2222	2 05	2387	2469	2552	82
8	2634	27 6	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3 91	3374	8
9	3456	3538	3620	3702	3 84	3866	3948	4030	4112	4 34	82
530	7 4 76	724358	724440	24522	724604	7 4685	724767	724849	724931	725013	82
1	5095	5176	5258	5340	5 2	5503	55 5	5667	5748	5830	82
2	5912	5993	6075	6156	6238	6320	6 0	6 63	6564	6646	82
3	6727	6809	6890	6972	70 3	7134	72 6	7 97	73 9	7460	81
4	7541	7623	7704	7785	7866	7948	8023	8110	8191	8273	80
535	8354	8435	85 6	8597	8678	8759	8841	8922	9003	9084	81
6	9 65	9246	9327	9408	9 89	9 70	9651	9732	9813	9893	8
7	9974	7300 5	730136	730217	730 8	730378	730459	730540	730621	730702	81
8	730 32	0863	09 4	10 4	1105	1186	12 6	13 7	14 8	1508	81
9	1589	1669	1750	1830	1911	1991	20 2	2152	2233	2313	81
540	732394	732474	732555	732635	732715	732796	7328 6	732956	733037	733117	80
1	3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	9	3839	3919	80
2	3999	4079	41 0	4 40	43 0	4320	4400	4 60	4640	4720	80
3	4800	4880	49 0	5040	5120	5200	5279	5 9	5439	5519	80
4	5599	5679	5759	58 8	59 8	5 98	6078	6157	6237	6317	80
545	6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113	80
6	7 93	7272	733	74 1	511	7590	7670	7749	7829	79	79
7	7987	8067	81 6	8 25	8 05	8 84	84 3	85 3	86 2	8701	79
8	8781	8860	89 9	9 18	9 07	91 7	92 6	9335	94 4	9493	79
9	9572	9651	9731	9810	9889	9968	740047	740126	740205	740284	79
550	740363	740442	40521	740600	740 78	740757	740836	740915	740994	74 073	79
1	1 52	12 0	13 9	1388	1467	1545	1624	1703	1782	1860	79
2	1939	20 8	20 6	2 5	22 4	2 32	24 1	24 9	2568	2647	79
3	2725	2 04	2 2	2961	3039	3 18	3 96	3275	33 3	3431	78
4	3510	3588	3667	3745	38 3	3902	3980	4058	4136	4215	78
555	4293	4371	4449	4 28	4606	4684	4762	4840	4919	4997	78
6	5075	51 3	5 1	5309	5387	5465	5543	56 1	5699	5777	78
7	58 5	59 3	6011	60 9	61 7	6245	6323	6401	64 9	6556	8
8	6634	6712	6 90	6863	6	0 3	7 01	7179	72 6	7334	78
9	74 2	7489	7567	76 5	772	7800	7878	7955	8033	8110	78
560	748188	748266	748343	748421	748 98	748576	748653	748731	748808	748885	77
1	8963	90 0	91 8	9 5	9 7	93 0	9427	9504	9582	9659	77
2	9735	98 4	9 91	9969	7500 5	750 3	750200	750277	750354	750431	77
3	750508	750 86	750663	750740	0817	0894	0971	1048	1125	1202	77
4	1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972	77
565	2048	21 5	2202	2 79	2356	2433	2509	2586	2663	2740	77
6	2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506	77
7	3583	3660	3736	3 13	3889	3 66	404	4119	4 95	4272	77
8	4348	4425	4 01	4578	4 54	4730	4807	4883	4960	5036	76
9	5112	5189	5 65	5341	5417	5494	5570	5646	5722	5799	76
570	755875	755951	756027	756103	756180	7562 6	755332	756408	756484	756560	6
1	6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320	76
2	7396	7472	7548	7624	7700	7775	8 1	9 7	8003	8079	6
3	8 55	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8 61	8836	76
4	8912	8988	9063	9139	9214	9290	9 66	9441	9517	9592	76
575	9668	9743	98 9	9894	9970	760045	760121	760196	760 72	760347	75
6	760422	760498	760573	760649	7607 4	0799	0875	0950	10 5	1101	75
7	1176	1 1	13 6	1402	1477	155	1 27	170	1778	1853	75
8	19 8	2003	2078	2153	22 8	2303	23 9	2453	25 9	2604	75
9	26 9	2754	2829	2904	2978	3053	3128	3 03	32 8	3353	75
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
580	763428	763503	763578	763653	763727	763802	763877	763952	764027	764101	75
1	4176	4251	4326	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848	75
2	4923	4938	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5520	5594	75
3	5669	5743	5918	5892	5966	6041	6115	6 90	6264	6338	74
4	6413	6487	6562	6636	6710	6785	6859	6933	7007	7082	74
585	7156	7230	7304	7379	7453	75 7	7601	7675	7749	7823	74
6	7898	7972	8046	8 20	8 94	8 68	8342	84 6	8490	8564	74
7	8539	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9 56	9230	9303	74
8	9377	9451	95 5	9 99	9673	9746	98 0	9894	9968	770042	7
9	770115	770189	770 63	770336	7 0410	770484	770557	770631	770705	0778	74
590	770 52	770976	770999	771073	771146	771220	771293	771367	771440	771514	74
1	1587	1661	1734	1808	1881	1955	20 8	2102	2175	2248	73
2	23 2	2335	2468	254	2615	2688	276	2835	2908	298	73
3	3 55	31 8	3 01	3 74	3348	34 1	3494	3567	3640	37 3	73
4	3 86	3360	3333	4006	4079	4152	4225	4298	4371	4444	73
595	4517	4 90	4663	4736	4809	4887	4955	50 8	5100	5173	73
6	5 46	5319	539	5465	5538	56 0	5663	5756	5829	5902	73
7	53 4	6047	6 20	6 93	6 65	6339	64 1	6483	6556	6629	73
8	6701	6774	6846	69 9	639	7064	7 37	7209	7282	7354	73
9	74 7	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079	72
600	7 9151	778 24	778 96	778368	778441	778513	778585	778658	778730	778802	72
1	8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524	72
2	9 96	9659	974	93 3	9985	9957	7800 9	780 01	780173	780245	72
3	7803 7	780389	780 61	780533	780705	780577	0 49	0821	0893	0965	72
4	1037	11 9	1181	1 53	13 4	1 96	1468	1540	1612	1684	72
605	1755	18 7	1899	1971	2042	2114	2 86	2258	2329	2401	72
6	2473	2544	2 16	2688	2759	283	2902	2974	3046	3117	72
7	3189	3 60	333	3 3	34 5	35 6	36 8	3689	3761	3832	71
8	33 4	3075	40 6	4118	4189	4 61	4332	4403	4475	4546	71
9	4617	4689	4760	4831	4302	43 4	5045	5116	5187	5259	71
610	785330	785 01	785472	785543	7856 5	785686	785757	7858 8	785899	785970	71
1	6041	6112	6193	6 54	63 5	6 96	6467	6538	6609	6680	71
2	6 51	69	6993	6964	7035	7 06	7 77	7 48	7319	7390	71
3	7 60	7531	760	76 3	7744	78 5	7895	7956	80 7	8098	71
4	8168	8 39	8310	8391	8 51	8522	8 93	8663	8734	8804	71
615	8575	8946	90 6	9087	9 57	9 28	9 99	9369	9440	9510	71
6	9591	9651	97 2	9792	9863	9933	790004	7900 4	790 44	790 5	70
7	790 85	790356	7904 6	790436	790567	790637	0707	0778	0848	09 8	70
8	0989	10 9	11 9	1193	1269	1340	14 0	1480	1550	1620	0
9	1631	1761	1831	1901	19 1	2041	2111	2181	2252	2322	70
620	79 397	79 467	79 53	79 60	79 672	79 747	79 812	79 882	79 952	7930 2	70
1	309	3167	3231	3301	3371	3441	35 1	3581	3651	3721	70
2	3 40	3960	3930	40 0	4070	4139	4 09	4 79	4349	4418	70
3	4498	45 8	4627	4697	4 67	4836	4906	4976	5045	5115	70
4	5135	5 54	53 4	5333	5463	5532	560	5672	5741	5811	70
625	5980	5949	6019	6088	6158	6 7	6297	6366	6436	6505	69
6	65 4	6644	6713	6782	6852	69 1	6990	7060	7 29	7198	69
7	7 68	7337	7406	7475	7545	76 4	7693	7752	7821	7890	69
8	7969	80 9	8019	8 67	8 6	8305	8374	8443	85 3	8582	69
9	8651	87 0	8 69	8958	89 7	8996	9065	9134	9203	9272	69
630	799341	799409	7994 8	799547	799616	799685	799754	7998 3	799892	799961	69
1	8009 9	800338	800 67	800 36	800305	800373	80044	800511	800580	800648	69
2	07 7	0786	0854	03 3	099	1061	11 9	1198	1266	1335	69
3	1404	1472	1541	1609	16 8	1747	18 5	1884	1952	2021	69
4	2 59	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705	68
635	2774	2847	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3321	3389	68
6	3457	35 5	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071	68
7	4 39	4 08	4276	4344	44 2	4480	4548	4616	4685	4753	68
8	46 1	4869	4957	50 5	5093	5 61	5229	5297	5365	5433	68
9	5501	5569	5637	5705	5773	5841	5908	5976	6044	6112	68
N	0	1	2	3	4	6	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
640	806180	806248	806316	806384	806451	806519	806587	806655	806723	806790	68
1	6858	6926	6994	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467	68
2	7535	7603	7670	7738	7806	7873	7941	8008	8076	8143	68
3	8211	8279	8346	8414	8481	8549	8616	8684	8751	8818	67
4	8886	8953	9021	9088	9156	9223	9290	9358	9425	9492	67
645	9560	9627	9694	9762	9829	9896	9964	810031	810098	810165	67
6	810233	810300	810367	810434	810501	810569	810636	0703	0770	0837	67
7	0904	0971	1039	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508	67
8	1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178	67
9	2245	2312	2379	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2847	67
650	812913	812980	813047	813114	813181	813247	813314	813381	813448	813514	67
1	3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181	67
2	4248	4314	4381	4447	4514	4581	4647	4714	4780	4847	67
3	4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511	66
4	5578	5644	5711	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175	66
655	6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838	66
6	6904	6970	7036	7102	7169	7235	7301	7367	7433	7499	66
7	7565	7631	7698	7764	7830	7895	7962	8028	8094	8160	66
8	8226	8292	8358	8424	8490	8556	8622	8688	8754	8820	66
9	8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478	66
660	819544	819610	819676	819741	819807	819873	819939	820004	820070	820136	66
1	820201	820267	820333	820399	820464	820530	820595	0661	0727	0792	66
2	0858	0924	0989	1055	1120	1186	1251	1317	1382	1448	66
3	1514	1579	1645	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103	65
4	2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756	65
665	2822	2887	2952	3018	3083	3148	3213	3279	3344	3409	65
6	3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3930	3996	4061	65
7	4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711	65
8	4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361	65
9	5426	5491	5556	5621	5686	5751	5815	5880	5945	6010	65
670	826075	826140	826204	826269	826334	826399	826464	826528	826593	826658	65
1	6723	6787	6852	6917	6981	7046	7111	7175	7240	7305	65
2	7369	7434	7499	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7951	65
3	8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8595	64
4	8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239	64
675	9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882	64
6	9947	830011	830075	830139	830204	830268	830332	830396	830460	830525	64
7	830589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166	64
8	1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806	64
9	1870	1934	1998	2062	2126	2189	2253	2317	2381	2445	64
680	832509	832573	832637	832700	832764	832828	832892	832956	833020	833083	64
1	3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721	64
2	3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4294	4357	64
3	4421	4484	4548	4611	4675	4739	4802	4866	4929	4993	64
4	5056	5120	5183	5247	5310	5373	5437	5500	5564	5627	63
685	5691	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261	63
6	6324	6387	6451	6514	6577	6641	6704	6767	6830	6894	63
7	6957	7020	7083	7146	7210	7273	7336	7399	7462	7525	63
8	7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156	63
9	8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786	63
690	838849	838912	838975	839038	839101	839164	839227	839289	839352	839415	63
1	9478	9541	9604	9667	9729	9792	9855	9918	9981	840043	63
2	840106	840169	840232	840294	840357	840420	840482	840545	840608	0671	63
3	0733	0796	0859	0921	0984	1046	1109	1172	1234	1297	63
4	1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922	63
695	1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2547	62
6	2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3046	3108	3170	62
7	3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3669	3731	3793	62
8	3855	3918	3980	4042	4104	4166	4229	4291	4353	4415	62
9	4477	4539	4601	4664	4726	4788	4850	4912	4974	5036	62
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
700	845098	845160	845222	845284	845346	845408	845470	845532	845594	845656	62
1	5718	5780	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275	62
2	6337	6399	6461	6523	6585	6646	6708	6770	6832	6894	62
3	6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511	62
4	7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8128	62
705	8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743	62
6	8805	8866	8928	8939	9051	9112	9174	9235	9297	9358	61
7	9419	9481	9542	9604	9565	9726	9788	9349	9911	9972	61
8	850033	850095	850156	850217	850279	850340	850401	850462	850524	850585	61
9	0646	0707	0769	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197	61
710	851258	851320	851381	851442	851503	851564	851625	851686	851747	851809	61
1	1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2797	2358	2419	61
2	2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029	61
3	3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3516	3577	3637	61
4	3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4185	4245	61
715	4306	4367	4428	4489	4549	4610	4670	4731	4792	4852	61
6	4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459	61
7	5519	5580	5640	5701	5761	5022	5892	5943	6003	6064	61
8	6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6609	6668	60
9	6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7152	7212	7272	60
720	857332	857393	857453	857513	857574	857634	857694	857755	857815	857875	60
1	7935	7995	8056	8116	8176	8235	8297	8357	8417	8477	60
2	8537	8597	8657	8718	8778	8839	8893	8958	9018	9078	60
3	9138	9198	9258	9318	9379	9439	9499	9559	9619	9679	60
4	9739	9799	9859	9918	9978	860038	860098	860159	860218	860278	60
725	860338	860398	860458	860518	860578	0637	0697	0757	0817	0877	60
6	0937	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475	60
7	1534	1594	1654	1714	1773	1833	1893	1952	2012	2072	60
8	2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2608	2668	60
9	2728	2787	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263	60
730	863323	863382	863442	863501	863561	863620	863680	363739	863799	863858	59
1	3917	3977	4036	4095	4155	4214	4274	4333	4392	4452	59
2	4511	4570	4630	4689	4748	4808	4867	4926	4985	5045	59
3	5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5519	5578	5637	59
4	5696	5755	5814	5874	5933	5992	6051	6110	6169	6228	59
735	6287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819	59
6	6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409	59
7	7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7998	59
8	8056	8115	8174	8233	8292	8350	8409	8468	8527	8586	59
9	8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173	59
740	869232	869290	869349	869408	869466	869525	869584	869642	869701	869760	59
1	9818	9977	9935	9994	870053	870111	870170	870228	870287	870345	59
2	870404	870462	870521	870579	0638	0596	0755	0813	0872	0930	58
3	0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1398	1456	1515	58
4	1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098	58
745	2156	2215	2273	2331	2389	2448	2506	2564	2622	2681	58
6	2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262	58
7	3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3844	58
8	3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424	58
9	4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4888	4945	5003	58
750	875061	875119	875177	875235	875293	875351	875409	875466	875524	875582	58
1	5640	5698	5756	5813	5871	5929	5987	6045	6102	6160	58
2	6218	6276	6333	6391	6449	6507	6564	6622	6680	6737	58
3	6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7199	7256	7314	58
4	7371	7429	7487	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889	58
755	7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464	57
6	8522	8579	8637	8694	8752	8809	8866	8924	8981	9039	57
7	9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612	57
8	9669	9726	9784	9841	9898	9956	880013	880070	880127	880185	57
9	880242	880299	880356	880413	880471	880528	0585	0642	0699	0756	57
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
760	880814	880871	880928	880985	881042	881099	881156	881213	881271	881328	57
1	1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1858	57
2	1955	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468	57
3	2525	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	2980	3037	57
4	3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605	57
765	3661	3718	3775	3832	3888	3945	4002	4059	4115	4172	57
6	4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739	57
7	4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5192	5248	5305	57
8	5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870	57
9	5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434	56
770	886491	886547	886604	886660	886716	886773	886829	886885	886942	886998	56
1	7054	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7449	7505	7561	56
2	7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123	56
3	8179	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685	56
4	8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246	56
775	9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806	56
6	9862	9918	9974	890030	890086	890141	890197	890253	890309	890365	56
7	890421	890477	890533	0589	0645	0700	0756	0812	0868	0924	56
8	0980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1426	1482	56
9	1537	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1928	1983	2039	56
780	892095	892150	892206	892262	892317	892373	892429	892484	892540	892595	56
1	2651	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3096	3151	56
2	3207	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706	56
3	3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4205	4261	55
4	4316	4371	4427	4482	4538	4593	4648	4704	4759	4814	55
785	4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367	55
6	5423	5478	5533	5588	5644	5699	5754	5809	5864	5920	55
7	5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471	55
8	6526	6581	6636	6692	6747	6802	6857	6912	6967	7022	55
9	7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572	55
790	897627	897682	897737	897792	897847	897902	897957	898012	898067	898122	55
1	8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670	55
2	8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9218	55
3	9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9656	9711	9766	55
4	9821	9875	9930	9985	900039	900094	900149	900203	900258	900312	55
795	900367	900422	900476	900531	0586	0640	0695	0749	0804	0859	55
6	0913	0968	1022	1077	1131	1166	1240	1295	1349	1404	55
7	1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948	54
8	2003	2057	2112	2166	2221	2275	2329	2384	2438	2492	54
9	2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036	54
800	903090	903144	903199	903253	903307	903361	903416	903470	903524	903578	54
1	3633	3687	3741	3795	3849	3904	3958	4012	4066	4120	54
2	4174	4229	4283	4337	4391	4445	4499	4553	4607	4661	54
3	4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202	54
4	5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742	54
805	5796	5850	5904	5958	6012	6066	6119	6173	6227	6291	54
6	6335	6389	6443	6497	6551	6604	6658	6712	6766	6820	54
7	6874	6927	6981	7035	7039	7143	7196	7250	7304	7358	54
8	7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895	54
9	7949	8002	8056	8110	8163	8217	8270	8324	8378	8431	54
810	908485	908539	908592	908646	908699	908753	908807	908860	908914	908967	54
1	9021	9374	9128	9181	9235	9289	9342	9396	9449	9503	53
2	9556	9510	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984	910037	53
3	910091	910144	910197	910251	910304	910358	910411	910464	910518	0571	53
4	0624	0678	0731	0784	0838	0891	0944	0998	1051	1104	53
815	1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1584	1637	53
6	1690	1743	1797	1950	1903	1956	2009	2063	2116	2169	53
7	2222	2275	2328	2381	2435	2488	2541	2594	2647	2700	53
8	2753	2806	2939	2913	2955	3019	3077	3125	3178	3231	53
9	3204	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3701	53
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
880	944483	944532	944581	944631	944680	944729	944779	944828	944877	944927	49
1	4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419	49
2	5499	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5912	49
3	5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403	49
4	6452	6501	6551	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894	49
885	6943	6992	7041	7090	7140	7189	7238	7287	7336	7385	49
6	7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875	49
7	7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364	49
8	8413	8462	8511	8560	8609	8657	8706	8755	8804	8853	49
9	8902	8951	8999	9048	9097	9146	9195	9244	9292	9341	49
890	949390	949439	949488	949536	949585	949634	949683	949731	949780	949829	49
1	9878	9926	9975	950024	950073	950121	950170	950219	950267	950316	49
2	950365	950414	950462	0511	0560	0608	0657	0706	0754	0803	49
3	0851	0900	0949	0997	1046	1095	1143	1192	1240	1289	49
4	1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1775	49
895	1823	1872	1920	1969	2017	2066	2114	2163	2211	2260	48
6	2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744	48
7	2792	2841	2889	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228	48
8	3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711	48
9	3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194	48
900	954243	954291	954339	954387	954435	954484	954532	954580	954628	954677	48
1	4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158	48
2	5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640	48
3	5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120	48
4	6168	6216	6265	6313	6361	6409	6457	6505	6553	6601	48
905	6649	6697	6745	6793	6840	6888	6936	6984	7032	7080	48
6	7128	7176	7224	7272	7320	7368	7416	7464	7512	7559	48
7	7607	7655	7703	7751	7799	7847	7894	7942	7990	8038	48
8	8086	8134	8181	8229	8277	8325	8373	8421	8468	8516	48
9	8564	8612	8659	8707	8755	8803	8850	8898	8946	8994	48
910	959041	959089	959137	959185	959232	959280	959328	959375	959423	959471	48
1	9518	9566	9614	9661	9709	9757	9804	9852	9900	9947	48
2	9995	960042	960090	960138	960185	960233	960280	960328	960376	960423	48
3	960471	0518	0566	0613	0661	0709	0756	0804	0851	0899	48
4	0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374	48
915	1421	1469	1516	1563	1611	1658	1706	1753	1801	1848	47
6	1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322	47
7	2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795	47
8	2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268	47
9	3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741	47
920	963788	963835	963882	963929	963977	964024	964071	964118	964165	964212	47
1	4260	4307	4354	4401	4448	4495	4543	4590	4637	4684	47
2	4731	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5061	5108	5155	47
3	5202	5249	5296	5343	5390	5437	5484	5531	5578	5625	47
4	5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095	47
925	6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564	47
6	6611	6658	6705	6752	6799	6845	6892	6939	6986	7033	47
7	7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7454	7501	47
8	7548	7595	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969	47
9	8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8390	8436	47
930	968483	968530	968576	968623	968670	968716	968763	968810	968856	968903	47
1	8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369	47
2	9416	9463	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9789	9835	47
3	9882	9928	9975	970021	970068	970114	970161	970207	970254	970300	47
4	970347	970393	970440	0486	0533	0579	0626	0672	0719	0765	45
935	0812	0858	0904	0951	0997	1044	1090	1137	1183	1229	45
6	1276	1322	1369	1415	1461	1508	1554	1601	1647	1693	46
7	1740	1786	1832	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2157	46
8	2203	2249	2295	2342	2388	2434	2481	2527	2573	2619	46
9	2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082	46
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
940	973128	973174	973220	973266	973313	973359	973405	973451	973497	973543	46
1	3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005	46
2	4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4374	4420	4466	46
3	4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926	46
4	4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386	46
945	5432	5478	5524	5570	5616	5662	5707	5753	5799	5845	46
6	5891	5937	5983	6029	6075	6121	6167	6212	6258	6304	46
7	6350	6396	6442	6488	6533	6579	6625	6671	6717	6763	46
8	6808	6854	6900	6946	6992	7037	7083	7129	7175	7220	46
9	7266	7312	7358	7403	7449	7495	7541	7586	7632	7678	46
950	977724	977769	977815	977861	977906	977952	977998	978043	978089	978135	46
1	8181	8226	8272	8317	8363	8409	8454	8500	8546	8591	46
2	8637	8683	8728	8774	8819	8865	8911	8956	9002	9047	46
3	9093	9138	9184	9230	9275	9321	9366	9412	9457	9503	46
4	9548	9594	9639	9685	9730	9776	9821	9867	9912	9958	46
955	980003	980049	980094	980140	980185	980231	980276	980322	980367	980412	45
6	0458	0503	0549	0594	0640	0685	0730	0776	0821	0867	45
7	0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320	45
8	1366	1411	1456	1501	1547	1592	1637	1683	1728	1773	45
9	1819	1864	1909	1954	2000	2045	2090	2135	2181	2226	45
960	982271	982316	982362	982407	982452	982497	982543	982588	982633	982678	45
1	2723	2769	2814	2859	2904	2949	2994	3040	3085	3130	45
2	3175	3220	3265	3310	3356	3401	3446	3491	3536	3581	45
3	3626	3671	3716	3762	3807	3852	3897	3942	3987	4032	45
4	4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482	45
965	4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932	45
6	4977	5022	5067	5112	5157	5202	5247	5292	5337	5382	45
7	5426	5471	5516	5561	5606	5651	5696	5741	5786	5830	45
8	5875	5920	5965	6010	6055	6100	6144	6189	6234	6279	45
9	6324	6369	6413	6458	6503	6548	6593	6637	6682	6727	45
970	986772	986817	986861	986906	986951	986996	987040	987085	987130	987175	45
1	7219	7264	7309	7353	7398	7443	7488	7532	7577	7622	45
2	7666	7711	7756	7800	7845	7890	7934	7979	8024	8068	45
3	8113	8157	8202	8247	8291	8336	8381	8425	8470	8514	45
4	8559	8604	8648	8693	8737	8782	8826	8871	8916	8960	45
975	9005	9049	9094	9138	9183	9227	9272	9316	9361	9405	45
6	9450	9494	9539	9583	9628	9672	9717	9761	9806	9850	44
7	9895	9939	9983	990028	990072	990117	990161	990206	990250	990294	44
8	990339	990383	990428	0472	0516	0561	0605	0650	0694	0738	44
9	0783	0827	0871	0916	0960	1004	1049	1093	1137	1182	44
980	991226	991270	991315	991359	991403	991448	991492	991536	991580	991625	44
1	1669	1713	1758	1802	1846	1890	1935	1979	2023	2067	44
2	2111	2156	2200	2244	2288	2333	2377	2421	2465	2509	44
3	2554	2598	2642	2686	2730	2774	2819	2863	2907	2951	44
4	2995	3039	3083	3127	3172	3216	3260	3304	3348	3392	44
985	3436	3480	3524	3568	3613	3657	3701	3745	3789	3833	44
6	3877	3921	3965	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273	44
7	4317	4361	4405	4449	4493	4537	4581	4625	4669	4713	44
8	4757	4801	4845	4889	4933	4977	5021	5065	5108	5152	44
9	5196	5240	5284	5328	5372	5416	5460	5504	5547	5591	44
990	995635	995679	995723	995767	995811	995854	995898	995942	995986	996030	44
1	6074	6117	6161	6205	6249	6293	6337	6380	6424	6468	44
2	6512	6555	6599	6643	6687	6731	6774	6818	6862	6906	44
3	6949	6993	7037	7080	7124	7168	7212	7255	7299	7343	44
4	7386	7430	7474	7517	7561	7605	7648	7692	7736	7779	44
995	7823	7867	7910	7954	7998	8041	8085	8129	8172	8216	44
6	8259	8303	8347	8390	8434	8477	8521	8564	8608	8652	44
7	8695	8739	8782	8826	8869	8913	8956	9000	9043	9087	44
8	9131	9174	9218	9261	9305	9348	9392	9435	9479	9522	44
9	9565	9609	9652	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957	43
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

परिशिष्ट घ

निरूपण

परिच्छेद 9.1

यह सिद्ध करने के लिए कि $\Sigma x = 0$.

मान लिया $x_1 = X_1 - \bar{X},\ x_2 = X_2 - \bar{X},\ \ldots,\ x_N = X_N - \bar{X}$.

फिर $\Sigma x = \Sigma (X - \bar{X})$

$= \Sigma X - N\bar{X}$

किन्तु $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$.

अत., $\Sigma x = \Sigma X - N\frac{\Sigma X}{N} = 0$

परिच्छेद 9.2

यह सिद्ध करने के लिए कि $\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{\Sigma d}{N}$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

$\bar{X}_d$ के योग और व्यवकलन से,

$$\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{(X_1 - \bar{X}_d) + (X_2 - \bar{X}_d) + \ldots + (X_N - \bar{X}_d)}{N}$$

किन्तु, सीमाकन से,

$$d_1 = X_1 - \bar{X}_d,\ d_2 = X_2 - \bar{X}_d,\ \ldots,\ d_N = X_N - \bar{X}_d$$

फिर

$$\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_N}{N}$$

$$= \bar{X}_d + \frac{\Sigma d}{N}.$$

यदि प्रत्येक मद को उसकी बारबारता से भारित किया जाय तो व्यञ्जक होगा

$$\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{\Sigma fd}{N}$$

परिच्छेद 93

यह सिद्ध करने के लिए कि उन धनात्मक मानों की श्रेणी के लिए जो सब समान नहीं हैं, $\bar{X} > G$

X_1 तथा X_N श्रेणी के क्रमशः न्यूनतम और अधिकतम मान हैं। इन दो मानों के लिए,

$$(X_1 - X_N)^2 > 0$$

$$X_1^2 - 2X_1X_N + X_N^2 > 0$$

असमानता के दोनों ओर $4X_1X_N$ के योग से हम प्राप्त करते हैं

$$X_1^2 + 2X_1X_N + X_N^2 > 4X_1X_N$$

वर्गमूल निकालने पर हम प्राप्त करते हैं

$$X_1 + X_N > 2\sqrt{X_1X_N} \text{ तथा}$$

$$\frac{X_1 + X_N}{2} > \sqrt{X_1X_N}$$

यदि X_1 तथा X_N में से प्रत्येक के स्थान पर $\frac{X_1 + X_N}{2}$ की प्रतिस्थापना कर दी जाय तो पूरी श्रेणी के लिए $\bar{X}$ का मान परिवर्तित नहीं होगा। फिर भी ऐसी प्रतिस्थापना से G का मान बढ़ जाता है क्योंकि $\frac{X_1 + X_N}{2} > \sqrt{X_1X_N}$ तथा गुणोत्तर माध्य को $\left(\frac{X_1 + X_N}{2}\right)^2$ का अंशदान X_1X_N के मूल अंशदान से बढ़ जाता है। न्यूनतम और अधिकतम मानों के लिए इस प्रक्रिया की सतत पुनरावृत्ति के परिणामस्वरूप G का मान सतत बढ़ता रहता है जो $\bar{X}$ के निकट पहुँच जाता है और अन्तिम प्रतिस्थापना के बाद उसके बराबर हो जाता है क्योंकि उस दशा में पृथक् मान सब वही होंगे।

परिच्छेद 94

यह सिद्ध करने के लिए कि उन धनात्मक मानों की श्रेणी के लिए जो सब समान नहीं हैं, $G > H$

X_1 तथा X_N श्रेणी के न्यूनतम और अधिकतम मान हैं। पिछले परिच्छेद में, यह दिखाया गया था कि

$$X_1 + X_N > 2\sqrt{X_1X_N}$$

इसलिए,

$$\sqrt{X_1X_N}(X_1 + X_N) > 2X_1X_N \text{ तथा}$$

$$\sqrt{X_1X_N} > \frac{2X_1X_N}{X_1 + X_N}$$

किन्तु $\frac{2X_1X_N}{X_1 + X_N} = \frac{2}{\frac{X_1 + X_N}{X_1X_N}} = \frac{2}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_N}}$, जो H है।

यदि X_1 तथा X_N म से प्रत्यक के स्थान पर उनके हरात्मक माध्य $\frac{2X_1X_N}{X_1+X_N}$ की प्रतिस्थापना कर कर दी जाय तो समस्त श्रेणी के लिए H का मान अपरिवर्तित रहगा। फिर भी ऐसी प्रतिस्थापना से G का मान घटता है क्योंकि $\frac{2X_1X_N}{X_1+X_N} < \sqrt{X_1X_N}$ तथा गुणोत्तर माध्य को $\left(\frac{2X_1X_N}{X_1+X_N}\right)^2$ का अंशदान X_1X_N के अंशदान से कम होगा। न्यूनतम और अधिकतम शेष मानो के लिए इस प्रक्रिया की सतत पुनरावृत्ति के परिणामस्वरूप G का मान सतत घटता रहता है जो H के निकट पहुँच जाता है और अंतिम प्रतिस्थापना के बाद उसके बराबर हो जाता है क्योंकि तब पृथक मान सब बराबर होंगे।

परिच्छेद 10 1

यह सिद्ध करने के लिए कि जब X_d $\bar{X}$ तब Σd^2 न्यूनतम होता है अर्थात Σx^2 अल्पतम है। जहा $x = X - \bar{X}$, $d = X$ X_d तथा X_d कोई भी निर्दिष्ट मान हो सकता है जो $\bar{X}$ हो भी सकता है और नहीं भी। तब

$$\Sigma d = (X - X_d)^2$$
$$= X^2 - 2X_d\Sigma X + NX_d^2$$

किन्तु $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$ तथा $\Sigma X = N\bar{X}$ इसलिए

$$\Sigma d^2 = \Sigma X^2 \quad 2X_dN\bar{X} + NX_d$$

$N\bar{X}^2$ को जोडने तथा घटाने स हम पाते है

$$\Sigma d \quad X - N\bar{X} + (N\bar{X}^2 - 2X_dN\bar{X} + NX_d)$$
$$= \Sigma X^2 - N\bar{X}^2 + N(\bar{X}^2 - 2X_d\bar{X} + X_d)$$
$$X - N\bar{X}^2 + N(\bar{X} - X_d)^2$$

यदि $\bar{X}$ से X_d या तो बडी हो या छोटी हो तो तीसरी संख्या $N(\bar{X} - X_d)^2$ धनात्मक होती है और इसलिए जब $X_d = \bar{X}$ तब Σd^2 न्यूनतम या सबसे छोटी होती है। इस दशा म $\Sigma d^2 = \Sigma x$

परिच्छेद 10 2

यह सिद्ध करने के लिए कि $\sqrt{\frac{x}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma d}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2}$

क्योंकि

$$x = X - \bar{X}$$

$$\sqrt{\frac{x}{N}} \quad \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2)}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - 2\bar{X}\ X + N\bar{X}^2}{N}}$$

किन्तु क्योंकि $\frac{\Sigma X}{N} = \bar{X}$,

$$\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \bar{X}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

यह स्पष्ट करने पर कि $d = X - \bar{X}_d$, अथवा $X = d + \bar{X}_d$

इसलिए

$$\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Sigma (d+\bar{X}_d)^2}{N} - \left[\frac{\Sigma(d+\bar{X}_d)}{N}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(d^2+2d\bar{X}_d+\bar{X}_d^2)}{N} - \left(\frac{\Sigma d+N\bar{X}_d}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d^2+2\bar{X}_d\Sigma d+N\bar{X}_d^2}{N} - \frac{(\Sigma d)^2+2N\bar{X}_d\Sigma d+N^2\bar{X}_d^2}{N^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}+2\bar{X}_d\frac{\Sigma d}{N}+\bar{X}_d^2-\frac{(\Sigma d)^2}{N^2}-2\bar{X}_d\frac{\Sigma d}{N}-\bar{X}_d^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}-\left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2}$$

बारबारता बटन के लिए

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}}, \text{ तथा } \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}.$$

अथवा, वर्ग अन्तराल के सम्बन्ध मे विचलनों के साथ

$$\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}} = i\sqrt{\frac{\Sigma f(d')^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}$$

परिच्छेद 10 3

यह सिद्ध करने के लिए कि $\mu_3 = \frac{\Sigma f(d')^3}{N} - 3\frac{\Sigma fd'}{N}\frac{\Sigma f(d')^2}{N} + 2\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^3$

परिच्छेद 9 2 मे दिखाया गया था कि

$$\bar{X} = \bar{X}_d + \frac{\Sigma d}{N}$$

किसी चुने हुए X मान के लिए, उदाहरणार्थ X_1, $x_1 = X_1 - \bar{X} = X_1 - \bar{X}_d - \frac{\Sigma d}{N}$.

किन्तु $X_1 - \bar{X}_d = d_1$ इसलिए $x_1 = d_1 - \frac{\Sigma d}{N}$

इसी प्रकार, $x_2 = d_2 - \frac{\Sigma d}{N}$ $x_3 = d_3 - \frac{\Sigma d}{N}$, इत्यादि।

अब,
$$\frac{\Sigma x^3}{N} = \frac{\Sigma\left(d - \frac{\Sigma d}{N}\right)^3}{N},$$

$$= \frac{\Sigma\left[d^3 - 3\frac{\Sigma d}{N}d^2 + 3\left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2 d - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^3\right]}{N},$$

$$= \frac{\Sigma d^3 - 3\frac{\Sigma d}{N}\Sigma d^2 + 3\left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2\Sigma d - N\left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^3}{N},$$

$$= \frac{\Sigma d^3}{N} - 3\frac{\Sigma d}{N}\frac{\Sigma d^2}{N} + 3\left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2\frac{\Sigma d}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^3,$$

$$= \frac{\Sigma d^3}{N} - 3\frac{\Sigma d}{N}\frac{\Sigma d^2}{N} + 3\left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^3 - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^3,$$

$$= \frac{\Sigma d^3}{N} - 3\frac{\Sigma d}{N}\frac{\Sigma d^2}{N} + 2\left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^3$$

बारंबारता बंटन के लिए यह हो जाता है

$$\frac{\Sigma f x^3}{N} = \frac{\Sigma fd^3}{N} - 3\frac{\Sigma fd}{N}\frac{\Sigma fd^2}{N} + 2\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^3$$

अथवा, धनरूप किए गए वर्ग-अन्तराल के रूप में,

$$\nu_3 = \frac{\Sigma f(d')^3}{N} - 3\frac{\Sigma fd'}{N}\frac{\Sigma f(d')^2}{N} + 2\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^3$$

परिच्छेद 12.1

न्यूनतम वर्ग नियम

निम्नलिखित चर्चा में यह मान लिया गया है कि आकस्मिक त्रुटियों का बंटन प्रसामान्य वक्र का अनुसरण करता है, तथा सर्वोत्तम केन्द्रीय मान, जिनसे ऐसे आकस्मिक विचलनों को मापा जा सके, वह मान है जो विचलनों के प्रसामान्य बंटन को अत्यधिक प्रायिक बनाता है।

मान लीजिए, हम विचलनों, अथवा त्रुटियों, तथा अन्तरालों को, जिनमें वे स्थित हों, श्रेणी को निम्नांकित संकेत चिह्न व्यक्त करते हैं

x_1 एक मद है जो एक बहुत छोटे अन्तराल Δx_1 के मध्य बिन्दु पर स्थित है,
x_2 " " " , Δx_2
. .
.
x_N " " " , Δx_N ,

अब, किसी निश्चित अन्तराल म किसी विचलन के होने की प्रायिकता है

$$P=\frac{\text{उस अन्तराल की सीमाओं के भीतर बारबारता वक्र का क्षेत्र}}{\text{समस्त बारबारता वक्र का क्षेत्र}}$$

इस प्रकार त्रुटि x_1 को, जो अन्तराल Δx_1 के भीतर पड़ती है प्राप्त करने की प्रायिकता समस्त बारबारता वक्र के क्षेत्र से आयत के क्षेत्र के अनुपात के लगभग होता है और आधार Δx_1 तथा ऊँचाई, अन्तराल के मध्य बिन्दु पर स्थित कोटि है।

यदि यह वक्र प्रसामान्य वक्र हो तो यह प्रायिकता

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}}\Delta x_1$$

है, क्योंकि प्रसामान्य वक्र की कोटि के लिए व्यञ्जक, बारम्बारताओं की सम्पूर्ण संख्या के अनुपात के रूप में है

$$Y_c=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

निर्दिष्ट अन्तरालों के भीतर पड़ने वाली x_2, x_3 इत्यादि त्रुटियों की प्राप्ति की प्रायिकता भी इसी प्रकार ज्ञात की जाती है।

यह प्रायिकता कि कुछ स्वतन्त्र घटनाएँ घटेंगी पृथक घटनाओं की अपनी अलग-अलग प्रायिकताओं का गुणनफल है। इसलिए यह प्रायिकता कि त्रुटियों का विशिष्ट समुच्चय घटित होगा, जिसे हमने मान लिया है (अर्थात, त्रुटियों का प्रसामान्य बंटन), निम्न प्रकार है

$$P=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}}\Delta x_1\right)\times\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}}\Delta x_2\right)$$

$$\times \cdots \times\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_N^2}{2\sigma^2}}\Delta x_N\right)$$

$$=\frac{1^N}{\sigma^N(2\pi)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2}{2\sigma^2}}\times\Delta x_1\times\Delta x_2\times\cdots\times\Delta x_N$$

क्योंकि किसी संख्या को ऋणात्मक घात तक ले जाने से वह अधिकतम हो जाएगी जब वह घातांक न्यूनतम होगा अतः P अधिकतम होगा यदि $x_1^2 + x_2^2 + \quad + x_k^2$ न्यूनतम हो। अतः यह प्रायिकता कि किसी केन्द्रीय मान से आकस्मिक विचलन प्रसामान्य वक्र का अनुसरण करेंगे अधिकतम होगी जब उस केन्द्रीय मान से वर्गीकृत विचलनों का योग न्यूनतम स्थिति पर हो।

परिच्छेद 12 2

न्यूनतम वर्गों की विधि से आसजित ऋजु रेखा के लिए प्रसामान्य समीकरणों की व्युत्पत्ति

यदि Y_c उपनति या परिकलित मान है तो $Y - Y_c$ उपनति से विचलन है। न्यूनतम वर्गों की कसौटी को सन्तुष्ट करने के लिए $\Sigma(Y - Y_c)^2$ को अल्पतम होना चाहिए। क्योंकि ऋजु रेखा समीकरण रूप है $Y_c = a + bX$,

$$\Sigma(Y - Y_c)^2 = \Sigma[Y - (a + bX)]^2 - \Sigma(Y - a - bX)$$

बढ़ाने से, यह व्यंजक बन जाता है

$$\Sigma Y^2 - 2a\Sigma Y - 2b\Sigma XY + Na^2 + 2ab\Sigma X + b^2\Sigma X^2 \qquad (1)$$

यदि इस व्यञ्जक को a तथा b के लिए हल किया जाय, तो हमें दो प्रसामान्य समीकरण मिलेंगे। व्यञ्जक (1) को a की अवरोही घात के अनुसार लिखने से

$$Na^2 + 2a(b\Sigma X - \Sigma Y) + \Sigma Y^2 - 2b\Sigma XY + b^2\Sigma X^2$$

यह $pm^2 + qm + r$ रूप का द्विघात है जहां p है N m है a q है $2(b\Sigma X - \Sigma Y)$, तथा r है $\Sigma Y^2 - 2b\Sigma XY + b^2\Sigma X^2$ यदि p धनात्मक हो (जैसा कि इसे सांख्यिकीय समस्याओं के लिए हमेशा होना चाहिए जब $p = N$), ऐसे द्विघात का अल्पतम मान होता है जब $m = -\dfrac{q}{2p}$ इसलिए

$$a = \frac{-2(b\Sigma Y - \Sigma Y)}{2N} = \frac{\Sigma Y - b\Sigma X}{N}. \qquad (2)$$

(2) को दुबारा लिखने से प्राप्त होता है

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X \qquad \text{प्रथम प्रसामान्य समीकरण।}$$

व्यंजक (1) को b की अवरोही घात के अनुसार व्यवस्थित करने से प्राप्त होता है

$$b^2\Sigma X^2 + 2b(a\Sigma X - \Sigma XY) + \Sigma Y^2 - 2a\Sigma Y + Na^2 \qquad (3)$$

इस द्विघात में, p है ΣX^2 m है b, q है $2(a\Sigma X - \Sigma XY)$ तथा r है $\Sigma Y^2 - 2a\Sigma Y + Na^2$ क्योंकि ΣX^2 धनात्मक है व्यंजक (3) का मान अल्पतम होगा जब $m = \dfrac{-q}{2p}$, अतः

$$b = \frac{-2(a\Sigma X - \Sigma XY)}{2\Sigma X^2} = \frac{\Sigma XY - a\Sigma X}{\Sigma X^2} \qquad (4)$$

(4) को दुबारा लिखने से प्राप्त होता है

$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X$ द्वितीय प्रमामान्य समीकरण।

परिच्छेद 13.1

$Y_c = k + ab^X$ रूप के वृद्धि वक्र के आसंजन के लिए समीकरणों की व्युत्पत्ति

आँकड़ों के प्रत्येक तीसरे वर्ष की संख्या को n द्वारा निर्दिष्ट या पदनामित करने से प्रथम समीकरण (देखिए समीकरण I, पृष्ठ 271) है

$$\Sigma_1 Y = nk + a + ab + ab^2 + ab^3 + \cdots + ab^{n-1}$$

$$= nk + a\{1 + b + b^2 + b^3 + \cdots + b^{n-1}\}$$

यदि अब कोष्ठकों के भीतर के व्यंजक को $\frac{b-1}{b-1}$ द्वारा गुणा किया जाए तो हम पाते हैं

$$\frac{[1+b+b^2+b^3+\cdots+b^{(n-1)}](b-1)}{b-1} \quad (1)$$

$$= \frac{b+b^2+b^3+\cdots+b^{(n-1)}+b^n-1-b-b^2-\cdots-b^{(n-1)}}{(b-1)} \quad (2)$$

$$= \frac{b^n-1}{b-1}.$$

व्यञ्जक (2) के भाग में दिखाई गई चौथी संख्या है $b^{(n-1)}$ यह इस तथ्य का अनुगमन करता है कि व्यञ्जक (1) में कोष्ठकों के भीतर अन्तिम संख्या में भाग की संख्या को भी $b^{(n-2)}$ के समान पदनामित या निर्दिष्ट किया जा सकता है तथा $b^{n} \times b = b^{(n-1)}$ सभी तीनों समीकरण उसी ढंग से प्राप्त किए गए हैं। वे हैं

$$\text{I} \quad \Sigma_1 Y = nk + a\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)$$

$$\text{II} \quad \Sigma_2 Y = nk + ab^n\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)$$

$$\text{III} \quad \Sigma_3 Y = nk + ab^{2n}\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)$$

समीकरण A, B तथा C अब हैं

$$\text{A} \quad \Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y = a\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right)(b^n-1) = a\frac{(b^n-1)^2}{b-1}$$

$$\text{B} \quad \Sigma_3 Y - \Sigma_2 Y = ab^n\frac{(b^n-1)^2}{b-1}$$

$$\text{C} \quad \frac{\Sigma_3 Y - \Sigma_2 Y}{\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y} = ab^n\frac{(b^n-1)^2}{b-1} \div a\frac{(b^n-1)^2}{b-1} = b^n$$

इसलिए, $b = \sqrt[n]{\frac{\Sigma_3 Y - \Sigma_2 Y}{\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y}}$

समीकरण A हमें a के लिए सूत्र प्रदान करता है :

$$= \Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y = a \frac{(b^n - 1)^2}{b^n - 1}$$

$$a = (\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y) \frac{b-1}{(b^n - 1)^2}.$$

समीकरण I से हम पाते है

$$\Sigma_1 Y = nk + \left(\frac{b^n - 1}{b-1}\right) a$$

$$k = \frac{1}{n}\left[\Sigma_1 Y - \left(\frac{b^n - 1}{b-1}\right) a\right]$$

परिच्छेद 19.1

यह सिद्ध करने के लिए कि $\bar{Y}_c = \bar{Y}$

$$Y_c = a + bX$$
$$\Sigma Y_c = \Sigma(a + bX)$$
$$= Na + b\Sigma X$$

किन्तु $Na + b\Sigma X = \Sigma Y$ (प्रसामान्य समीकरण I) ।

इसलिए, $\Sigma Y_c = \Sigma Y$ . . (1)

$$= \frac{\Sigma Y_c}{N} = \frac{\Sigma Y}{N}, \text{ तथा}$$

$\bar{Y}_c = \bar{Y}$ . ...(2)

यह सिद्ध करने के लिए कि $\Sigma Y_c^2 = a\Sigma Y + b\Sigma XY$

$$\Sigma Y_c^2 = \Sigma(a + bX)^2$$
$$= \Sigma(a^2 + 2abX + b^2X^2)$$
$$= Na^2 + 2ab\Sigma X + b^2\Sigma X^2$$
$$= a(Na + b\Sigma X) + b(a\Sigma X + b\Sigma X^2)$$

किन्तु $Na + b\Sigma X = \Sigma Y$ (प्रसामान्य समीकरण I), तथा

$a\Sigma X + b\Sigma X^2 = \Sigma Xy$ (प्रसामान्य समीकरण II)

इसलिए,

$\Sigma Y_c^2 = a\Sigma Y + b\Sigma XY$.. .. ..(3)

यह सिद्ध करने के लिए कि $y = Y^2 - Y$

अध्याय 21 की पाद टिप्पणी 3 में Σx के लिए प्रदर्शित प्रविधि से यह दिखाया जा सकता है कि

$$y = ... \quad \Sigma Y$$

इसी प्रकार यह सत्य है कि $\Sigma y^2 = Y^2 - Y$

किन्तु $\bar{Y}_c = \bar{Y}$ (समीकरण 2) तथा $Y = Y$ (समीकरण 1)

इसलिए, $\Sigma y_c^2 = \Sigma Y_c^2 - Y$ (4)

यह सिद्ध करने के लिए कि $\Sigma \quad = \Sigma Y \quad \Sigma Y$

$$\Sigma y^2 = \Sigma (Y - Y)^2$$

$$= \Sigma Y - 2\Sigma Y Y + \Sigma^2$$

किन्तु $Y_c = a + bX$ अतएव $\Sigma YY = \Sigma[Y(a + bX)] = \Sigma(aY + bXY)$

$$= a\Sigma Y + b\Sigma XY$$

अब $a\Sigma Y + b\Sigma XY = \Sigma Y$ (समीकरण 3) ।

इसलिए $\Sigma y_s^2 = \Sigma Y - 2\Sigma Y^2 + \Sigma Y$

$$= \Sigma Y - \Sigma Y \qquad (5)$$

यह सिद्ध करने के लिए कि $\Sigma y^2 \quad b\Sigma xy$

$$\Sigma y_c^2 = \Sigma(bx)^2 = b^2 x = b\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\Sigma x^2 \quad b\Sigma xy \qquad (6)$$

यह सिद्ध करने के लिए कि $\Sigma y = \Sigma y^2 - \Sigma y^2$

$$\Sigma y_s^2 = \Sigma y^2 - \Sigma Y^2 \text{ (समीकरण 5)}$$

किन्तु

$$\Sigma Y^2 = \Sigma y + \bar{Y}\Sigma Y \text{ तथा}$$

$$\Sigma Y^2 = \Sigma y^2 + \bar{Y}\Sigma Y \text{ (समीकरण 4)}$$

इसलिए

$$\Sigma y_s^2 = (\Sigma y^2 + Y\Sigma Y) - (\Sigma y_c^2 + Y\Sigma Y)$$

$$= \Sigma y - \Sigma y_c^2 \qquad (7)$$

परिच्छेद 19 2

ऋजु रेखा समीकरण के लिए स्थिरों की व्युत्पत्ति जब मूल $\bar{X}$ $\bar{Y}$ पर हो

न्यूनतम वर्गों की विधि से ऋजु रेखा के आसजन के लिए प्रमामान्य समीकरण हैं

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

यदि मूल 0,0 के स्थान पर $\bar{X}, \bar{Y}$ पर ले लिया जाय, तो हम पाते हैं

$$\Sigma y = Na + b\Sigma x,$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

$$\text{किन्तु } \Sigma y = 0 \text{ तथा } \Sigma x = 0$$

$$\text{इसलिए, } a = 0, \text{ तथा } b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

प्राकलन समीकरण हो जाता है $y_c = bx$ बजाय $Y_c = a + bX$

परिच्छेद 19 3

यह सिद्ध करने के लिए कि $\frac{\Sigma y_c^2}{\Sigma y^2} = \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2 \Sigma y}$

क्योंकि $y_c = bx$ अत हम लिख सकते हैं

$$\frac{\Sigma y_c^2}{\Sigma y^2} = \frac{\Sigma (bx)^2}{\Sigma y^2} = \frac{b^2 \Sigma x^2}{\Sigma y^2}$$

दूसरे प्रसामान्य समीकरण से $b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x}$ इसलिए,

$$\frac{\Sigma y_c}{\Sigma y^2} = \frac{\left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)\Sigma x^2}{\Sigma y^2} = \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2 \Sigma y^2}$$

परिच्छेद 19 4

यह सिद्ध करने के लिए कि $\frac{\Sigma xy}{N s_X s_Y} = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$

$$\Sigma xy = \Sigma[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] = \Sigma(XY - X\bar{Y} - \bar{X}Y + \bar{X}\bar{Y}),$$

$$= \Sigma XY - \bar{X}\Sigma Y - \bar{Y}\Sigma X + N\bar{X}\bar{Y}),$$

$$= \Sigma XY - N\bar{X}\bar{Y} - N\bar{Y}\bar{Y} + N\bar{X}\bar{Y}$$

$$= \Sigma XY - N\bar{X}\bar{Y}$$

$$s_X = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}, \text{ तथा } s_Y = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma Y}{N}\right)^2}$$

इसलिए,

$$\frac{\Sigma xy}{Ns_Xs_Y}=\frac{\Sigma XY-N\bar{X}\bar{Y}}{N\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}\sqrt{\frac{\Sigma Y^2}{N}-\left(\frac{\Sigma Y}{N}\right)^2}}$$

$$=\frac{N(\Sigma XY-N\bar{X}\bar{Y})}{\left[N\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}\right]\left[N\sqrt{\frac{\Sigma Y^2}{N}-\left(\frac{\Sigma Y}{N}\right)^2}\right]}$$

$$=\frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2]}}$$

परिच्छेद 19 5

प्रदत्त है कि X_1 X X_N बिना द्विरावृत्ति या लुप्ति के N के द्वारा केवल पूर्ण संख्या 1 के मानों को ग्रहण कर सकते है तथा यही Y_1 Y_2 , Y_N के विषय मे भी सत्य है।

यह सिद्ध करने के लिए कि $r_{rank}=1-\frac{6\ D}{N(N\ -1)}$

परिच्छेद 24 4 म समानर माध्यों के लिए निर्दिष्ट प्रमाण के समानान्तर यह दिखाया जा सकता है कि

$$s_D = s_X + s_Y^2 - 2rs_Xs_Y$$

जहाँ $D=X-Y$ इस सम्बध का अनुगामी परिणाम है कि

$$r=\frac{s_X+s_Y-\frac{\Sigma D}{N}}{2s_Xs_Y}$$

किन्तु $\Sigma X=\Sigma Y$ जब हम कोटियो पर विचार कर रहे हो। अत

$$r_{rank}=\frac{2s_X^2-\frac{\Sigma D}{N}}{2s_X^2}=1-\frac{\Sigma D}{2Ns_X}$$

अब ΣX है प्रथम N प्रकृत संख्याओ का योग अथवा $\frac{N(N+1)}{2}$

$$\bar{Y}=\frac{N+1}{2},$$

तथा ΣX^2 है प्रथम N प्रकृत संख्याओ के वर्गों का योग अथवा $\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ इसलिए,

$$Ns_X^2 = \Sigma(X-\bar{X})^2 = \Sigma X^2 - \bar{X}\Sigma X,$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N+1}{2} \cdot \frac{N(N+1)}{2},$$

$$= \frac{2N(N+1)(2N+1) - 3N(N+1)^2}{12}$$

$$= \frac{N(N^2-1)}{12}$$

r के लिए व्यजक मे प्रतिस्थापन द्वारा हम पाते हैं

$$r_{rank} = 1 - \frac{\Sigma D}{\frac{N(N^2-1)}{6}} = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

परिच्छेद 20 1

ह्रासमान निरपेक्ष प्रतिफलो का विन्दु सम्पूर्ण प्रतिफलो के वक्र मे सर्वोच्च बिन्दु होता है। इस बिन्दु पर ढाल शून्य होता है। किसी भी विन्दु पर वक्र का ढाल, समीकरण के प्रथम अवकलज को लेकर मालूम किया जा सकता है। समीकरण $Y_c = a + bX + cX^2 + dX^3$ का प्रथम अवकलज है

$$\frac{dY_c}{dX} = b + 2cX + 3dX^2.$$

$\frac{dY_c}{dX} = 0$, स्थिर करने से, हम पाते है $X = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 3bd}}{3d}$.

सम्पूर्ण प्रतिफलो के समीकरण $Y_c = 890\ 32 + 78\ 264X + 20\ 324X^2 - 4.4649X^3$ के लिए उपर्युक्त समीकरण प्रदान करता है $X = -1\ 337$ तथा 4.371 जब ढाल शून्य हो, तब हम अधिकतम या अल्पतम बिन्दु पाते है। X के केवल धनात्मक मान हमारे लिए उपयोगी हैं, तथा चार्ट 20 3 को देखने से ज्ञात होता हैं कि जब X, 4 के निकटतम होता है तब अधिकतम की उपलब्धि होती है। अथवा, यदि पाठक Y_c मानो का $X = -1\ 337$ तथा $X = 4\ 371$ के आसपास परिकलन करेगा तो वह पाएगा कि प्रथम अल्पतम है और बाद का अधिकतम। जब $X = 4\ 371$, तब परिकलित सपूर्ण प्रतिफल $Y_c = 1{,}247\ 85$ सम्पूर्ण प्रतिफलो के ह्रासमान विन्दु की उपलब्धि होती है जब नाइट्रोजन का आदान 4 371 प्रतिशत हो। इस बिन्दु पर आकलित उपज 1,247 85 पाउड है।

सीमान्त प्रतिफल का ह्रासमान-विन्दु वक्र मे नति-परिवर्तन का बिन्दु है। यह वह बिन्दु है जिस पर ढाल मे परिवर्तन शून्य है। ढाल मे परिवर्तन आकलन समीकरण का दूसरा अवकलज है। इस प्रकार,

$$\frac{d^2Y_c}{dX^2} = 2c + 6dX$$

$\frac{d^2Y_c}{dX^2}=0$ स्थिर करते हुए, हम प्राप्त करते हैं $X = -\frac{c}{3d}$

सम्पूर्ण प्रतिफलों के समीकरण से निम्न नति-परिवर्तन-बिन्दु है $X = 1\,517$ इस प्रकार सीमान्त प्रतिफलों का ह्रासमान बिन्दु प्राप्त हो जाता है जब नाइट्रोजन का आदान 1 517 प्रतिशत होता है। इस बिन्दु पर आकलित उपज है $Y_c = 1\,040\,23$ पाउंड।

परिच्छेद 21 1

यह सिद्ध करने के लिए कि

$$\left(\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}\right)^2 = \frac{\Sigma x_{c1.3}^2 - \Sigma x_{c1.23}^2}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x_{c1.3}^2}$$

इसी प्रकार के अन्य सूत्रों का निरूपण भी इसी आधार पर होगा।

$$\text{यदि}\quad r_{12.3} = \frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$r_{12.3}^2 = \frac{r_{12}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} + r_{13}^2 r_{23}^2}{1-r_{13}^2 - r_{23}^2 + r_{13}^2 r_{23}^2}$$

किन्तु $r_{12}^2 = \frac{(\Sigma x_1 x_2)^2}{\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2}$, $r_1 = \frac{\Sigma x_1 x}{\sqrt{\Sigma x_1^2 \Sigma x^2}}$, तथा अन्य $r's$ के लिए इसी प्रकार के सूत्र प्राप्त होते हैं। इसलिए

$$r_{12.3}^2 = \frac{\frac{(\Sigma x_1x_2)^2}{\Sigma x_1^2\Sigma x_2^2} - 2\left[\frac{\Sigma x_1x_2}{\sqrt{\Sigma x_1^2\Sigma x_2^2}} \times \frac{\Sigma x_1x_3}{\sqrt{\Sigma x_1^2\Sigma x_3^2}} \times \frac{\Sigma x_2x_3}{\sqrt{\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2}}\right] + \left[\frac{(\Sigma x_1x_3)^2}{\Sigma x_1^2\Sigma x_3^2} \times \frac{(\Sigma x_2x_3)^2}{\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2}\right]}{1 - \frac{(\Sigma x_1x_3)^2}{\Sigma x_1^2\Sigma x_3^2} - \frac{(\Sigma x_2x_3)^2}{\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2} + \left[\frac{(\Sigma x_1x_3)^2}{\Sigma x_1^2\Sigma x_3^2} \times \frac{(\Sigma x_2x_3)^2}{\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2}\right]}$$

भाज्य तथा हर को $\Sigma x_1^2 \Sigma x_2^2 (\Sigma x_3^2)^2$ से गुणा करने से यह निम्नांकित समीकरण के रूप में सरल हो जाता है :

$$r_{12.3}^2 = \frac{(\Sigma x_3^2)^2(\Sigma x_1x_2)^2 - 2\Sigma x_3^2\Sigma x_1x_2\Sigma x_1x_3\Sigma x_2x_3 + (\Sigma x_1x_3)^2 (\Sigma x_2x_3)^2}{\Sigma x_1^2\Sigma x_2^2(\Sigma x_3^2)^2 - \Sigma x_2^2\Sigma x_3^2(\Sigma x_1x_3)^2 - \Sigma x_1^2\Sigma x_3^2(\Sigma x_2x_3)^2 + (\Sigma x_1x_3)^2(\Sigma x_2x_3)^2} \quad \ldots(2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

हम जानते है कि $r_{12.3}^2 = \frac{\Sigma x_{c1.23}^2 - \Sigma x_{c1.3}^2}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x_{c1.3}^2}$

किन्तु $\Sigma x_{c1.3}^2 = b_{13}\Sigma x_1 x_3 = \frac{\Sigma x_1x_3}{\Sigma x_3^2}\, \Sigma x_1x_3 = \frac{(\Sigma x_1x_3)^2}{\Sigma x_3^2}$.

तथा, $\Sigma x^2_{c1.23} = b_{12.3}\Sigma x_1x_2 + b_{13.2}\Sigma x_1x_3$

अब, $b_{12.3}$ तथा $b_{13.2}$ को प्राप्त करने के लिए प्रसामान्य समीकरण है,

II $\quad \Sigma x_1x_2 = b_{12.3}\Sigma x_2^2 + b_{13.2}\Sigma x_2x_3$,

III $\quad \Sigma x_1x_3 = b_{12.3}\Sigma x_2x_3 + b_{13.2}\Sigma x_3^2$.

$b_{13.2}$ के लिए हल करने को, हम समीकरण II को Σx_2x_3 से और समीकरण III को Σx_2^2 से गुणा कर सकते हैं, तथा समीकरण II को समीकरण III में से घटा सकते हैं। इस प्रकार,

$$\text{II} \qquad \Sigma x_1x_2\Sigma x_2x_3 = b_{12.3}\Sigma x_2^2\Sigma x_2x_3 + b_{13.2}(\Sigma x_2x_3)^2$$

$$\text{III} \qquad \Sigma x_1x_3\Sigma x_2^2 = b_{12.3}\Sigma x_2^2\Sigma x_2x_3 + b_{13.2}\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2$$

$$\Sigma x_1x_3\Sigma x_2^2 - \Sigma x_1x_2\Sigma x_2x_3 = b_{13.2}\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2 - b_{13.2}(\Sigma x_2x_3)^2$$

$$b_{13.2} = \frac{\Sigma x_1x_3\Sigma x_2^2 - \Sigma x_1x_2\Sigma x_2x_3}{\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2 - (\Sigma x_2x_3)^2}$$

इसी रीति से, हम $b_{12.3}$ के लिए हल कर सकते हैं। इसके लिए समीकरण II को Σx_3^2 से तथा समीकरण III को Σx_2x_3 से गुणा करना पड़ेगा। इस प्रक्रिया से हम पाते हैं कि

$$b_{12.3} = \frac{\Sigma x_1x_3\Sigma x_2x_3 - \Sigma x_1x_2\Sigma x_3^2}{(\Sigma x_2x_3)^2 - \Sigma x_2^2\Sigma x_3^2}.$$

इन व्यंजकों की $\Sigma^2_{c1.23}$ के समीकरण में $b_{13.2}$ तथा $b_{12.3}$ के लिए प्रतिस्थापना से हम पाते हैं

$$\Sigma x^2_{c1.23} = \frac{\Sigma x_1x_3\Sigma x_2x_3 - \Sigma x_1x_2\Sigma x_3^2}{(\Sigma x_2x_3)^2 - \Sigma x_2^2\Sigma x_3^2}\Sigma x_1x_2 + \frac{\Sigma x_1x_3\Sigma x_2^2 - \Sigma x_1x_2\Sigma x_2x_3}{\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2 - (\Sigma x_2x_3)^2}\Sigma x_1x_3$$

यह इस रूप में सरल हो जाता है

$$\Sigma x^2_{c1.23} = \frac{(\Sigma x_1x_3)^2\Sigma x_2^2 + (\Sigma x_1x_2)^2\Sigma x_3^2 - 2\Sigma x_1x_2\Sigma x_1x_3\Sigma x_2x_3}{\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2 - (\Sigma x_2x_3)^2}.$$

अब, सूत्र (3) में $\Sigma x^2_{c1.23}$ तथा $\Sigma x^2_{c1.3}$ के लिए अपने व्यंजकों की प्रतिस्थापना से, हम पाते हैं

$$r^2_{12.3} = \frac{\dfrac{(\Sigma x_1x_3)^2\Sigma x_2^2 + (\Sigma x_1x_2)^2\Sigma x_3^2 - 2\Sigma x_1x_2\Sigma x_1x_3\Sigma x_2x_3}{\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2 - (\Sigma x_2x_3)^2} - \dfrac{(\Sigma x_1x_3)^2}{\Sigma x_3^2}}{\Sigma x_1^2 - \dfrac{(\Sigma x_1x_3)^2}{\Sigma x_3^2}}$$

वृद्धि करने और सरल करने से, यह व्यंजक समीकरण (2) बन जाता है। इसलिए,

$$\left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}\right)^2 = \frac{\Sigma x^2_{c1.23} - \Sigma x^2_{c1.3}}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{c1.3}}$$

परिच्छेद 24 1

यह सिद्ध करने के लिए कि $\frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\cdots+\bar{X}_K}{K}=\bar{X}_{\mathcal{P}}$, जब $N_1=N_2=\ldots=N_K=N$

$$\frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\cdots+\bar{X}_K}{K}=\frac{\frac{\Sigma X_1}{N_1}+\frac{\Sigma X_2}{N_2}+\cdots+\frac{\Sigma X_K}{N_K}}{K}$$

$$=\frac{\Sigma X_1+\Sigma X_2+\cdots+\Sigma X_K}{NK}$$

N मदो के प्रत्येक याहच्छिक प्रतिदर्श मे समष्टि का $\frac{N}{\mathcal{P}}$ भाग रहता है, तथा प्रत्येक मद $\frac{N}{\mathcal{P}}$ K बार पायी जायेगी। इसलिए,

$$\frac{\Sigma X_1+\Sigma X_2+\cdots+\Sigma X_K}{NK}=\frac{\frac{N}{\mathcal{P}}K\sum_1^{\mathcal{P}}X}{NK},$$

जहाँ $\sum_1^{\mathcal{P}}$ समष्टि मे मदो के ऊपर सकलन को सकेतित करता है।

$$\frac{\frac{N}{\mathcal{P}}K\sum_1^{\mathcal{P}}X}{NK}=\frac{1}{\mathcal{P}}\sum_1^{\mathcal{P}}X,$$

$$=\bar{X}_{\mathcal{P}}$$

परिच्छेद 24 2

यह सिद्ध करने के लिए कि $\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ जब, $N_1=N_2=\cdots=N_K=N$ याहच्छिक प्रतिदर्शों की योजना निम्न प्रकार प्रस्तुत है

मद	प्रतिदर्श 1	प्रतिदर्श 2	प्रतिदर्श 3
a	X_{a1}	X_{a2}	X_{a3}
b	X_{b1}	X_{b2}	X_{b3}
c	X_{c1}	X_{c2}	X_{c3}
.			.
.	.	.	.
.	.	.	.
N	X_{N1}	X_{N2}	X_{N3}

K प्रतिदश हैं। प्रत्येक प्रतिदर्श ले लेने के बाद पृथक् मदों को प्रतिस्थापित कर दिया जाता है।

हम निम्नलिखित का प्रयोग करें

$\sum_{1}^{K}$ संकेत करने के लिए K प्रतिदर्शों के ऊपर सकलन का,

$\sum_{1}^{\wp}$ संकेत करने के लिए समष्टि मे मदो के ऊपर सकलन का,

Σ संकेत करने के लिए प्रतिदर्श के ऊपर सकलन का—किसी विशिष्ट प्रतिदश के ऊपर यदि अधोलिखित X का अनुसरण करता हो इस प्रकार ΣX_1 प्रतिदर्श 1 म X मानों का योग है, तथा

1 जिसका तात्पर्य $X - \lambda_{\wp}$ केवल इस प्रमाण म प्रयुक्त x प्रयोग।

समष्टि माध्य से मदा के विचलन हैं $x_{a1} = X_{a1} - \lambda_{\wp}$ $x_{b1} = X_{b1} - \lambda_{\wp}$, , $x_{\wedge 1} = \lambda_{\vee 1} - X_{\wp}$ $x_{a2} = X_{a2} - X_{\wp}$, इत्यादि। इसलिए हम विभिन्न मदों को इस रूप मे लिख सकते हैं $\bar{Y}_{\wp} + x_{a1}$ $\lambda_{\wp} + x_{b1}$, , $X_{\wp} + x_{\wedge 1}$, $\bar{X}_{\wp} + x_{a2}$ इत्यादि।

प्रतिदर्श 1 के लिए $\Sigma Y_1 = N\bar{X}_{\wp} + \Sigma x_1$,

प्रतिदश 2 के लिए $\Sigma X_2 = N\bar{X}_{\wp} + \Sigma x_2$,

इत्यादि.

जहाँ $\Sigma x_1 \neq 0$ $\Sigma x_2 \neq 0$, इत्यादि क्योंकि $x = X - \bar{X}_{\wp}$

मानों की श्रेणी मे एक अचर को जोडने (या एक अचर को घटाने) से उन मानों के मानक विचलन के मान मे परिवतन नहीं होता ताकि

$$\sigma_{\Sigma Y} = \sigma_{\Sigma x}$$

K प्रतिदर्शों के लिए

$$\sigma^2_{\Sigma X} = \frac{\sum_{1}^{K} (\Sigma_x)^2}{K} - \left[\frac{\sum_{1}^{K} (\Sigma_x)}{K} \right]^2$$

$$= \frac{\sum_{1}^{K} (\Sigma) x^2}{K},$$

क्योंकि

$$\sum_{1}^{K} (\Sigma x) = \Sigma x_1 + \Sigma x_2 + \quad + \Sigma x_K = 0$$

तथा

$$K\sigma^2_{\Sigma x} = \sum_{1}^{K} (\Sigma x)^2 = \sum_{1}^{K} (x_a + x_b + {}_c + \ldots + x_N)^2$$

किसी एक प्रतिदर्श के लिए,

$$(x_a+x_b+x_c+ \quad +x_\nu)^2 = x_a + x_a x_b + x_a x_c + \quad + x_a x_\nu$$
$$+ x_a x_b + x_b^2 + x_b x_c + \quad + x_b x_\nu$$
$$+ x_a x_c + x_b x_c + x_c^2 + \quad x_c x_\nu$$
$$+$$
$$+ x_a x_\nu + x_b x_\nu + x_c x_\nu \quad + x_\nu^2$$
$$= \Sigma x_i^2 + 2\Sigma x\, x$$

जहा x_i किसी मद का द्योतक तथा $x\, x$ दो पृथक मदो के प्रत्येक सचय के परिणामस्वरूप प्राप्त गुणनफल का परिचायक है। इसलिए K प्रतिदर्शों के लिए

$$K\sigma^2_{\Sigma x} = \sum_1^K (\Sigma x_i^2 + 2\Sigma x\, x_j)$$
$$= \sum_1^K (\Sigma x_i^2) + 2\sum_1^K (\Sigma x\, x)$$

N मदो के प्रत्यक प्रतिदश म ममष्टि का $\frac{N}{\wp}$ भाग मम्मिलित है तथ प्रत्यक मद प्रतिदर्शो के $\frac{N}{\wp}$ म पायी जायेगी, अथवा $\frac{N}{\wp}K$ बार। यदि निर्दिष्ट मद(x_i)प्रतिदर्शों के $\frac{N}{\wp}$ मे पायी जाती है तो दूसरी मद (x_j) प्रतिदर्शों के $\frac{N-1}{\wp-1}$ मे मिलेगी जिसम प्रथम मद उपस्थित है तथा दोनो मदें प्रतिदर्शों के $\frac{N}{\wp}\ \frac{N-1}{\wp-1}$ मे होगी अथवा $\frac{N(N-1)}{\wp(\wp-1)}K$ बार होगी। इस प्रकार प्रत्येक $x_i x_j$ उपस्थित होगी $\frac{N(N-1)}{\wp(\wp-1)}K$ बार।

इसलिए,

$$K\sigma^2_{\Sigma x} = \frac{N}{\wp}K\sum_1^{\wp} x_i^2 + 2\frac{N(N-1)}{\wp(\wp-1)}K\sum_1^{\wp} x_i x_j$$

तथा

$$\sigma^2_{\Sigma x} = \frac{N}{\wp}\sum_1^{\wp} x_i^2 + 2\frac{N(N-1)}{\wp(\wp-1)}\sum_1^{\wp} x_i x_j$$

एक प्रतिदश के लिए $(\Sigma x)^2$ के पूव प्रदर्शित विकाम के समान विकास या वृद्धि से हम पात हैं

$$2\sum_1^{\wp} x_i x_j = \left(\sum_1^{\wp} x_i\right)^2 - \sum_1^{\wp} x_i^2$$

किन्तु $\sum_{1}^{\wp} x_i = 0$ अतएव $2\sum_{1}^{\wp} x_i x_j = -\sum_{1}^{\wp} x_i^2$, तथा

$$\sigma^2_{\Sigma X} = \frac{N}{\wp}\sum_{1}^{\wp} x_i^2 - \frac{N(N-1)}{\wp(\wp-1)}\sum_{1}^{\wp} x_i^2,$$

$$= \frac{N}{\wp}\wp\sigma^2 - \frac{N(N-1)}{\wp(\wp-1)}\wp\sigma^2,$$

$$= N\sigma^2 - \frac{N(N-1)}{\wp-1}\sigma^2,$$

$$= N\sigma^2\left(1 - \frac{N-1}{\wp-1}\right),$$

$$= N\sigma^2\left[\frac{(\wp-1)-(N-1)}{\wp-1}\right]$$

$$= N\sigma^2\frac{\wp-N}{\wp-1}$$

$$\sigma_{\Sigma X} = \sqrt{N}\sigma\sqrt{\frac{\wp-N}{\wp-1}}.$$

प्रत्येक प्रतिदर्श मे क्योंकि N मदें है अत प्रतिदर्श राशियो के समातर माध्य से एक प्रतिदर्श राशि का प्रत्येक विचलन N बार उतना बडा होगा जितना प्रतिदर्श माध्यो $\bar{X}_{\wp}$ के समातर माध्य से एक प्रतिदर्श माध्य का प्रत्येक सगत विचलन, तथा प्रतिदर्श राशि का प्रत्येक वर्गीकृत विचलन, प्रत्येक प्रतिदर्श माध्य के वर्गीकृत विचलन से N^2 बार होता है। अतएव प्रतिदर्श राशियो का मानक विचलन प्रतिदर्श माध्यो के मानक विचलन से N बार होता है। अन्तिम समीकरण के प्रत्येक पक्ष को N से भाग देने पर

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\wp-N}{\wp-1}}$$

यदि $\wp$ अनन्त हो, अथवा यदि $\wp$ सान्त हो किन्तु N की अपेक्षा बडी हो जिससे $\sqrt{\frac{\wp-N}{\wp-1}}$ का मान कार्यसाधक रूप से 1 हो, तो व्यजक इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

परिच्छेद 24 3

यह दिखाने के लिए कि $\frac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \cdots + \hat{\sigma}_K^2}{K} = \hat{\sigma}^2$ जब $N_1 = N_2 = \cdots = N_K = N$

$\bar{X}_{\wp}$ से अकेले प्रतिदर्श की विभिन्नता है $\sum_{1}^{N}(X-\bar{X}_{\wp})$ इसे दो भागों में बाँटा जा सकता है।

$$\sum_{1}^{N}(X-\bar{X}_{\wp})^2=\sum_{1}^{N}[(X-\bar{X})+(\bar{X}-\bar{X}_{\wp})]^2$$

जहाँ $\bar{X}$ प्रतिदर्श के माध्य का परिचायक है

$$=\sum_{1}^{N}[(X-\bar{X})^2+2(X-\bar{X})(\bar{X}-\bar{X}_{\wp})+(\bar{X}-\bar{X}_{\wp})^2]$$

$$=\sum_{1}^{N}(X-\bar{X})^2+2(\bar{X}-\bar{X}_{\wp})\sum_{1}^{N}(X-\bar{X})+N(\bar{X}-\bar{X}_{\wp})^2$$

किन्तु $\sum_{1}^{N}(X-\bar{X})=0$ तथा इसलिए

$$\sum_{1}^{N}(X-\bar{X}_{\wp})^2=\sum_{1}^{N}(X-\bar{X})^2+N(\bar{X}-\bar{X}_{\wp})^2$$

K प्रतिदर्शों के लिए समाहार करते हुए

$$\sum_{1}^{K}\left[\sum_{1}^{N}(X-\bar{X}_{\wp})^2\right]=\sum_{1}^{K}\left[\sum_{1}^{N}(X-\bar{X})^2\right]+\sum_{1}^{K}[N(\bar{X}-\bar{X}_{\wp})^2]$$

N मदों के प्रत्येक यादृच्छिक प्रतिदर्श में समष्टि का $\frac{N}{\wp}$ सम्मिलित है तथा प्रत्येक मद $\frac{N}{\wp}K$ बार आएगी। पिछले व्यंजक के तीन भागों में से प्रत्येक पर पृथक् पृथक् विचार करने से हम पाते हैं

$$\sum_{1}^{K}\left[\sum_{1}^{N}(X-X_{\wp})^2\right]=\frac{N}{\wp}K\sum_{1}^{\wp}(X-X_{\wp})^2$$

$$=NK\frac{\sum_{1}^{\wp}(X-\bar{X}_{\wp})^2}{\wp},$$

$$=NK\sigma^2$$

$$\sum_{1}^{K}\left[\sum_{1}^{N}(X-\bar{X})^2\right]=\sum_{1}^{K}(Ns^2)$$

$$=\sum_{1}^{K}s^2,$$

जहाँ s^2 प्रसरण है, $s^2 = \frac{\Sigma x^2}{N}$, प्रतिदर्श का।

$$\sum_1^K [N(\bar{X}-\bar{X}_g)^2] = N\sum_1^K (\bar{X}-\bar{X}_g)^2,$$
$$= NK\sigma^2_{\bar{X}}.$$

अब हम लिख सकते हैं

$$NK\sigma^2 = N\sum_1^K s^2 + NK\sigma^2_{\bar{X}},$$

तथा, K से भाग देने पर,

$$N\sigma^2 = N\overline{s^2} + N\sigma^2_{\bar{X}},$$

जहाँ $\overline{s^2}$ समान्तर माध्य है s^2 मानों का।

$$N\sigma^2 = N\overline{s^2} + N\frac{\sigma^2}{N},$$

$$= N\overline{s^2} + \sigma^2.$$

$$N\sigma^2 - \sigma^2 = N\overline{s^2}.$$

$$\sigma^2(N-1) = N\overline{s^2}.$$

$$\sigma^2 = \frac{N}{N-1}\overline{s^2},$$

$$= \frac{N}{N-1}\cdot\frac{\frac{\Sigma x_1^2}{N} + \frac{\Sigma x_2^2}{N} + \cdots + \frac{\Sigma x_K^2}{N}}{K},$$

$$= \frac{\frac{\Sigma x_1^2}{N-1} + \frac{\Sigma x_2^2}{N-1} + \cdots + \frac{\Sigma x_K^2}{N-1}}{K},$$

$$= \frac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \cdots + \hat{\sigma}_K^2}{K}.$$

परिच्छेद 24 4

यह सिद्ध करने के लिए कि $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2}}$ स्वतन्त्र प्रतिदर्शों के लिए।

युग्मित समान्तर माध्यों की दो स्वतन्त्र श्रेणियाँ प्रदत्त होने पर उसी आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्शों के लिए माध्यों के होने से तथा प्रत्येक श्रेणी में K माध्यों के निम्न प्रकार सम्मिलित होने से :

निरूपण

प्रतिदश	श्रेणी 1	श्रेणी 2	अंतर
1	$X_{1,1}$	X_{21}	$X_{11}-X_{21}$
2	X_{12}	X_{22}	$X_{12}-X_{22}$
3	X_{13}	X_{23}	$X_{13}-X_{23}$
K	X_{1K}	X_{2K}	$X_{1K}-X_{2K}$

अंतरों का प्रसरण है

$$\sigma^2_{X_1-X_2} = \frac{\sum_1^K [(X_1 - X_2) - (\overline{X_1 - X_2})]^2}{K}$$

जहाँ $(\overline{X_1 - X_2})$ अंतरों का समान्तर माध्य है और इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{\sum_1^K (X_1 - X_2)}{K} = \frac{\sum_1^K X_1}{K} - \frac{\sum_1^K X_2}{K} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

जहाँ $\bar{X}_1$ तथा $\bar{X}_2$ समांतर माध्य हैं श्रेणी 1 तथा श्रेणी 2 के,

$$\sigma^2_{X_1-X_2} = \frac{\sum_1^K [(X_1 - X_2) - (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)]^2}{K}$$

$$= \frac{\sum_1^K [(X_1 - \bar{X}_1) - (X_2 - \bar{X}_2)]^2}{K}$$

$x_1 = X_1 - \bar{X}_1$ तथा $x_2 = X_2 - \bar{X}_2$, लिखने से, हम पाते हैं

$$\sigma^2_{x_1-x_2} = \frac{\sum_1^K (x_1 - x_2)^2}{K} = \frac{\sum_1^K (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)}{K}$$

$$= \frac{\sum_1^K x_1}{K} - 2\frac{\sum_1^K x_1 x}{K} + \frac{\sum_1^K x}{K}$$

अब $\frac{\sum_1^K x_1 \bar{x}_2}{K}$ माध्यों की दो श्रेणियों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक के व्यंजक का एक भाग

है जिसे इस प्रकार लिखा जा सकता है $r_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = \dfrac{\frac{\sum^{K} \bar{x}_1 \bar{x}_2}{1}}{K\sigma_{\bar{x}_1}\sigma_{\bar{x}_2}}$ (प्रतिदर्श के लिए r के गुणनफल-घूर्ण सूत्र के निमित्त पृष्ठ 420 देखिए), जिससे

$$2\,\frac{\frac{\sum^{K} \bar{x}_1 \bar{x}_2}{1}}{K} = 2r_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\sigma_{\bar{x}_1}\sigma_{\bar{x}_2}, \text{ साथ ही, } \frac{\frac{\sum^{K} \bar{x}_1^2}{1}}{K} = \sigma^2_{\bar{x}_1} \text{ तथा } \frac{\frac{\sum^{K} \bar{x}_2^2}{1}}{K} = \sigma^2_{\bar{x}_2}.$$

इसलिए

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}} = \sigma^2_{\bar{x}_1} - 2r_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\sigma_{\bar{x}_1}\sigma_{\bar{x}_2} + \sigma^2_{\bar{x}_2}, \text{ तथा}$$

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} - 2r_{\bar{x}_1\bar{x}}\,\sigma_{\bar{x}_1}\sigma_{\bar{x}_2} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}.$$

क्योंकि माध्यों की दो श्रेणियाँ स्वतंत्र हैं, $r_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = 0$ तथा

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}$$

परिच्छेद 24 5

$\dfrac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2}{2}$ बराबर भारित औसत है $\hat{\sigma}_1^2$ तथा $\hat{\sigma}_2^2$ का। दोनों प्रतिदर्शों में से प्रत्येक में स्वतंत्रता के अंशों की संख्या ($N_1 - 1$ तथा $N_2 - 1$) के बराबर भारों का प्रयोग करने से, हम पाते हैं

$$\hat{\sigma}^2_{1+2} = \frac{(N_1-1)\hat{\sigma}_1^2 + (N_2-1)\hat{\sigma}_2^2}{N_1-1+N_2-1},$$

$$= \frac{(N_1-1)\dfrac{\sum x_1^2}{N_1-1} + (N_2-1)\dfrac{\sum x_2^2}{N_2-1}}{N_1-1+N_2-1},$$

$$= \frac{\sum x_1^2 + \sum x_2^2}{N_1-1+N_2-1}.$$

परिच्छेद 24 6

यह सिद्ध करने के लिए कि $\hat{\sigma}_{1+2}\sqrt{\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}} = \sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \dfrac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}$ जब $N_1 = N_2 = N$, $\hat{\sigma}_{1+2}\sqrt{\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}} = \sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2_{1+2}}{N} + \dfrac{\hat{\sigma}^2_{1+2}}{N}},$

$$= \sqrt{\frac{\frac{(N-1)\sigma_1 + (N-1)\sigma}{N-1+N-1}}{N} + \frac{\frac{(N-1)\sigma_1 + (N-1)\sigma_2}{N-1+N-1}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{(N-1)}{2N}\frac{\sigma_1+\sigma}{2}}{N} + \frac{\frac{(N-1)(\sigma+\sigma)}{2N}\,\frac{}{2}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{\sigma_1+\sigma}{2}}{N} + \frac{\frac{\sigma_1+\sigma}{2}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma_1 \quad \sigma}{N}} = \sqrt{\frac{\sigma}{N} + \frac{\sigma}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma_1}{N_1} + \frac{\sigma}{N_2}}.$$

परिच्छेद 25 1

यह सिद्ध करन व लिए $\sigma_p = \sqrt{\frac{-}{N}}$

अनुपात p मानो की श्रेणी का समान्तर माध्य है जहा प्रत्यक उपस्थिति 1 के बराबर होती है तथा प्रत्यक अनुपस्थिति शू य के बराबर हाती है।

प्रतिदश के लिए हमारे पास है

	सख्या	अनुपात
	a	p
उपस्थितिया	b	q
अनुपस्थितिया	N	1 0
योग		

यह स्पष्ट है कि $a = Np$ तथा $b = Nq$

क्योकि एक उपस्थिति 1 क बराबर होती है तथा अनुपस्थिति शू य के बराबर होती है, अन हमारे पास है

$$X = \frac{a(1) + b(0)}{N} = \frac{a}{N} = p,$$

और इसका परिणाम होना है कि $\sigma_X = \sigma_p \quad \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

σ के लिए व्यंजक प्राप्त करने को, हम निम्नलिखित समष्टि चिह्नों का प्रयोग करते हैं

	संख्या	अनुपात
उपस्थितियाँ	α	π
अनुपस्थितियां ..	β	τ
योग	φ	1.0

यह स्पष्ट है कि $\pi=\frac{\alpha}{\varphi}$ तथा $\tau=\frac{\beta}{\varphi}$.

पुन प्रत्येक उपस्थिति 1 के बराबर तथा अनुपस्थिति शून्य के बराबर होती है, जिससे

$$\sigma=\sqrt{\frac{\alpha(1)^2+\beta(0)^2}{\varphi}-\left[\frac{\alpha(1)+\beta(0)}{\varphi}\right]^2},$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha}{\varphi}-\left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)^2}=\sqrt{\pi-\pi^2}=\sqrt{\pi(1-\pi)},$$

$$=\sqrt{\pi\tau}.$$

हम अब लिख सकते हैं

$$\sigma_p=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}=\frac{\sqrt{\pi\tau}}{\sqrt{N}}=\sqrt{\frac{\pi\tau}{N}}.$$

क्योंकि $a=Np$, अत हम इस प्रकार भी लिख सकते है

$$\sigma_a=N\sigma_p=N\sqrt{\frac{\pi\tau}{N}}=\sqrt{N\pi\tau}.$$

परिच्छेद 26 1

यह सिद्ध करने के लिए कि

$$\sum_1^{kc}[N_c(\bar X_c-\bar X)^2]=\sum_1^{kc}\left[\frac{\left(\sum_1^{N_c}X\right)^2}{N_c}\right]-\frac{(\sum X)^2}{N}$$

बाईं ओर का व्यंजक कहता है "प्रत्येक स्तम्भ के लिये, महामाध्य से स्तम्भ मध्य के विचलन को वर्गीकृत कीजिए, स्तम्भ मे मदो की संख्या से गुणा कीजिए, और सब स्तम्भो के लिए इन गुणनफलों का योग कीजिए।"

$$\sum_1^{kc}(N_c(\bar X_c-\bar X)^2]=\sum_1^{kc}[N_c(\bar X_c^2-2\bar X\bar X_c+\bar X^2)],$$

$$=\sum_1^{kc}(N_c\bar X_c^2-2N_c\bar X\bar X_c+N_c\bar X^2),$$

$$=\sum_1^{kc}(N_c\bar X_c^2)-2\bar X\sum_1^{kc}(N_c\bar X_c)+\sum_1^{kc}(N_c\bar X^2).$$

किन्तु $$\sum_1^{k_c} (N_c \bar{X}_c^2) = \sum_1^{k_c} \left[N_c \frac{\left(\sum_1^{N_c} X\right)^2}{N_c} \right] = \sum_1^{k_c} \left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} X\right)^2}{N_c} \right];$$

$$\sum_1^{k_c}(N_c\bar{X}_c) = \sum_1^{k_c}\left(N_c \frac{\sum_1^{N_c} X}{N_c}\right) = \sum_1^{k_c}\left(\sum_1^{N_c} X\right) = \sum X,$$ तथा

$$\sum_1^{k_c}(N_c \bar{X}^2) = N\bar{X}^2 = \frac{(\sum X)^2}{N}.$$

इसलिए,

$$\sum_1^{k_c}[N_c(\bar{X}_c-\bar{X})^2] = \sum_1^{k_c}\left[\frac{\left(\sum_1^{N_c} X\right)^2}{N_c}\right] - 2\bar{X}\sum X + \frac{(\sum X)^2}{N},$$

$$= \sum_1^{k_c}\left[\frac{\left(\sum_1^{N_c}X\right)^2}{N_c}\right] - \frac{(\sum X)^2}{N}.$$

परिच्छेद 26 2

यह सिद्ध करने के लिए कि

$$\sum_1^{k_c}\left[\sum_1^{N_c}(X-\bar{X}_c)^2\right] = \sum X^2 - \sum_1^{k_c}\left[\frac{\left(\sum_1^{N_c}X\right)^2}{N_c}\right],$$

बाईं ओर का व्यंजक कहता है : "प्रत्येक स्तम्भ के लिए, उस स्तम्भ के माध्य से वर्गीकृत विचलनों का योग कीजिए तथा सब स्तम्भों के लिए इन योगफलों का योग कर दीजिए।"

$$\sum_1^{k_c}\left[\sum_1^{N_c}(X-\bar{X}_c)^2\right] = \sum_1^{k_c}\left[\sum_1^{N_c}(X^2 - 2\bar{X}_c X + \bar{X}_c^2)\right]$$

$$= \sum_1^{k_c}\left(\sum_1^{N_c}X^2 - 2\bar{X}_c\sum_1^{N_c}X + N_c\bar{X}_c^2\right),$$

$$= \sum_1^{k_c}\left[\sum_1^{N_c}X^2 - 2\frac{\left(\sum_1^{N_c}X\right)^2}{N_c} + \frac{\left(\sum_1^{N_c}X\right)^2}{N_c}\right],$$

$$= \sum_{1}^{k_c}\left[\sum_{1}^{N_c} X^2 - \frac{\left(\sum_{1}^{N_c} X\right)^2}{N_c}\right]$$

$$= \Sigma X^2 - \sum_{1}^{K_c}\left[\frac{\left(\sum_{1}^{N_c} X\right)^2}{N_c}\right]$$

परिच्छेद 26 3

यह सिद्ध करने के लिए $\sqrt{\frac{r^2(N-2)}{1-r^2}} = \sqrt{\frac{b^2\Sigma x^2(N-2)}{\Sigma y_s^2}}$

$$\sqrt{\frac{r^2(N-2)}{1-r^2}} = \sqrt{\frac{\frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2 \Sigma y^2}(N-2)}{\frac{\Sigma y_s^2}{\Sigma y^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2}(N-2)}{\Sigma y_s^2}}.$$

क्योंकि $b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$, $\quad \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2} = b^2\Sigma x^2$, तथा

$$\sqrt{\frac{r^2(N-2)}{1-r^2}} = \sqrt{\frac{b^2\Sigma x^2(N-2)}{\Sigma y_s^2}}.$$

परिच्छेद 26 4

यह सिद्ध करने के लिए कि $t^2 = F$ आंशिक सहसंबंध के गुणांकों के लिए। अर्थात् कि

$$\frac{r^2_{1m\cdot 23\cdots(m-1)}(N-m)}{1-r^2_{1m\cdot 23\cdots(m-1)}} = \frac{(\Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots m} - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots(m-1)})(N-m)}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots m}}$$

क्योंकि $r^2_{1m\cdot 23\cdots(m-1)} = \frac{\Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots m} - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots(m-1)}}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots(m-1)}}$, हम लिख सकते हैं

$$\frac{r^2_{1m\cdot 23\cdots(m-1)}(N-m)}{1-r^2_{1m\cdot 23\cdots(m-1)}}$$

$$= \frac{\frac{\Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots m} - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots(m-1)}}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots(m-1)}}(N-m)}{\frac{\Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots(m-1)}}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots(m-1)}} - \frac{\Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots m} - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots(m-1)}}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots(m-1)}}}$$

$$= \frac{(\Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots m} - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots(m-1)})(N-m)}{\Sigma x_1^2 - \Sigma x^2_{e1\cdot 234\cdots m}}.$$

परिशिष्ट न

संख्याओं का पूर्णांकन[1]

शब्दावली

मूल आँकड़े मापों (जो कदापि यथार्थ नहीं हो सकते) से, अथवा गणना से प्राप्त होते हैं। अत. मापों का सदा पूर्णांकन किया जायगा, गणनाओं का भी पूर्णांकन किया जा सकता है। पूर्णांकन के परिणामस्वरूप प्राप्त संख्या एकल मान की अपेक्षा सदा संभव मानों की मात्रा की परिचायक होगी। इस प्रकार यदि किसी संख्या 78 पाउंड अंकित की जाय तो हम जानते हैं कि वास्तविक मान 77 5 पाउंड से कम नहीं है और न 78 5 पाउंड से अधिक ही है।

अंक उस दशा में सार्थक होता है यदि त्रुटि अगले दाहिने अंक में ±5 से अधिक न हो। इस प्रकार, यदि माप 172 3 पाउंड अंकित किया जाय तो हम मान लेते हैं कि यथार्थ मान 172 3±0 05 अथवा 172 25 पाउंड और 175 35 पाउंड के भीतर है और इसमें चार सार्थक अंक हैं। कभी-कभी गणना में भी सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात करना कठिन होता है। इस प्रकार, यह नितान्त असम्भाव्य है कि महाद्वीपीय संयुक्त राज्य में 1 अप्रैल, 1960 को यथार्थतः 178,464 236 व्यक्ति थे, जैसी सूचना जनगणना ब्यूरो द्वारा दी गई।

परिशुद्ध रूप में लिए गए तथा ठीक ढंग से अंकित मापों के लिए, अथवा, पूर्णांकित गणनों के लिए, शुद्ध शब्दावली के तीन उदाहरण नीचे दिए जाते हैं

127 34 में पाँच सार्थक अंक कहे गए हैं। इसका पाँच सार्थक अंकों तक, अथवा दो सार्थक दशमलव स्थानों तक पूर्णांकन किया गया है।

4,125 हज़ार या 4 125 दसलक्ष या $4,125\times10^3$ या 4,125,000, चार अंकों तक सार्थक है। यदि यह संख्या सारणी में प्रस्तुत हो, तो प्रायः हजारों के उल्लेख सहित प्रारंभिक टिप्पणी या स्तम्भ-शीर्षक के साथ संख्या 4,125 अंकित की जाएगी। 4,125,000 में सार्थक अंकों की संख्या अस्पष्ट है, क्योंकि इसका परिसर चार से सात तक हो सकता है। फिर भी संदर्भ प्रायः सार्थक अंकों की संख्या का संकेत कर देता है। यदि कोई संख्या, दशमलव बिन्दु के बाद शून्य में समाप्त हो तो कोई अस्पष्टता या संदिग्धता नहीं रहती। इस प्रकार 4,125.0 तथा 4 1250 में से प्रत्येक में पाँच सार्थक अंक हैं।

0.00031 में पाँच की अपेक्षा दो सार्थक अंक हैं (यद्यपि 0.10031 में पाँच तथा 1.00031 में छः हैं)। इसका कारण यह है कि माप की इकाई का चुनाव यादृच्छिक होता

---

1. संख्याओं के पूर्णांकन का यह विवेचन, एफ० ई० क्रॉक्स्टन तथा डी० जे० काउडन के ग्रन्थ प्रैक्टिकल बिजनेस स्टैटिस्टिक्स, तृतीय संस्करण, प्रेंटिस हॉल, इन्कॉ०, एंगलवुड क्लिफ्स, एन० जे०, 1960, पृष्ठ 52—57 से उद्धृत किया गया है।

है। उदाहरण के लिए, 0 031 मीटर 31 मिलिमीटर भी है। इस प्रत्यय का महत्त्व तब स्पष्ट होगा जब पूर्णांकित सख्याओ को गुणा और भाग करने के नियम प्रस्तुत करेंगे।

पूर्णांकन के नियम

1 यदि दाहिनी ओर का छोड़ा जाने वाला अन्तिम अक 5 से कम हो तो उससे पहला अक अप्रभावित (ज्यो का त्यो) रहता है। इस प्रकार 113 746 चार अको मे पूर्णांकित किए जाने पर 113 7 हो जाता है।

2 यदि दाहिनी ओर का छोड़ा जाने वाला अंतिम अक 5 से अधिक हो, या 5 हो और उसके बाद के सब अक शून्य न हो (यदि सख्या काफी अक सख्या तक ले जाई गई हो) तो उससे पिछले अक मे 1 जोड दिया जाता है। इस प्रकार 129 673 चार अको मे पूर्णांकित किए जाने पर 129 7 हो जाता है। इसी प्रकार 87 2500001 का जब तीन अको मे पूर्णांकन किया जाता है तो 87 3 हो जाता है।

3 यदि छोड़ा गया दक्षिणतम अक 5 हो, और उसके बाद शून्य हो तो उसके पूर्व के अक मे यदि वह विषम होगा तो 1 जोड दिया जाएगा, और यदि सम होगा तो वैसे ही अपरिवर्तित छोड दिया जाएगा। सख्या का पूर्णांकन इस प्रकार किया जाता है कि अंतिम सुरक्षित अक सम हो। उदाहरण के लिए 103 55 चार अको मे पूर्णांकित होने पर 103 6 बन जाता है तथा 103 45 रह जाता है 103 4 (फिर भी 103 5499 बन जाता है 103 55 जैसा अनुच्छेद 1 मे समझाया गया है तथा 103 4501, जैसा अनुच्छेद 2 मे समझाया गया है, 103 5 बन जाता है।) यह नियम इसलिए ग्रहण किया जाता है, जिससे सकलन मे त्रुटियो के सचय से बचा जा सके। यदि पिछले अक को सदा बढा दिया जाय अथवा अपरिवर्तित छोड दिया जाय तो परिणामस्वरूप सकलन मे त्रुटियो का सचय सभव है। यह नियम (अंतिम अक को सम बनाने का) इसके विपरीत नियम (अन्तिम अक को विषम बनाने का) की अपेक्षा साधारणत अधिक प्रयुक्त होता है। क्रमश आधा जोडने और छोडने की अपेक्षा यह नियम अधिक सुविधाजनक है क्योंकि इसमे यह स्मरण रखने की परेशानी से मुक्ति मिल जाती है कि पिछली बार आधा जोडा गया था या छोडा गया था।

पूर्णांकित सख्याओं से प्राप्त गुणनफल तथा भागफल

1 गुणा (वर्गकरण सहित) करने भाग देने अथवा वर्गमूल निकालने मे अन्तिम उत्तर के रूप मे कम से कम सार्थक अको वाली मूल सख्या के अको से अधिक अको को

---

2 विशेष परिस्थितियो मे इस नियम का अपवाद हो सकता है यदि उत्तर में अको की सार्थक सख्या का स्पष्ट निर्देश हो।

जहाँ आकडो के एक समुच्चय के साथ काम करने मे गुणा भाग अथवा वर्गमूल निकालने से सम्बन्धित कई परिकलन करने पड़े, वहाँ कभी कभी मध्यवर्ती परिकलनो मे कम से कम सार्थक अको वाली मूल सख्या के अको से एक अधिक अक अकित करना उचित है। कभी कभी एक से अधिक असार्थक अक वाञ्छनीय हो सकते हैं। इस ग्रन्थ में हमने कभी कभी अपने परिकलनो की परिशुद्धता के निमित्त विधिवत नियत्रणार्थ, एक से अधिक असार्थक अको का प्रयोग किया है। अतिरिक्त अक चाहे पूर्ण परिशुद्ध न हो, किन्तु वे अन्तिम उत्तर प्राप्त करने के निमित्त अपना योग देने के पर्याप्त निकट होते हैं। उदाहरण के लिए यदि हम अपने अंतिम उत्तर में तीन अक चाहे और हमारे पास सख्या हो (4 137×0 684) (0 316×7 831) तो हम 2 83−2 47=1 15 की अपेक्षा 2 830−2 475=1 14 का प्रयोग करेंगे।

अंकित नही करना चाहिए। निम्नलिखित दृष्टान्त अंको की अधिकतम सख्या का सकेत करते हैं जहा तक अंकित करना व्यवहार की दृष्टि से उत्तम होगा

359×412	$= 147$ हजार।
14×427	$=$ 6 0 हजार।
$3\ 194 \times 25 \times 427$	$= 34$ हजार।
$4\ 831 \times 0\ 00412$	$= 199$
$5\ 673 \times 8$ (यथार्थ)	45 38 हजार
$25 - 23$	1 1
$42\ 7 \quad 52$	0 82
$52 - 42\ 7$	1 ?
$\sqrt{0\ 354}$	$= 0\ 595$

उपर्युक्त उदाहरणो मे अको की अधिकतम सख्या जो साथक हो सकती है अकित की गई है, कुछ उदाहरणो मे अको की साथक सख्या अंकित सख्या से कम होगी।[3]

2 यदि साथक अको की प्राप्त सख्या अंतिम उत्तर मे अपेक्षित हो तो उत्तर मे अपेक्षित अंक सख्या से प्रत्यक सख्या तथा प्रत्यक मध्यवर्ती परिणाम मे एक साथक अक अधिक होना चाहिए। यदि मूल आकडा म से किसी म इस नियम के अनुसार आवश्यक अको से अधिक हो तो उन अधिक अको का पूर्णांकन किया जा सकता है। इस प्रकार यदि अंतिम उत्तर म तीन अक अपेक्षित हो तो हम निम्न प्रकार आगे बढ सकते हैं

$$\sqrt{\frac{(2\ 7608)}{(13\ 195)(0\ 87367)}} = \sqrt{\frac{(2\ 761)^2}{(13\ 20)(0\ 8737)}}$$

$$= \sqrt{\frac{7\ 623}{11\ 53}} = \sqrt{0\ 6611} = 0\ 813$$

जैसा लगभग हमेशा होता है अन्तिम उत्तर वही होता है जसे हमने सभी मूल अको को सुरक्षित रखा हो तथा प्रत्येक मध्यवर्ती चरण मे एक अक अधिक ग्रहण किया हो

$$\sqrt{\frac{(2\ 7608)}{(13\ 195)(0\ 87367)}} = \sqrt{\frac{7\ 6220}{11\ 525}} = \sqrt{0\ 66117} = 0\ 813$$

इस थोडी सी सभावना के कारण कि अधिकतर अन्तग्रस्त सख्याएँ अधिकतम सभव मात्रा म निकट तक त्रुटिपूर्ण होगी तथा इस अधिक सभावना के कारण कि मूल आँकडों के पूर्णांकन से त्रुटियो का पर्याप्त निराकरण हो जायगा मूल आकडो का पूर्णांकन उचित है।

3 सातवें उदाहरण मे सच पूछिये तो उत्तर मे केवल एक साथक अक है। यह स्मरण करते हुए कि पूर्णांकन के बाद लिखी गई सख्या 42 7 घट बढ सकती है 42 65 तथा 42 75 के बीच जब कि जो सख्या 52 अकित की गई 51 5 तथा 52 5 के बीच घट-बढ सकती है हम परिकलन कर सकते हैं

$42\ 75 - 51\ 5 = 830$ तीन अको तक बृहत्तम सभव परिणाम

$42\ 7 - 52 = 821$ तीन अकों तक

$42\ 65 - 52\ 5 = 812$ तीन अको तक लघुतम सभव परिणाम।

$42\ 65 - 52\ 5 = 812$ सम्मिलित नही हैं अत यह स्पष्ट है कि 821 क्योंकि 821 ± 005 के भीतर 830 तथा 812 सम्मिलित नही हैं अत यह स्पष्ट है कि 821 मे दूसरा अक साथक नही है।

3 जब गुणनफल या भागफल का पहले से पता हो तब पूर्णांकित मूल संख्याओं के प्रयोग से प्राप्त सन्निकट गुणनफल या भागफल की अपेक्षा उनकी शुद्ध संख्याओं को ही अंकित करना चाहिए। इस प्रकार यद्यपि 0 175×0 333 0 0416 यदि यह ज्ञात हो कि यथार्थ सक्रिया है $\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$ 0 0417 तो उत्तर 0 0416 की अपेक्षा 0 0417 अंकित किया जाना चाहिए।

पूर्णांकित संख्याओं से प्राप्त योग तथा अंतर

योग तथा व्यवकलन के नियम बहुत कुछ गुणा तथा भाग के नियमों के समानान्तर हैं अन्तर केवल इतना है कि इनमें सार्थक अंकों की संख्या के स्थान पर सार्थक दशमलव स्थानों पर विचार किया जाता है।

1 योग अथवा व्यवकलन में अन्तिम उत्तर को उतने दशमलव स्थानों से अधिक कदापि अंकित नहीं करना चाहिए जितने कम से कम सार्थक दशमलव स्थान मूल संख्या में हों। निम्न व्यावहारिक व्यवहार की दृष्टि से अंकित करने के लिए उत्तम अधिकतम अंक संख्या का निदर्शन करता है

2 156 2 + 39 = 2 195
2 156 2 − 39 2 117
13 + 12 = 25
13 − 12 − 1

उपर्युक्त निदर्शों में सार्थक दशमलव स्थानों की अधिकतम संख्या अंकित की गई है कुछ उदाहरणों में सार्थक संख्या अंकित संख्या से कम होगी।[4]

2 यदि अंतिम उत्तर में सार्थक दशमलव स्थानों की प्रदत्त संख्या अपेक्षित हो तो यह वाञ्छित होगा कि उत्तर में अपेक्षित दशमलव स्थानों की संख्या से मूल संख्या में एक दशमलव स्थान अतिरिक्त हो। यदि किसी मूल आंकड़े में इस नियम के अनुसार आवश्यक अंकों से अधिक अंक हों तो अतिरिक्त अंकों का पूर्णांकन किया जा सकता है। इस प्रकार यदि अंतिम उत्तर में दशमलव स्थान अनावश्यक हो (दशमलव बिन्दु के दाहिनी ओर कोई अंक अपेक्षित न हो) तो हम निम्न प्रक्रिया को अपना सकते हैं

122 34	इनका पूर्णांकन इस प्रकार हो सकता है	122 3
81 7		81 7
293 826		293 8
497 866		497 8

जिनमें से दोनों का पूर्णांकन 498 होता है।

इस अत्यल्प संभावना के कारण कि अधिकतर अंतग्रस्त संख्याएँ अधिकतम संभव मात्रा के

4 यदि विद्यार्थी अंतिम दो परिणामों को पाद टिप्पणी 2 में विवेचित प्रक्रिया के समान प्रक्रिया से जाँच करेगा तो पायेगा कि अंतिम अंकित अंक सार्थक नहीं है क्योंकि त्रुटि की सीमाएं अनुमेय ± 0 5 के स्थान पर ± 1 0 हैं।

निकट तक त्रुटिपूर्ण होगी तथा इस महत्व सम्भावना के कारण कि मूल आँकड़ा के पूर्णांकन मे त्रुटियों का पर्याप्त निराकरण हो जाएगा मूल आकडा का पूर्णांकन उचित है।

3 जब शुद्ध योग पहले से पता हो तब पूर्णांकित सख्याओं को जोडने से प्राप्त सन्निकट योगफल की अपेक्षा ज्ञात शुद्ध योगफल को अकित करना चाहिए। इस प्रकार

	डॉलर	डालर (हजारो मे)	योग का प्रतिशत*
	507 334	507 3	66 67
	126 832	126 8	16 67
	126 834	126 8	16 67
अकित सख्याओ का योग	761 000	760 9	100 01
पूर्व ज्ञात शुद्ध योग को अकित कीजिए	761 000	761 0	100 00

* स्तम्भ 1 से परिकलित। प्रत्येक प्रतिशत के लिए यदि मान अको तक का भी प्रयोग किया जाय, तब भी योगफल यथार्थ 100 नही होगा।

पारिभाषिक शब्दावली

अंक scores, digit
अंकित करना *recording*
अंत inter
अंत क्रिया interaction
अंतर difference
अंतराल interval
अंतर्वेशन interpolation
अंश numerator degree
अकरण failure
अक्ष axis
अक्षर लेखन lettering
अग्रता lead
अघटित परिणाम non sequitur
अतुलनीय non comparable
अनियमित *irregular*
अनिर्धारण non-determination
अनुकूलन adaptation
अनुक्रमिक *sequential*
अनुपयुक्तता impropriety
अनुपात ratio, propoition
अनुप्रयुक्त applied
अनुप्रयोग application
अनुमान inference
अनुमानित approximate
अनुसंधान research
अनुसूची schedule
अनेकधा multiple
अन्य सक्रामण alteration
अपक्व raw
अपस्फीति deflation
अप्रकट concealed
अप्रातिनिधिक unrepresentative
अभिकल्पित designed
अभिगम approach
अभिनत biased
अरेखिक non-linear
अर्ध सारणिक semi tabular
अवधि period
अवशिष्ट residual
अव्याख्यात unexplained
असमता inequality
असममित asymmetrical
असमूहित ungrouped
अस्थानस्थ misplaced
आँकड़े data
आंतरिक *intra*
आंशिक partial
आकलन estimate, estimating, estimatio
आकलित estimated
आकस्मिक sudden
आकस्मिकता contingency
आकार size
आदर्श ideal
आधार base
आनुभविक empirical
आयतन volume
आरेख diagram
आलेखन plotting
आलोचना criticism
आवधिक periodic
आवर्ती periodic
आश्रित dependent
आसजन fit, fitness
आसजन सौष्ठव goodness of fit

इकाई unit

उच्चतर higher
उत्तरोत्तर progressive
उत्पाद produce
उत्पादन production
उदगम origin
उपनति trend
उपनतिहीन unbiased
उपभोक्ता consumer
उपयुक्तता suitability
उल्टा reverse

ऊर्ध्वाधर vertical

ऋजु straight
ऋणात्मक negative
ऋतुनिष्ठ seasonal
ऋतुनिष्ठताहीन बनाना deseasonalizing

एकघातीय linear
एकल single

औसत average
औसत निकालना averaging

ककुदता kurtosis
कारक factor
कारणता causation
कारणत्व causation
कार्यक्रम programming
कालश्रेणी time series
कालावधि period
कालिक periodic
केंद्रीय central
कैलेण्डर भिन्नता calendar variation
कोटि ordinate rank
कोटिज्या cosine
कोटिबद्ध ranked
कोणांक amplitude
क्रम order
क्रमिक progressive

क्रिया activity
क्षेत्र *area zone*
क्षैतिज horizontal

खंडित non proven disproven
खुले सिरे वाला open end

गणन enumeration
गणन (गिनती) पत्र score sheet tally sheet
गणना enumeration
गणितीय mathematical
गति movement
गतिशील moving
गाम्पर्त Gompertz
गुच्छ cluster
गुण nature quality
गुणधर्म property
गुणांक coefficient
गुणात्मक qualitative
गुणोत्तर geometric
गौण secondary

घटक भाग component part
घटबढ variation
घनत्व density
घात power
घातीय exponential
घूर्ण moment

चक्र cycle
चक्रवृद्धि compound
चक्रीय cyclical
चतुर्थक quartile
चतुर्थांश fourth degree quadrant
चयन choice selection
चर variable
चरघातांकी exponential
चरम extreme
चपटककुदी platykurtic
चित्रलेखन pictograph

छँटाई sorting

छायाचित्र silhouette
छिद्रण punch

जटिल complex
जनसंख्या population
ज्या sine

ढाल slope

तत्त्व element
तर्कसंगत logical
तिरछा skewed
तिरछापन skewness
तिरछी रेखाओं वाला hatched
तुंगककुदी leptokurtic
तुलना comparison
तुलनात्मकता comparability
तुल्यकालिक synchronous
तैथिक chronological
तोरण ogive
त्रुटि error

थोक wholesale

दंड बार
दर rate
दशमक decile
दशमलव decimal
दीर्घकालिक secular
दूषित faulty
दृष्टांत illustration
दोहरा double
द्विघातीय quadratic
द्वितीय क्रम second order
द्वितीयांश second degree
द्विपद binomial
द्विबहुलकता bi-modality

धनात्मक positive

निम्नतर lower
नियंत्रण control
नियम law

निरपेक्ष absolute
निरसन elimination
निराकरणीय null
निरीक्षण inspection
निरूपण demonstration
निर्देश reference
निर्देशांक coordinate
निर्माण construction
न्यूनतम least

पंक्ति row
पंचमक quintile
पंचमांश fifth degree
पंजीकरण registration
पण्य commodity
परावर्तन reversal
परिकलन computation, calculation
परिकल्पना hypothesis
परिचालन operation
परिच्छेद section
परिभाषा definition
परिमाण magnitude volume
परिवर्तनशील changing
परिवर्ती varying
परिशुद्धता accuracy
परिष्कार refinement
परिसर range
परिसीमा limit
परिहार (करना) (to) avoid
परीक्षण test
पश्चता lag
पिछला सिरा (पिछली भुजा) tail
पूर्णांकन (करना) rounding
पूर्वग्रह bias
पूर्वदर्शन preview
पूर्वानुमान forecasting
पृथक्त्व isolating
पैमाना scale
प्रकीर्ण scatter
प्रक्रिया procedure

प्रतिदर्श sample
प्रतिपादन treatment
प्रतिरूप pattern
प्रतिशतता percentage
प्रतिस्थापन substitution
प्रत्यक्ष direct
प्रत्यय concept
प्रदत्त given
प्रबंध management
प्रमाण proof
प्रयोग experiment
प्रयोजन purpose
प्ररूप type
प्रविष्टि entry
प्रवृत्ति tendency
प्रश्नावली questionnaire
प्रसरण variance
प्रसामान्य normal
प्रसार *expansion*
प्रस्तुति presentation
प्राकृतिक natural
प्राथमिक primary
प्रायिकता probability
प्रायोगिक experimental
प्रारंभिक prefatory preliminary
प्रेक्षण observation

बटन *distribution*
बल emphasis
बहु प्रश्न multiple [illegible]
बहुक्रम multi-stage
बहुपद polynomial
बहुलक mode
बारबारता frequency
बाह्यवेशन *extrapolation*
बिंदु point dot
बीजीय algebraic

भारित weighted
भौगोलिक geographical
भौतिक physical
भ्रामक misleading

मध्य mid
मध्यककुदी mesokurtic
मात्रा quantity
मात्रात्मक quantitative
माध्य mean
माध्यिका median
मान value
मानक standard
माप measure measurement
मार्गदर्शन guidance
मूल root
मूल तत्त्व fundamental
मूल बिंदु origin

यथांश quota
यथातथ exact
यांत्रिक *mechanical*
यादृच्छिक haphazard, random
योग sum
योजना plan

रूप form
रूपरेखा outline
रूपान्तरित modified
रेखांकन ruling
रेखिक linear

लघुगणक logarithm
लघुगणकीय logarithmic
लुप्ति *ommiss on*
लेखाचित्री graphic
लेखाचित्रीय graphic

वक्र curve
वक्ररेखीय curvilinear
वर्ग square
वर्ग मूल square *root*
वर्गीकरण classification

वर्णानुक्रमिक alphabetical
वर्षानुवर्ष year over-year
वस्तुनिष्ठ objective
विकास development
विक्षेपण dispersion
विचरण variation
विचलन deviation variation
विच्छेद break
वितत continued
वितरण distribution
विद्युत् electric
विधि method
विनिर्माण manufacturing
विपणन marketing
विम dimensional
विवरण statement
विविक्त discrete
विशिष्ट specific
विशेष आकार characteristic shape
विश्लेषण analysis
विश्वसनीयता dependability
विश्वास्यता confidence fiducial
विषम odd
विषमागता heterogeneity
विषमित skewed
विस्थापन shift
वृत्त pie
वृद्धिघाती logistic
वैकल्पिक alternative
वैषम्य skewness
व्यंजक expression
व्यवस्थित systematic
व्यवहार practice
व्याख्यात explained
व्यास diameter
व्युत्क्रम reciprocal

शततमक percentile
शब्दावली terminology
शीर्षक title caption
शृंखला chain
शृंखलित आपेक्षिक link relative
शेष residual
श्रेढी progression
श्रेणी series

संकेंद्रण concentration
संकेत चित्र symbol
संकोच contraction
संख्यात्मक numerical
संगत relevant
संग्रह collection
संचयी cumulative
संदर्भ reference
संपदा estate
संबंध relation relationship
संभ्रान्ति confusion
संयोग chance
संयोज्यता additive
संशोधन correction
संशोधित modified
सकल gross
सतत continuous
सन्निकट approximate
समंजन adjustment
समंजित adjusted
सम even
समता parity
सममित symmetrical
समय निर्धारण timing
समरूपता similarity
समरेखण smoothing
समष्टि population
समांतर arithmetic
समान common
समानता equivalence
समापवर्तन common factor
समाहार aggregate

समाहृत aggregative
समीकरण equation
समुचित appropriate
समूह group
समूहन grouping
समूहित grouped
सम्मिश्र complex
सहसंबंध correlation
सांख्यिकी statistics
सांख्यिकीय statistical
सातत्य continuity
सापेक्ष relative
सामान्य common
सारणिक tabular
सारणी table
सारणीकरण tabulation
साराश summary
सार्थकता significance
साहचर्य association
सिद्धांत theory, principles
सीमा limit

सूक्ष्मता precision
सूचकांक index, index number
सूत्र formula
सेवा सर्विस
सोद्देश्य purposive
स्तंभ column
स्तर level
स्तरित stratified
स्थावर सम्पदा real estate
स्थिर stable
स्थिरता stability
स्थिरांक constant
स्रोत source
स्वतंत्र independant
स्वतंत्रता freedom
स्वरूप shape
स्वातन्त्र्य freedom

हरात्मक harmonic
ह्रास decrease

अनुक्रमणिका

अनुक्रमणिका

शुद्धि-पत्र

पृष्ठ	पंक्ति ऊपर से	पंक्ति नीचे से	अशुद्ध	शुद्ध
213	3	—	$- =_4$	$r_1 = .$
	4	—	( )	$. \; (.)^4$
	5	—	पूरी पंक्ति	$r_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu^2_1\nu_2 - 3\nu^4_1$
	—	5	कूटककुदी	तुगककुदी
235	3	—	उपनति	...उपनति I
268	9	—	$. + ab^{+}$	$.. + ab^{Y}$
286	15	—	$10^{a+bt Y_c X^2}$	$10^{a+b X + c X^2}$
313	3	—	वस्तुनिष्ठ	व्यक्तिनिष्ठ
442	2	—	$. . X_2$	$. \; X^2$
448	14	—	$. X^3 X^3$	$. X^3 X^3$
464	—	4	$\Sigma\left(\frac{1^2}{y}\right)$	$\Sigma\left(\frac{1}{y}\right)^2$
465	4	—	आयतन	आकलन
474	4	—	पूरी पंक्ति	$r^2_{1 \cdot 23} = \frac{R^2_{1 \cdot 23} - r^2_{12}}{1 - r^2_{12}}$
579	—	3	$\sigma_{\overline{X_1}} - \overline{X}_2$	$\sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$
580	—	1	विश्वास...	..विश्वास्यता ..
582	12	—	0 291	0 298
610	12	—	d	p
610	—	5	$(\, ..)^1$	(...)!
618	11	—	A	एक
622	9	—	^{2}	χ^2
624	—	6	χ	χ^2

पृष्ठ	पंक्ति ऊपर से	पंक्ति नीचे से	अशुद्ध	शुद्ध
624	—	4	$\hat{\sigma}$	σ
624	—	1	$\overline{}^{2}$	$\overline{\sigma^{2}}$
629	19	—	$(\sigma_k)^{n_k}$	$(\sigma\ )^{n_k}$
631	17	—	$[\ = \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2$	$[\ ] = \frac{(\Sigma X)^2}{N}$
632	—	1	$(\ )^3$	$(\ )^2$
634	1	—	$\underline{\left(\Sigma_1^{kc} X\right)}$	$\underline{\left(\Sigma_1^{\Lambda} X\right)}$
637	14	—	$\underline{309\ 961}\ \ \underline{1\ 236\ 4289}$	$\underline{309\ 4161} - \underline{1\ 236\ 9289}$
642	7	—	$\Sigma_1^{kb}\frac{\left(\Sigma_1^{N_b} \lambda\right)^2}{N_b}$	$\frac{\Sigma_1^{kb}\left(\Sigma_1^{N_b} X\right)^2}{N_b}$
645	1	—	λ	χ^2
645	10	—	e^2	χ
650	—	1	$\underline{y^2_s}$	Σy
651	—	4	$r^2_{Y\ XY^2}$	$r_{\ Y\ XX^2}$
651	—	2	$N-2$	$N-3$
654	5	—	$r^2_{YX^3X^2}$	$r^2_{YX^3\ XY^2}$
654	7	—	$r^2_{YYX^3\ XX^2}$	$r^2_{XX^3\ YX^2}$
656	14 15	—	η	η
656	17	—	$\eta_Y^2\ x =$	$\eta_Y^2\ x -$
657	11	—	$\Sigma x^2_{s1\ 28}$	$\Sigma x^2_{s1\ 23}$
	20	—	$\overline{(1-R^2_{1\ 234}\quad m)}$	$\overline{(1-R^2_{1\ 134}\quad m)}$

शुद्धि पत्र

पृष्ठ	पंक्ति ऊपर से	नीचे से	अशुद्ध	शुद्ध
658	5	—	$R_{1\ 234}\quad m$	$R_{\ 234}\quad m$
658	7	—	$\overline{\Sigma_{r^{\circ}\ \circ 34}}$	$\overline{\Sigma_{r}}$
659	7	—	$r\ _{24}$	$r^{\circ}_{3\ 4}$
659	—	1	$[(V-m-1)]$	$[\overline{N}-(m\quad 1)]$
660	3	—	$=1$	$=1-$
702	—	2	$\frac{\sigma}{\sigma}$	$\frac{\sigma}{\sigma}$
703	3	—	$\frac{\sigma}{\sigma^2}$	$\frac{\sigma}{\sigma^2}$
704	2	—	पहला अक्षर	σ^2
711	4	—	N_a	N
742	9	—	Σd^2	Σd
745	16	—	$\frac{x^2}{2\sigma}$	$-\frac{x^2}{2\sigma^2}$
745	—	2	$\frac{x_N}{2\sigma}$	$-\frac{x_N}{2\sigma^2}$
748	3	—	पंक्ति के आरम्भ में = को छोड़ दें।	
748	4	—	$(\quad=\quad)$	$(\quad-\quad)$
750	—	1	$\sqrt{\Sigma Y_2}$	$\sqrt{\Sigma Y^2}$
753	—	2	$\frac{\Sigma x^{\circ}_{c1\ 3}}{}$	$\frac{\Sigma x^{\circ}_{c1\ 3}}{r_3\ \cdot}$
754	9	—	x_{323}	$\Sigma x_{c1\ 23}$
754	17	—	$\Sigma x^{\circ}_{c1\ 63}$	$\Sigma x^2_{c1\ 23}$
754	19	—	$\Sigma x_c x_{1\ 23}$	$\sigma 2$
756	—	6	$\sigma^2_{\Sigma}X$	ΣX
756	—	5	$(\Sigma)x$	$(\Sigma x)^2$
756	—	1	$+c+$	$+x_c+$

पृष्ठ	पंक्ति ऊपर से	पंक्ति नीचे	अशुद्ध	शुद्ध
757	—	4	σ_2 Σx	$\sigma^2_{\Sigma x}$
758	—	2	$=\hat{\sigma}^2$	$=\sigma$
759	—	1	$=\Sigma_{s}^{2}$ (1 से k)	$= \sqrt{\Sigma_{s}^{2}}$ (1 से k)
760	8	—	पूरी पंक्ति	जहा s^2 समांतर माध्य है s^2 मानो का।
760	14	—	$\underline{\Sigma x_K^2}$	$\frac{\Sigma x_K^2}{N}$
761	17	—	$X_1=$	$X_1=$